МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

1) $\wedge 2$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0$

$(x-18y+3)(x-8y-2)=0 \qquad (x \geqslant 12y)$

$\xrightarrow{\text{л.ч.} \geqslant 0} *$

$$\left[\begin{array}{ll} x=18y-3 & а) \\ x=8y+2 & б) \end{array}\right.$$

подставим во второе

а) $(18-3)^2+36y^2-12(18y-3)-36y=45$

$324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y^2=45$

$360y^2-360y=0$

$y(360y-360)=0$

$y=0;\ y=1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0;\ x=-3 \text{ - не подходит по } * \\ y=1;\ x=15 \end{array}\right.$

б) $(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$

$64y^2+32y+4+36y^2-36y-24-36y=45$

$100y^2-100y-65=0$

$y=\frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$

$\Downarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\Downarrow$

$y = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}}$; $x = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}}$ не подходит по *

$y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}}$; $x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}}$

Ответ: $\left\{ (15; 1) \cup \left(6 - 12\frac{2}{5}; \frac{1}{2} - \frac{3}{10}\right) \right\}$

№ 3

$10x + (x^2 - 10x)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

по св. логарифмов $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

+ замена $t = 10x - x^2$

$5^{\log_3 (10x - x^2)}$

$\Downarrow$

$t = 10x - x^2 > 0$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$\Updownarrow$ поделим все на $5^{\log_3 t} > 0$;

$$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}}_{f(t)} \geq 1$$

$f(t)$ - убывающая функция $\Rightarrow f(t) \geq 1$

$\Updownarrow$

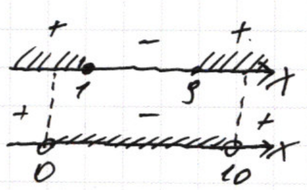
$t \leq t_0$ где $f(t_0) = 1$

Заметим, что при $\log_3 t = 2 \Rightarrow t = 9$

$\Downarrow$

неравенство верно при $0 < t \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 9x - x^2 < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)(x-1) \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Посчитаем значения простых чисел:

$f(2), f(3) = 0;$

$f(5), f(7) = 1;$

$f(11) = 2;$

$f(13) = 3;$

$f(17); f(19) = 4;$

$f(23) = 5$

зная эти значения и соотношения $f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ можем посчитать значения во всех натуральных числах.

$f = 0$ в: 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24;

$f = 1$ в: 10, 14, 15, 20, 21;

$f = 2$ в: 22, 25;

Итого на отрезке от 2 до 25 f принимает значения "0" 10 раз "1" 7 раз "2" 3 раза "3" 1 раз "4" 2 раза и "5" 1 раз.

Заметим, что $f(\frac{x}{y}) + f(y) = f(x)$, то есть $f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$.

Разобьем тогда все пары на (x, y) и (y, x) – из них либо для обеих f равна нулю либо для одной f принимает отрицательное значение.

Значит нам нужно из общего количества пар (x, y) количество пар для которых $f(x) = f(y)$ и оставшееся количество поделить на 2, это и будет искомое количество пар.

Получаем: $\dfrac{(24\cdot 23 - 10\cdot 9 - 7\cdot 6 - 3\cdot 2 - 2\cdot 1)}{2} = \cancel{\dfrac{552 - 30 - 42 - 8}{2}}$

$= \dfrac{552 - 30 - 42 - 8}{2} = 206$

Ответ: 206

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2a + 2\beta) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2a + 4\beta) = -\dfrac{2}{5} \end{cases}$$

Преобразуем нижнее уравнение по формуле синусов:

$\sin(2a + 4\beta) + \sin(2a) = 2\sin\left(\dfrac{4a + 4b}{2}\right)\cdot\cos\left(\dfrac{4b}{2}\right) =$

$= -\dfrac{2}{5}$

$2\sin(2a + 2b)\cdot\cos(2b) = -\dfrac{2}{5}$

Подставляем первое уравнение, тогда получим:

$\cos(2b) = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ тогда $\sin(2b) = \pm\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

Рассмотрим 1 уравнение:

$\sin(2a + 2b) = (\sin 2a\cdot\cos 2b) + (\cos 2a\cdot\sin 2b) =$

$= \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin(2a) \pm \left(\dfrac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2a)\right) = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2a) \pm 2\cos 2a) = -1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Применим универсальную тригонометрическую подстановку.

Пусть $t = tg(a)$

$$\frac{2t}{1+t^2} \pm \frac{2\cdot(1-t^2)}{1+t^2} = -1$$

$$2t \pm 2\cdot(1-t^2) = -1-t^2$$

$$(t+1)^2 \pm 2(1-t)(1+t) = 0$$

$$(t+1)(t+1 \pm 2(1-t)) = 0$$

Отсюда: $\sqrt{} \; tg a = 1$

1) $\sin(2b) = +\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1+2\cdot(1-t) = 3-t = 0$

Отсюда $\sqrt{} \; tg a = 3$

2) $\sin(2b) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1-2\cdot(1-t) = 3t-1 = 0$

Отсюда $\sqrt{} \; tg a = \frac{1}{3}$

других корней нет.

Итого получаем 3 возможных значения $tg(a)$

Ответ: $tg a = -1; 3; \frac{1}{3}$

№6

Даны неравенства эквивалентны тому, что прямая $ax+b$ должна находиться под параболой $-32x^2+36x-3 = f(x)$ на заданном отрезке, значит полученный отрезок должен находиться ниже отрезка который соединит точки $X = \frac{1}{4}$, 1

В силу выпуклости параболы:
Подставим $f\left(\frac{1}{4}\right) = 4$; $f(1) = 1$

Найдем уравнения прямой, на которой все отрезки находятся под и на уровне этой прямой $y = kx + b$

$1 = k + b$

$4 = \frac{k}{4} + b$

Решая данную ФЛУ получим $a = -4$
$b = 5$

Требуем решить неравенство $\frac{15x - 15}{4x - 5} \leq -4x + 5$

От $\frac{1}{4}$ до 1, $4x - 5 < 0$, тогда можно домножить на него и поменять знак

$16x - 16 \geqslant -(4x + 5)(4x - 5)$

Откуда получим $(4x - 3)^2 \geqslant 0$, что тождественно для любого x.

Тогда такая прямая будет выше гиперболы.
В такой ситуации нельзя будет брать отрезки ниже этой прямой $\Rightarrow$ $a = -4$
$b = 5$

№7

Обозначим E, Q середины ML, LM, NM, тогда четырехугольник будет вписан в окружность которая получается если провести пересечения плоскостью

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

MLN. Значит сумма противолежащих углов равна 180°. При этом NEQF параллелограмм так. как. $NE \parallel FQ$ и $NF \parallel EQ$ по свойствам ср линии. Зная, что NEQF - прямоугольник и противолежащие стороны равны, значит это квадрат => $\Rightarrow NL = NM \Rightarrow \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2 = LM$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad$ $f(p) = [p/4]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$ $\qquad$ $f(x/y) < 0$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45$

$x(x-12) + 36y(y-1) = 45$

$x^2 - 24\cancel{xy} + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 - 26xy + 144y^2 = -x + 6 - 12y$

$x^2 + x - 6 + 12y - 26xy + 144y^2$

$x(x+1) - 6(1-2y) - y(26x - y\,144)$

№2

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} & (1) \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36 = 45 & (2) \end{cases}$$

1) 1_2

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 - 26xy + 144y^2 + 12y + x - 6 = 0$

$(x - 18y + 3) \cdot (x - 8y - 2) = 0$

$(x \geq 12y)$

$\geq 0^*$

1.7. $\geq 0^*$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\left[\begin{array}{ll} x = 18y - 3 & а) \\ x = 8y + 2 & б) \end{array}\right.$

подставим во второе 2)

а) $(18y-3)^2 + 36y^2 - 12(18y-3) - 36y = 45$

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y^2 = 45$

$360y^2 - 360y = 0$

$y(360y - 360) = 0$

$y = 0;\ y = 1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0;\ x=-3 \text{ — не подходит по*} \\ y=1;\ x=15 \end{array}\right.$

б) $(8y+2)^2 + 36y^2 - 12(8y+2) - 36y = 45$

$64y^2 + 32y + 4\ 36y^2 - 36y - 24 - 36y = 45$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$y = \frac{1}{2};\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}};\ x = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}} \text{ не подходит по*} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}};\ x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

Ответ: $\{(15;1);\ (6 - 12\frac{2}{5};\ \frac{1}{2} - \frac{3}{10})\}$

№3

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$5^{\log_3(10x-x^2)}$

$\Downarrow$

$t = 10x - x^2 > 0$

по св. логарифмов $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

+ замена $t = 10x - x^2$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$\Updownarrow$ поделим все на $5^{\log_3 t} > 0$:

$\underbrace{\left(\frac{3}{5}\right)^{\log_3 t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\log_3 t}}_{f(t)} \geqslant 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7

Обозначим E, Q середины ML, LM, NM, тогда четырехугольник будет вписан в окружность натуральнго? если провести плоскость NLM. значит сумма противоположных углов NEQF равна по 180 градусов. при этом NEQF параллелограм так как NE ‖ FQ и NF ‖ EQ по свойствам ср. линий, значит противоположные NEQF - прямоугольник, при этом противоположные рёбра равны значит это квадрат => NL = NM =>

=> $LM = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Рассмотрим 1 уравнение

$\sin(2a+2b) = (\sin 2a \cdot \cos 2b) + (\cos 2a \cdot \sin 2b) =$

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \sin(2a) \pm \left(\frac{2}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2a\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2a) \pm 2\cos(2a) = -1$

применим универсальную тригонометрич. подстановку.

Пусть $t = \operatorname{tg} a$

$\frac{2t}{1+t^2} \pm \frac{2\cdot(1-t^2)}{1+t^2} = -1$

$2t \pm 2\cdot(1-t^2) = -1-t^2$

$(t+1^2) \pm 2(1-t)(1+t) = 0$

$(t+1)\cdot(t+1 \pm 2\cdot(1-t)) = 0$

Отсюда: $\vee \operatorname{tg} a = -1$

1) $\sin(2b) = +\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1+2\cdot(1-t) =$
$3-t=0$

Отсюда $\vee \operatorname{tg} a = 3$

2) если $\sin(2b) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$, то $t+1-2\cdot(1-t) =$
$= 3t-1=0$

Отсюда $\vee \operatorname{tg} a = \frac{1}{3}$

других корней нет

Итого получаем 3 возможных значен $\operatorname{tg} a$

Ответ: $\operatorname{tg} a = -1;\ 3;\ \frac{1}{3}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(t)$ - убывающая функция $\Rightarrow f(t) \geq 1$

$\Updownarrow$

$t \leq t(0)$ где $f(t_0) = 1$

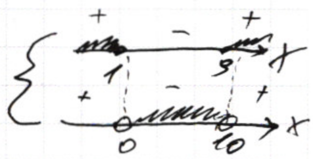
заметим, что при $\log_3 t = 2$

$\Updownarrow$

$t = 9 \Rightarrow$ неравенство верно при

$0 < t \leq 9$

$$\begin{cases} 10x - x^2 \leq 9 \\ 9x - x^2 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x-9)(x-1) \geq 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$



$\Rightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2a + 2B) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2a + 4B) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

преобразуем нижнее уравнение по формуле синусов

$\sin(2a + 4B) + \sin(2a) = \underline{2\sin}\left(\frac{4a+4b}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{4b}{2}\right) =$

$= -\frac{2}{5}$

$2\sin(2a+2b) \cdot \cos(2b) = -\frac{2}{5}$

подставляем первое уравнение тогда получим:

$\cos(2b) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

тогда $\sin(2b) = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

данное неравенство эквивалентно тому что прямая $ax+b$ должна находиться под параболой $-32x^2+36x-3=f(x)$ на заданном отрезке

значит полученный отрезок должен находиться ниже отрезка который соединяет точки: $x=\frac{1}{4}$; $x=1$

В силу того ~~...~~ выпуклости параболы

Подставив $f\left(\frac{1}{4}\right)=4$; $f(1)=1$

Найдем уравнение прямой, на которой все отрезки ~~прямых~~ находятся выше и на уровне этой прямой $y=kx+b$

$1=k+b$

$4=\frac{k}{4}+b$

Решая данную с-му получим $a=-4$, $b=5$

Попробуем решить неравенство $\frac{16x-16}{4x-5}\le -4x+5$

От $\frac{1}{4}$ до 1, $4x-5$ ~~...~~ <0, тогда можно домножить на него и поменять знак

$16x-16 \ge -(4x+5)\cdot(4x-5)$

откуда получим $(4x-3)^2\ge 0$, что выполняется для любого x

☑ черновик ☐ чистовик

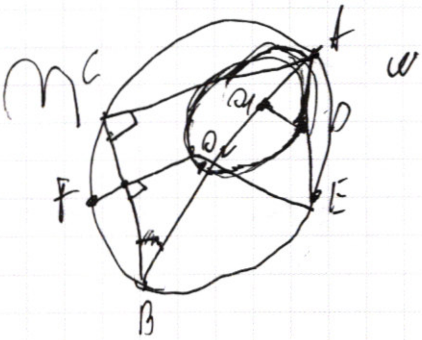
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

Тогда такая прямая будет выше гиперболы в такой ситуации нельзя будет брать этуже точку этой прямой => $a=-4$
$b=5$

№ 4



Она переходит в O_1 и O_2 и в DE при этом $O_2E \parallel BC$