МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

Преобразуем нижнее уравнение по формуле суммы синусов.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cdot\cos\frac{4\beta}{2} = -\frac{4}{5}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$$

подставляя сюда I ур-е, получим:

$$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

~~тогда~~ $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим первое ур-е:

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = \cancel{\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cos}$$

$$\frac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$2\sin 2\alpha \pm \cos 2\alpha = -1$$

Здесь знак $\pm$ зависит от знака $\sin 2\beta$

1) Пусть ~~когда~~ $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $2\sin(2\alpha) + \cos 2\alpha = -1$

раскроем формулу двойного угла, применим основное тригонометрическое тождество: $4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$$

$$(2\sin\alpha + \cos\alpha)\cos\alpha = 0$$

Т.к. $tg\,\alpha$ определён, то $\cos\alpha \neq 0 \Rightarrow 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0$

$$tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -0{,}5$$

21 Пусть $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

Раскроем по формулам двойного угла:

$4\sin\alpha\cos\alpha - \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = -\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$(2\cos\alpha + \sin\alpha)\sin\alpha = 0$

Если $\sin\alpha = 0$, то $\operatorname{tg}\alpha = 0$, иначе $\sin\alpha + 2\cos\alpha = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -2$

Итого получается 3 возможных значения $\operatorname{tg}\alpha$.

Ответ: $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -0{,}5$; $\operatorname{tg}\alpha = -2$.

№2

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

Возведём в квадрат I равенство с учётом, что левая часть не отрицательна. Также дополним II равенство до полных квадратов.

$$\begin{cases} (x-2y)^2 = xy - x - 2y + 2 \\ x - 2y \geq 0 \\ x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 12 + 4 + 9 \end{cases}$$

Рассмотрим первое равенство, оно эквивалентно:

$x^2 - 5xy + x + 4y^2 + 2y - 2 = 0$

Оно раскладывается в произведение:

$(x - y - 1)(x - 4y + 2) = 0$

Таким образом получается система:

$$\begin{cases} (x-y-1)(x-4y+2) = 0 \\ x - 2y \geq 0 \\ (x-2)^2 + (3-y)^2 = 25 \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Сделаем замену: $a = x-2$, $b = 3y-3$

То есть $x = a+2$ $y = \frac{b}{3}+1$

$$\begin{cases} (a+2-\frac{b}{3}-2)(a+2-\frac{4b}{3}-2)=0 \\ a+2-\frac{2b}{3}-2 \geq 0 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (a-\frac{b}{3})(a-\frac{4b}{3})=0 \\ a-\frac{2b}{3} \geq 0 \\ a^2+b^2=25 \end{cases}$$

Рассмотрим каждое равенство на графике с осями a, b

1) $(a-\frac{b}{3})(a-\frac{4b}{3})=0$

две прямые проходящие через (•) точку O с коэффициентами 3 и $\frac{3}{4}$

2) $a-\frac{2b}{3} \geq 0$ полуплоскость под прямой проходящей через O с коэфициентом $\frac{3}{2}$.

3) $a^2+b^2=25$

Окружность с центром в O и $R=5$

Найдём пересечение прямых из I ур-я с окружностью

1) $\frac{b^2}{9}+b^2=25$ $\qquad a = \frac{\pm\sqrt{\frac{45}{2}}}{3} = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b = \pm\sqrt{\frac{25\cdot 9}{10}}$ $\qquad a = \pm\sqrt{\frac{5}{2}}$

$b = \pm\sqrt{\frac{45}{2}}$

Следовательно нам подходит решение $a, b = -\sqrt{\frac{5}{2}}, -\sqrt{\frac{45}{2}}$

№2) $\frac{16b^2}{9} + b^2 = 25$ $\qquad a = \pm 4$

$b = \pm\sqrt{\frac{25 \cdot 9}{25}} = \pm 3$ Следовательно нам подходит решение a и b, равные 4 и 3 соответственно.

Сделаем обратную замену, получается, что решение x, y равняются $(-\sqrt{\frac{5}{2}}+2), (-\sqrt{\frac{5}{2}}+1)$ либо 6, 2.

№1

~~Посчитаем значения в простых числах~~

№5

Посчитаем значения в простых числах $f(2), f(3) = 0$; $f(5), f(7) = 1$; $f(11) = 2$; $f(13) = 3$; $f(17, 19) = 4$; $f(23) = 5$.

Зная эти значения, их соотношения $f(ab) = f(a) + f(b)$, можем посчитать значения во всех натуральных числах. $f = 0$ в 1, т.к $f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1)$, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24; $f = 1$ в 10, 14, 15, 20, 21, $f = 2$ в 22. Итого на отрезке от 1 до 24 f принимает значение 0 11 раз, единицу 7 раз, 2 два раза, 3 1 раз, 4 2 раза и 5 1 раз.

Заметим, что $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$, то есть $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$ разобьём тогда все пары на xy и yx - из них либо для обеих $f = 0$, либо ровно для одной f принимает отрицательное значение. Значит нам нужно вычесть из общего кол-ва пар xy количество пар, для которых $f(x) = f(y)$ и оставшееся количество поделить на 2. Как раз така это и есть искомое кол-во пар. Получаем $\frac{(24 \cdot 23) - 11 \cdot 10 - 7 \cdot 6 - 2 \cdot 1 - 2 \cdot 1)}{2} = \frac{552 - 110 - 42 - 4}{2} = 198$.

Ответ: 198.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

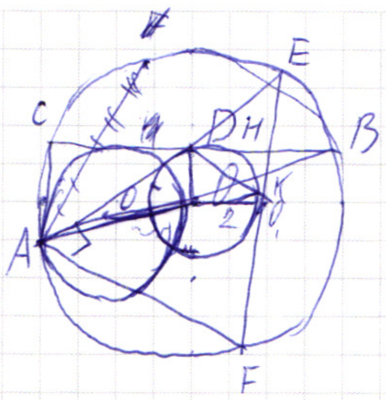
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$BO_1 = R_1$, $O_1O_2 = R_1 - R_2$

$\triangle BO_2D: (R_1 + R_1 - R_2)^2 = 12^2 + R_2^2$

$\angle AEB = 90^\circ \Rightarrow BDE = 90^\circ - \alpha$

$FE \perp BC$, $\angle AFE = \angle ADE$

$\angle AEF = \angle ODE \Rightarrow AF = CE$

$\angle ABC = \angle AKD$ как вписанный

$\angle ADK = 90^\circ$, значит $\angle KAD = 90^\circ - \angle AKD = \alpha = \angle CAD \Rightarrow$

$CE = DE$

Тогда EH высота бис в равнобедр треугольнике CED

FE проходит через O_1, тогда $\angle EAF = 90^\circ$ $\angle AFE = 90^\circ - \alpha =$
$= \angle ADC = \angle EDB$

FE проходит через O_1

$CD = 8$, $BD = 12$, $BH = HC = \frac{1}{2}BC = \frac{25}{2}$, $DH = \frac{9}{2}$

$EH = \sqrt{BH \cdot DH} = \frac{15}{2}$ $\frac{CH \cdot BH}{HE} = \frac{25 \cdot 25 \cdot 2}{2 \cdot 2 \cdot 15} = \frac{5 \cdot 25}{6}$,

$FE = \frac{15}{2} + \frac{5 \cdot 25}{6} = \frac{85}{3}$ $R_1 = \frac{85}{6}$ $R_1 = \frac{85}{6}$ вп, $R_2 = \frac{136}{15}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$CE = BE = AF = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{25}{2}\right)^2} = \frac{5 \cdot \sqrt{34}}{2}$

Тогда $\angle AFE = \arccos \frac{AF}{FE} = \arccos \frac{\frac{5 \cdot \sqrt{34}}{2}}{\frac{85}{3}} = \arccos \frac{3 \cdot \sqrt{34}}{34} = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}}$

$\sin \angle AFE = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot FE \cdot \sin \angle AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{2} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{136}{15}$

$= \frac{5 \cdot 5 \cdot 85}{2 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{2125}{12}$

Ответ: $S_{AFE} = \frac{2125}{12}$, $R_1 = \frac{85}{6}$, $R_2 = \frac{136}{15}$, $\angle AFE = \arccos \frac{3}{\sqrt{34}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

(1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$ $\qquad xy-x-2y+2\geq 0$

$(x-2y)^2=xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+2y+y^2-2=0$

$x((x-5y)+1)$

$x^2-x(5y-1)+2y+y^2-2=0$

$x(x-1(5y-1))+y(2+y)-2=0$

$x^2-5xy+x-2=-y^2-2y$

$x^2-5xy+x=2-y^2-2y$

$x^2-x(5y-1)=2-y^2-2y$

$x^2-x(5y-1)-2=-y(y+2)$

(2) $x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+9y^2-18y=12$

$x(x-4)+9y(y-2)=12$

№3) $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq|x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$

① $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq-(x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$ $\qquad$ ② $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geq(x^2+18x)^{\log_{12}13}$

① $5^{\log_{12}(x^2+18x)}+(x^2+18x)^{\log_{12}13}\geq-x^2-18x$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№ 6 $\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$

(1) $\frac{12x+11}{4x+3}=0$ $4x+3 \ne 0$

$x=-\frac{3}{4}$

$12x+11=0$

$x=-\frac{11}{12}$

(1) $+$ $-\frac{11}{12}$ $-$ $-\frac{3}{4}$ $+$

$\times\frac{17}{4}$ 68

(2) $-8x^2-30x-17=0$

$8x^2+30x+17=0$

$D=900-8\cdot68=900-4\cdot136=900-544=356=$

$\times\frac{136}{4}$ 544

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\frac{p}{4}$

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$f(\frac{x}{y})<0$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

(2) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

(2) $\sin2\alpha\cos4\beta+\cos2\alpha\sin4\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

(1) $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}=-5^{-\frac12}$

(2) $\sin2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\cos2\alpha\sin2\beta\cos2\beta+\sin2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha(\cancel{\cos^2 2\beta}-\sin^2 2\beta+\sin^2 2\beta+\cancel{\cos^2 2\beta})+2\cos2\alpha\sin2\beta\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$\sin2\alpha+2\cos2\alpha\sin2\beta\cos2\beta=-\frac{4}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=-\frac{4}{5}$

$\sin\alpha\cos\alpha+2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=-\frac{2}{5}=-2\cdot5^{-1}$

(1) $\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-5^{-\frac12}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)\cdot\sin\beta\cos\beta=-5^{-\frac12}$

$2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-5^{-\frac12}-2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta)$

(2) $2\sin\beta\cos\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)(\cos^2\beta-\sin^2\beta)=\frac{-2\cdot5^{-1}-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}$

$\frac{-2\cdot5^{-1}-\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\beta-\sin^2\beta}=-5^{-\frac12}-2\sin\alpha\cos\alpha(\cos^2\beta-\sin^2\beta$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)