МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$

(2): $\cancel{\sin((2\alpha+2\beta)+\beta)}$ $\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) =$

$\cancel{= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos\cdot(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta - \sin 2\beta\cdot(\cos(2\alpha+2\beta))} =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cancel{\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta} + \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta -$

$\cancel{- \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)} = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$; $\boxed{\cos 2\beta = \frac{\sqrt5}{5} = \frac{1}{\sqrt5}}$

Если 2β в I четверти, то $\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{1}{\sqrt5}\sin 2\alpha + \frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

Если $\sin\alpha = 0$, то: $\sin 2\alpha = 0$ $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$ = не верно

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cdot\cos}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

$\cos 2\alpha = \frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} = \frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha+1} + \frac{2-2\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha} = -1$ $\cancel{1\cdot\operatorname{tg}^2\alpha+1}$

$2\operatorname{tg}\alpha + 2 - 2\operatorname{tg}^2\alpha = -1 - \operatorname{tg}^2\alpha$

$\operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -1, \ \operatorname{tg}\alpha = 3$

II сл: $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} - \cancel{\sin} \frac{2}{\sqrt5} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Big| \cdot \sqrt5$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} - 2 \cdot \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha} = -1$

$\frac{2\operatorname{tg}\alpha - 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha}{\operatorname{tg}^2\alpha + 1} = -1$

$2\operatorname{tg}\alpha - 2 + 2\operatorname{tg}^2\alpha = -\operatorname{tg}^2\alpha - 1$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -1, \ \operatorname{tg}\alpha = +\frac{1}{3}$

Ответ: $-1; \ \frac{1}{3}; \ 3$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2 $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$

(1): $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \quad |\,(\,)^2$

$x^2+144y^2-24xy=2xy-12y-x+6$

$x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6=0$

$D=(26y-1)^2-4(144y^2+12y-6)=676y^2+1-52y-576y^2-$

$-48y+24=100y^2-100y+25=25(4y^2-4y+1)=$

$=(5(2y-1))^2$

$x_{1,2}=\dfrac{26y-1\pm|5(2y-1)|}{2}=\left[\begin{array}{l}18y-3\\8y+2\end{array}\right.$

(2): I случай: $x=18y-3$

$(18y-3)^2+36y^2-12(18y-3)-36y=45$

$324y^2+9-108y+36y^2-216y+36-36y-45=0$

$360y^2-360y=0$

$y^2-y=0 \Rightarrow y=0$ или $y=1$

Если $y=0$, то $x=-3$ $\qquad (-3;0)$

Если $y=1$, то $x=15$ $\qquad (15;1)$

II случай: $x=8y+2$

$(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y=45$

$64y^2+4+32y+36y^2-96y-24-36y-45=0$

$100y^2-100y-65=0$

$20y^2-20y-13=0$

$D=400+4\cdot20\cdot13=4(100+260)=4\cdot360=(6\cdot2\cdot\sqrt{10})^2$

$y_{1,2}=\dfrac{20\pm12\sqrt{10}}{40}=\dfrac{5\pm3\sqrt{10}}{10}=0{,}5\pm0{,}3\sqrt{10}$

Если $y=0{,}5+3\sqrt{10}$, то $x=8(0{,}5+0{,}3\sqrt{10})+2=4+2{,}4\sqrt{10}+2=6+2{,}4\sqrt{10}$

$(6+2{,}4\sqrt{10};\ 0{,}5+3\sqrt{10})$

Если $y=0{,}5-0{,}3\sqrt{10}$, то $x=8(0{,}5-0{,}3\sqrt{10})+2=4+2-2{,}4\sqrt{10}$

$(6-2{,}4\sqrt{10};\ 0{,}5-0{,}3\sqrt{10})$

Проверка: $(-3;0)$

(1): $-3-12\cdot0=\sqrt{}$ – невозможно

Проверка: $(15;1)$

(1): $15-12=\sqrt{\underbrace{2\cdot15}_{30}\cdot1-12\cdot1-15+6}$

$3=\sqrt{9}$ – верно, в ур-ии 2 ограничений нет.

Проверка: $(6+2{,}4\sqrt{10};\ 0{,}5+3\sqrt{10})$:

(1): $6+2{,}4\sqrt{10}-12\cdot(0{,}5+0{,}3\sqrt{10})=\sqrt{}$

$6+2{,}4\sqrt{10}-6-3{,}6\sqrt{10}=\sqrt{}$

$-1{,}2\sqrt{10}=\sqrt{}$ – невозможно

Проверка: $(6-2{,}4\sqrt{10};\ 0{,}5-0{,}3\sqrt{10})$

$6-2{,}4\sqrt{10}-12(0{,}5-0{,}3\sqrt{10})=\sqrt{2(6-2{,}4\sqrt{10})(0{,}5-0{,}3\sqrt{10})-12(0{,}5-0{,}3\sqrt{10})-6+2{,}4\sqrt{10}+6}$

$\cancel{6-6}-2{,}4\sqrt{10}+3{,}6\sqrt{10}=\sqrt{2(3-3\sqrt{10}+7{,}2)-\cancel{6}+3{,}6\sqrt{10}-6+2{,}4\sqrt{10}+6}$

$1{,}2\sqrt{10}=\sqrt{\cancel{6-6}-6\sqrt{10}+14{,}4+3{,}6\sqrt{10}+2{,}4\sqrt{10}}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} - (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$10x - x^2 = t$, $t > 0$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0 \quad \Big|: t^{\log_3 5}$

$\frac{t}{t^{\log_3 5}} + \frac{t^{\log_3 4}}{t^{\log_3 5}} - 1 \geq 0$

$t^{\log_3 \frac{3}{5}} + t^{\log_3 \frac{4}{5}} \geq 1$

Заметим, что при $t = 9$ выполняется равенство

$3^{\log_3 \frac{3}{5} \cdot 2} + 3^{\log_3 \frac{4}{5} \cdot 2} = 1$

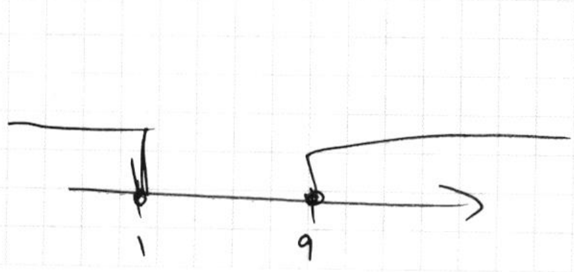
$\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, т.к. $t^{\log_3 \frac{3}{5}}$ и $t^{\log_3 \frac{4}{5}}$ - уб. функции, то

при $t \leq 9$ - выполняется

$10x - x^2 \leq 9$

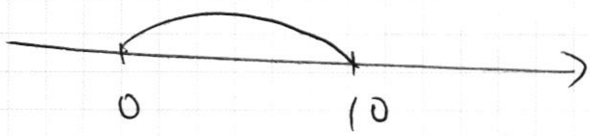
$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x - 1)(x - 9) \geq 0$



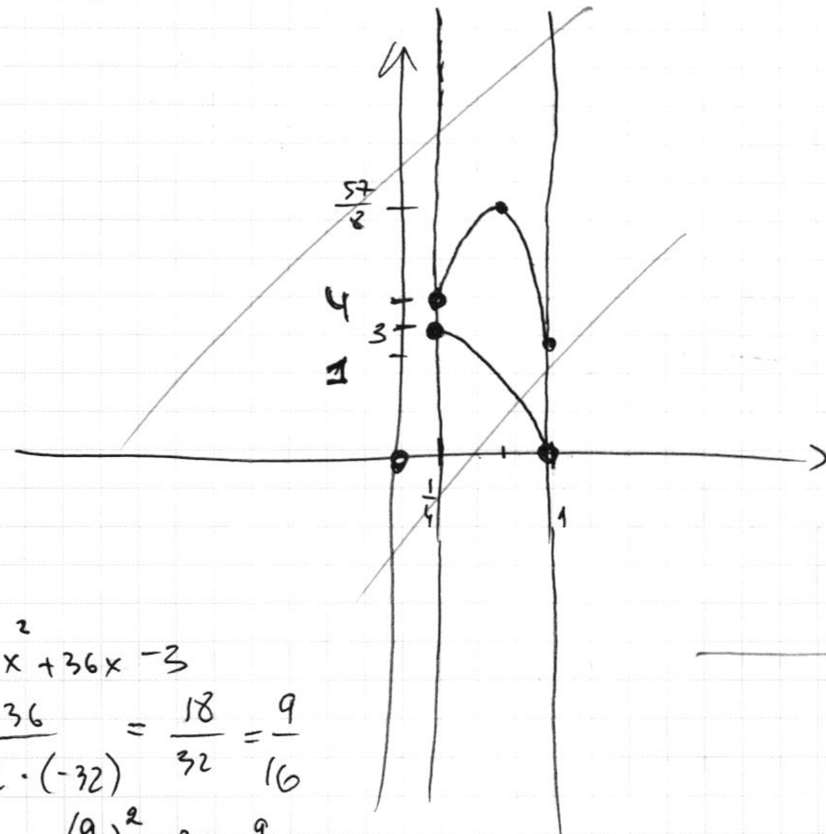
$10x - x^2 > 0$

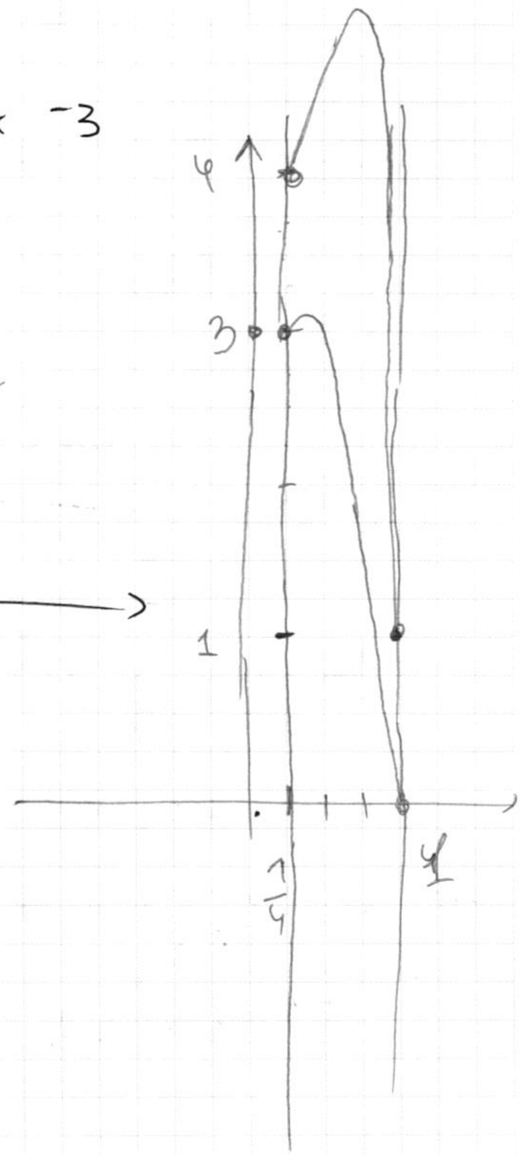
$x(10 - x) > 0$



Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

(6) $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$





$f(x) = -32x^2 + 36x - 3$

$x_в = \frac{-36}{2\cdot(-32)} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$

$y_в = -32\cdot\left(\frac{9}{16}\right)^2 + 36\cdot\frac{9}{16} - 3 =$

$= \frac{-32\cdot 81}{16\cdot 16} + 9\cdot 9\cdot\frac{4}{16} - 3 =$

$= \frac{-162}{16} + \frac{324}{16} - \frac{48}{16} = \frac{324-210}{16} =$

$= \frac{114}{16} = \boxed{\frac{57}{8}} = 7{,}125$

$f(1) = -32 + 36 - 3 = 1;\ f\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{32}{16} + \frac{36}{4} - 3 = -2 - 3 + 9 = 4$

$$g(x)=\frac{16x-16}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$$

$$g(1)=0$$

$$g\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{4-16}{1-5}=\frac{-12}{-4}=3$$

$$g(x)\downarrow \quad \left[\frac{1}{4};1\right]$$

Рассмотрим прямую, проходящую через точки $A\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $B(1;1)$, очевидно, что это прямая

$$\begin{cases} y=-4x+5 \\ y=4+\frac{4}{4x-5} \end{cases}$$ — посмотрим на точки пересечения:

$$-4x+5=4+\frac{4}{4x-5}$$

$$4x+\frac{4}{4x-5}=1 \quad \Big|\cdot 4x-5$$

$$4x(4x-5)+4=4x-5$$

$$16x^2-20x+4=4x-5$$

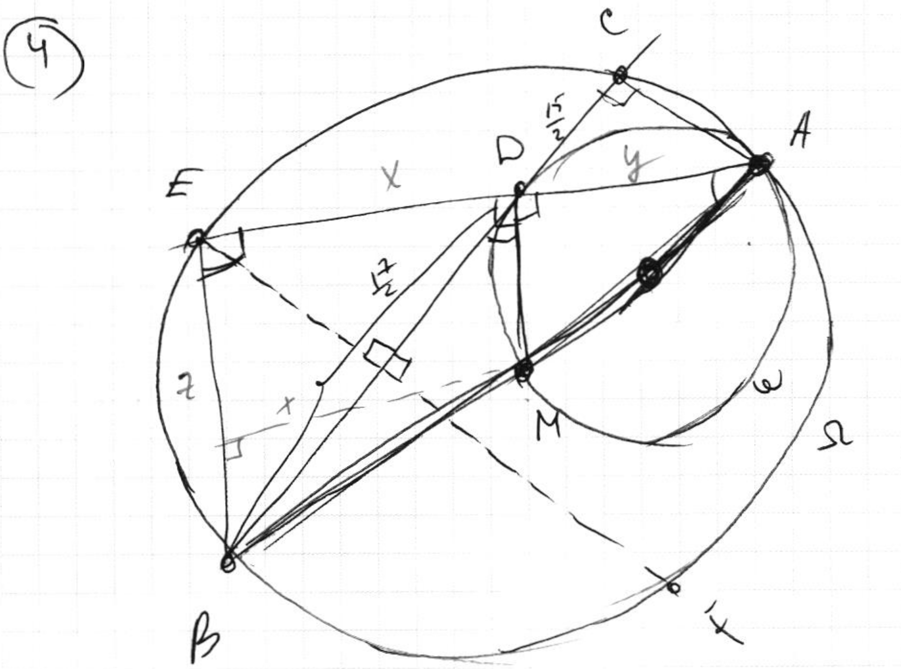
$$16x^2-24x+9=0$$

$(4x-3)^2=0$, $x=\frac{3}{4}$ — принадлежит нашему отрезку, а значит $y=-4x+5$ — касательная к $g(x)$, значит это единственная прямая, которая удовлетворяет условию

Ответ: $(-4;5)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4)



R_1, R_2 – ?

$\angle AFE$ – ?

$S_\triangle AEF$ – ?

$CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

Пусть $BA \cap \omega = M$, по т. о ~~хор~~ квадрате кас:

$BD^2 = BM \cdot AB = \frac{17^2}{4}$

BA – $d\Omega$ $\Rightarrow \angle BEA = 90^\circ$, MA – $d\omega$ $\Rightarrow \angle MDA = 90^\circ$,

$\angle MDA = \angle BEA \Rightarrow BE \parallel MD$ (AE – сек, углы – соотв.)

$\triangle ADM \sim \triangle AEB$ ($\angle A$ – общий, $\angle MDA = \angle BEA$), а значит

$\frac{AD}{AE} = \frac{AM}{AB} = \frac{DM}{BE} = k$,

$xy = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$\frac{x}{y} = \frac{2R_1}{2R_2}$, где R_1 – радиус меньшей, а R_2 – большей.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$; $3^{t+t^{\log_3 4}} \geq 3^{t^{\log_3 5}}$

$3^t \cancel{3^{t^{\log_3 4}} \geq 3^{t^{\log_3 5}}}$

$\log_3 (t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 t^{\log_3 5}$

$\log_3 (t + t^{\log_3 4}) \geq \log_3 5 \log_3 t$

$\cancel{t+t}$ $\cancel{t+}$

$$\begin{array}{r} 324 \\ -\;96 \\ \hline 228 \end{array}$$

$32x^2 + 36x + 3 = 0$

$D = 18^2 - 32 \cdot 3 =$

$= 324 - 96 =$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

$f'(t) = 1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1}$

$= \log_3 5 \cdot t^{\log_3 5 - 1}$

$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3 \quad \forall x \left[\frac{1}{4}; 1\right]$

$-128x^3 + 304x^2 - 208x$

$-32x^2 + 36x - 3 \geq \frac{16x - 16}{4x - 5}$

$\cancel{32x^2 +}$

$\frac{(-32x^2 + 36x - 3)(4x - 5)}{4x - 5} - \frac{16x - 16}{4x - 5} \geq 0$

$\frac{-128x^3 + 160x^2 + 144x^2 - 180x - 12x + 15 - 16x - 16}{4x - 5} \geq 0$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$DE \cdot AD = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$\boxed{DE \cdot AD = \frac{15 \cdot 17}{4}}$

$\frac{17^2}{4} = BE^2 + ED^2$

$BD^2 = BE^2 + ED^2$

$\frac{AD}{AD + DE} =$

$\frac{17^2}{4} = BE^2 + \left(\frac{17 \cdot 15}{4DA}\right)^2$

$\frac{17^2}{4} = BE^2 + ED^2$

$ED \cdot DA = \frac{17 \cdot 15}{4}$

$BE^2 \cancel{+} (2R_2)^2 -$

$ED = \frac{17 \cdot 15}{4DA}$

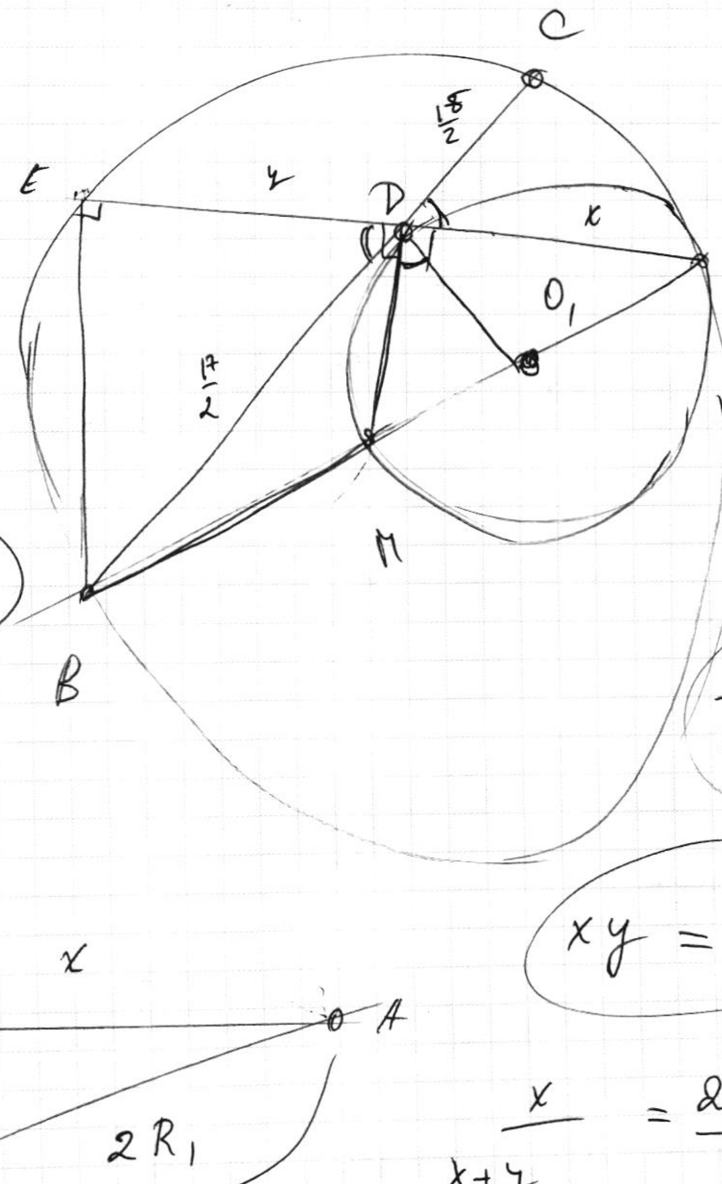
$BE^2 + (x+y)^2 = (2R_2)^2$

$ED \cdot AD = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}$

$BE^2 + y^2 = \frac{17^2}{4}$

$\boxed{2R_2 \cdot BM = \ldots\ldots}$

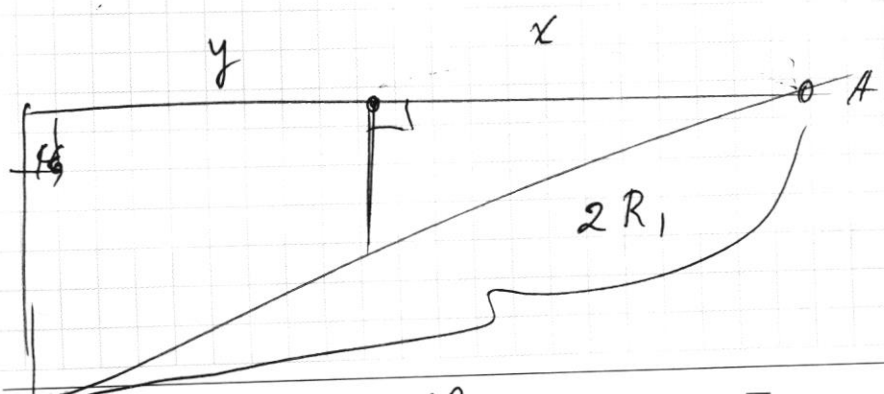
$\frac{2R_1}{2R_1 + BM} =$



$(x+y)^2 - y^2 = 4R_2^2 - \frac{17^2}{4}$

$\frac{x}{x+y} = \frac{R_1}{R_2}$

$xy = \frac{15 \cdot 17}{4}$



$\frac{x}{x+y} = \frac{2R_1}{2R_2}$

$2R_2$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}=\frac{12}{3}+\frac{4}{4x-5}$

$\frac{4}{3}=\frac{16}{3}x+\frac{4}{4x-5}$

$4=16x+\frac{12}{4x-5}$

$4(4x-5)=16x(4x-5)+12$

$16x-20=64x^2-80x+12$

$64x^2-96x+32=0$

$2x^2-3x+1=0$

$x_1=1,\ x_2=$

$y=-\frac{16}{3}x+\frac{16}{3}$

$\cancel{4x}$

$-4x+5=4+\frac{4}{4x-5}$

$4x+\frac{4}{4x-5}=1 \quad |\cdot 4x-5$

$4x(4x-5)+4=4x-5$

$16x^2-20x+4-4x+5=0$

$16x^2-24x+9$

$(4x+3)^2=$

$-\frac{4}{3}+\frac{16}{3}=\frac{12}{}$

$y=ax+b$

$\begin{cases} y=4,\ x=\frac{1}{4} \\ y=1,\ x=1 \end{cases}$

$\begin{cases} 4=\frac{1}{4}a+b \\ 1=a+b \end{cases}$ $\boxed{y=-4x+5}$

$-3=\frac{3}{4}a \quad b=5$

$-12=3a \quad \boxed{a=-4}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$f(a+b) = f(a)+f(b)$

$f(2b) = 2f(b)$

$x^2 + BE^2 = \frac{17}{4}^2$

~~AB·BM~~

$BE^2 = AB^2 - (x+y)^2$

$2R_2 \cdot (2R_2 - 2R_1)$

$x^2 + AB^2 - (x+y)^2 = \frac{17}{4}^2$

$x^2 + 4R_2^2 - (x+y)^2 = \frac{17}{4}^2$

$2R_2 (2R_2 - 2R_1) = \frac{17}{4}^2$

$y^2 - 2xy + 4R^2 = \frac{17}{4}^2$

$$\begin{cases} 2R_2 \cdot (2R_2 - 2R_1) = \frac{17}{4}^2 \\ 4R_2^2 = z^2 + (x+y)^2 \\ xy = \frac{17 \cdot 15}{4} \\ x^2 + z^2 = \frac{17}{4}^2 \end{cases}$$

$2R_2(2R_2 - 2R_1) = \frac{17}{4}^2$

$4R^2 = \frac{17}{4}^2 + y^2 + 2xy$

$xy = \frac{17 \cdot 15}{4}$

$4R^2 = \frac{17}{4}^2 + y^2 \cdot \frac{17 \cdot 15}{2}$

$$\begin{cases} 2R_2(2R_2 - 2R_1) = \frac{17}{4}^2 \\ 4R_2^2 = \frac{17}{4}^2 + y^2 + \frac{17 \cdot 15}{2} \\ xy = \frac{17 \cdot 15}{2} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha = \frac{2\sin\alpha \cdot \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$

$=$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$1{,}2\sqrt{10} = \sqrt{14{,}4}$ – верно, на (2) – нет ограничений

Ответ: $(15; 1)$; $(6-2{,}4\sqrt{10}; 0{,}5-0{,}3\sqrt{10})$

③ $10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$

ОДЗ: $\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ \end{cases}$, $x^2 - 10x < 0$

$\cancel{x^2-10x}$ $10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} - 5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

] $10x - x^2 = t$, тогда:

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$ $\quad t + 4^{\log_3 t}$

$\underbrace{10x - x^2}_{t} + (10x-x^2)^{\log_3 4} - (10x-x^2)^{\log_3 5} \geq 0$

$\boxed{t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}}$

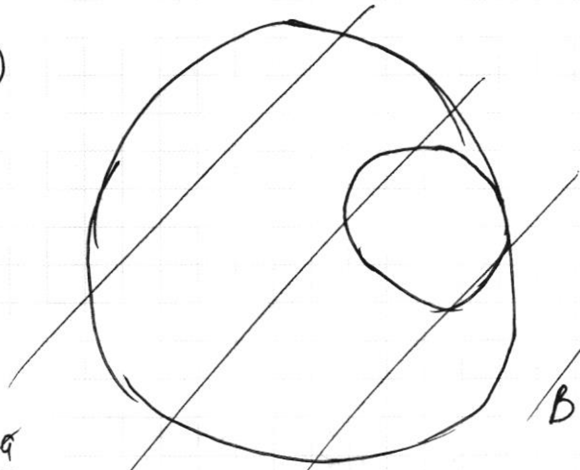
$\underbrace{t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}}, \geq 0$

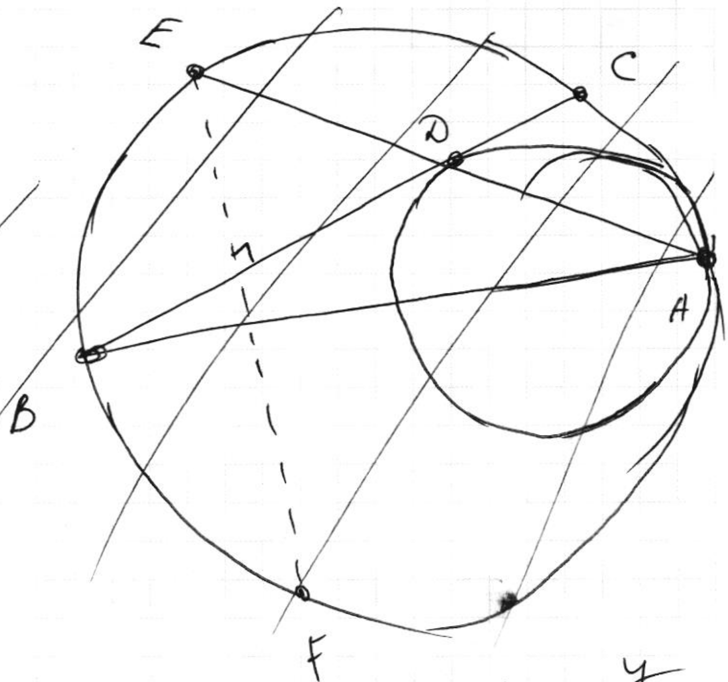
$1 + t^{\log_3 4 - 1} - t^{\log_3 5 - 1} \geq 0$ $\quad 3^n + 4^n - 5^n \geq 0$

$1 + t^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq t^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$3^n + 3^{\log_3 4 \cdot n} - 3^{\log_3 5 \cdot n} \geq 0$

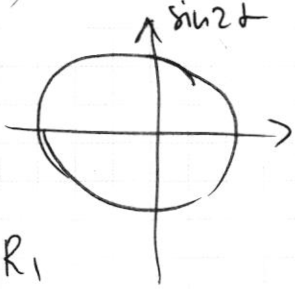
4





$\frac{\cancel{3}^{\,1}}{4} \vee \frac{9}{16}$

$1 \neq \frac{3}{4}$



$1-\frac{y}{x+y}=\frac{R_1}{R_2}$

$$\begin{cases} \frac{x}{x+y} = \frac{R_1}{R_2} \\ xy = \frac{15\cdot 17}{4} \\ x^2+2xy = 4R_2^2-\frac{17^2}{4} \end{cases}$$

$\cancel{x} = \frac{15\cdot 17}{4}\cdot\frac{1}{y}$

$\times\frac{81}{4}$

324

$\cancel{t+t}$

$t^{\log_3\frac{3}{5}} =$

$t=9$

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \quad \Big| : t^{\log_3 5}$

$3^{\log_3\frac{3}{5}\cdot 2}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^2$

$\frac{t}{t^{\log_3 5}}+\frac{t^{\log_3 4}}{t^{\log_3 5}} \geq 1$

$\frac{9}{16}-\frac{4}{10}=\frac{5}{10}$

$1-$

$t^{1-\log_3 5}+t^{\log_3 4-\log_3 5} \geq 1$

$t^{\log_3 3-\log_3 5}+t^{\log_3 4-\log_3 5} \geq 1$

$t^{\log_3\frac{3}{5}}+t^{\log_3\frac{4}{5}} \geq 1$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$g(x) = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$(4x-5)'$

$y = ax+b$

$g'(x) = 4$

$x = \frac{1}{4},\ y = 4$

$y = \frac{1}{4}$

$x = 1,\ y = 0$

$a + b = 0$

$4 = \frac{a}{4} + b$

$\begin{cases} a+b=0 \\ \frac{a}{4}+b=4 \end{cases}$

~~$h(x) = ax+b$~~

~~$h(\frac{1}{4}) =$~~

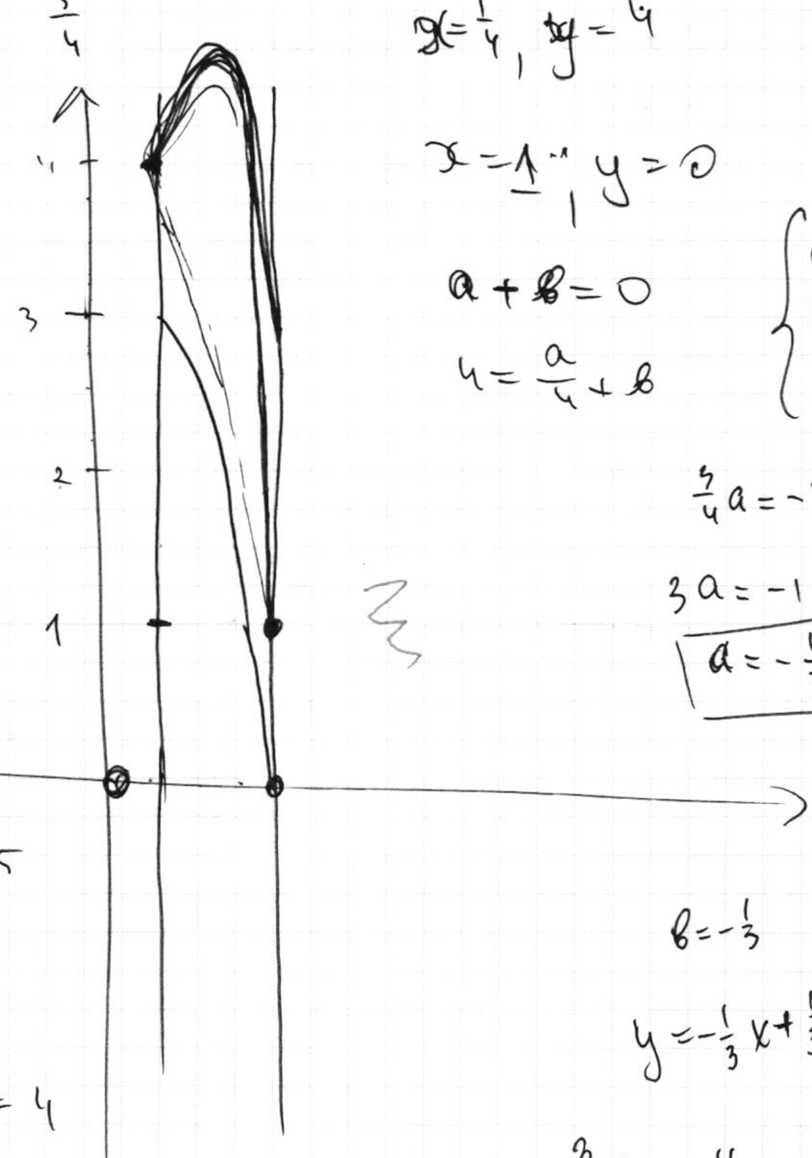
$\frac{3}{4}a = -4$

$3a = -1$

$\boxed{a = -\frac{1}{3}}$

$16x(4x-5) + 1a = 4(4x-5)$

$64x^2$



$-\frac{16}{3}x + \frac{16}{3} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$b = -\frac{1}{3}$

$\frac{16}{3}x + \frac{4}{4x-5} = \frac{4}{3}$

$f(x)$

$y = -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$16x + \frac{12}{4x-5} = 4$

$\frac{3}{4}a = -4$

$y = -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$

$-\frac{4}{3} + \frac{16}{3} =$

$3a = -16$

$a = -\frac{16}{3}$

$y = 4 + \frac{4}{4x-5}$

~~$b = \frac{16}{3}$~~

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$128+$
$+208$

$\frac{(-32x^2+36x-3)(4x-5)}{4x-5} \geq \frac{16x-16}{4x-5}$ $\frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}$

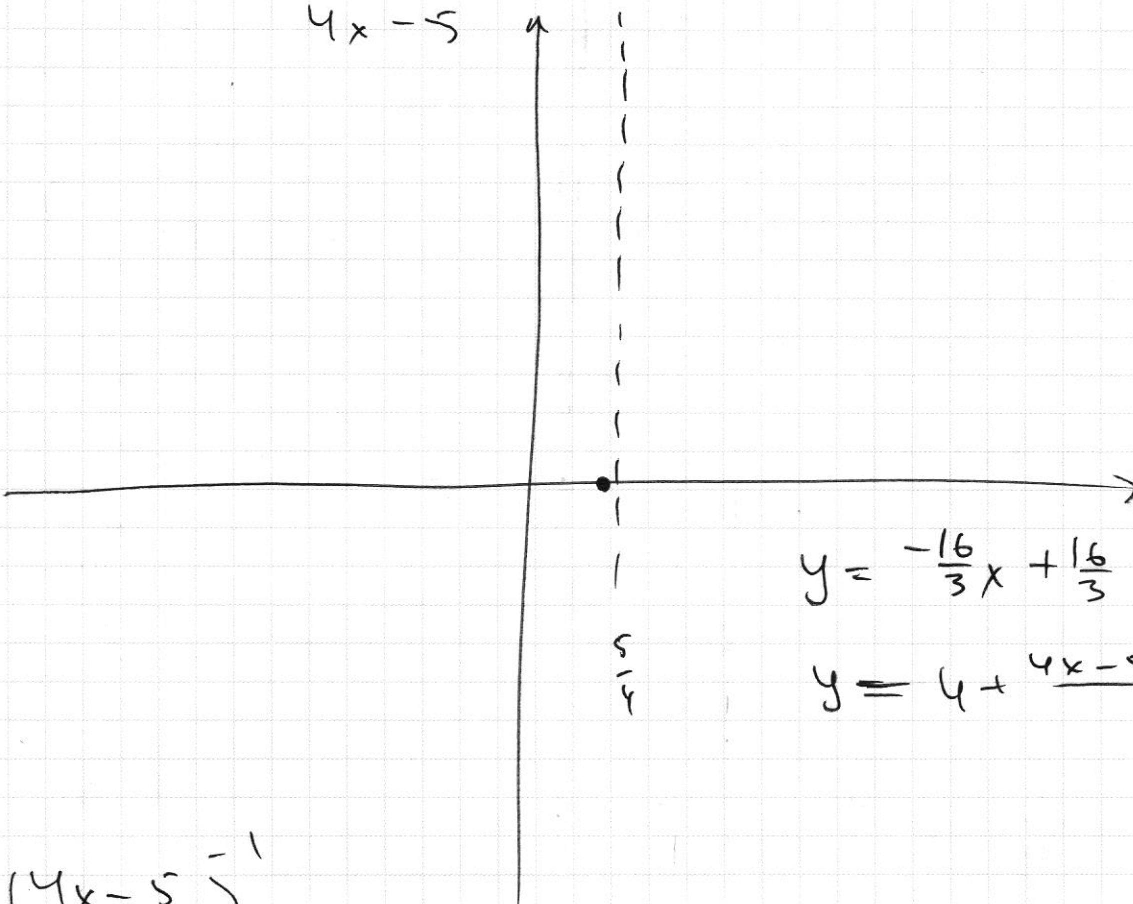
$$\frac{-128x^3+160x^2+144x^2-180x-12x+15-16x+16}{4x-5} \geq 0$$

$4+\frac{4}{-1}$

$$\frac{-128x^3+304x^2-208x+31}{4x-5} \geq 0$$

$\frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} =$

$=$



$y = -\frac{16}{3}x + \frac{16}{3}$

$y = 4 + \frac{4x-5}{}$

$(4x-5)^{-1}$

$f'(x) = \left(4+\frac{4}{4x-5}\right)' = -4 \cdot \frac{}{\sqrt{4x-5}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_2 t}\geqslant 0$

$t+t^{\log_3 4}-\cancel{t}^{\log_3 5}\geqslant 0$

$3^{t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}}\geqslant \cancel{0}\ 1$

3^t

$tg\,\alpha$ $\boxed{\cos\alpha>0}$ α

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta=$

$t+t^{\log_3 4}\geqslant t^{\log_3 5}$

$3^{t+t^{\log_3 4}}\geqslant 3^{t^{\log_3 5}}$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geqslant 0$

$t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}\geqslant 0$

$f(t)=t+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}$

$f'(t)=1+\log_3 4\cdot t^{\log_3 4-1}-$

$-\log_3 5\cdot t^{\log_3 5-1}$

$1+\log_3 4\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}}-\cancel{\log_3 5}$ lo

$1+\log_3 4\cdot t$

$f'(t)=1+\log_3 4\, t^{\log_3\frac{4}{3}}-\log_3 5\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}}$

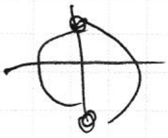
$1+\log_3 4\cdot t^{\log_3\frac{4}{3}}=\log_3 5\cdot t^{\log_3\frac{5}{3}}$

~~sin(2α-~~

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha)+\\ +\sin(2\alpha+4\beta)=-\frac{2}{5}\end{cases}$

$tg\,\alpha-?$



$\cancel{2}$ ~~$\sin(2\alpha+2\beta)+2\beta)=-\frac{2}{5}$~~

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\sin(2\beta)\cdot\cos($~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=$

$=2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right)=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$

$-2\cdot\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=-\frac{2}{5}$; $\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos 2\beta=\frac{1}{5}$; $\cos 2\beta=\frac{\sqrt5}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

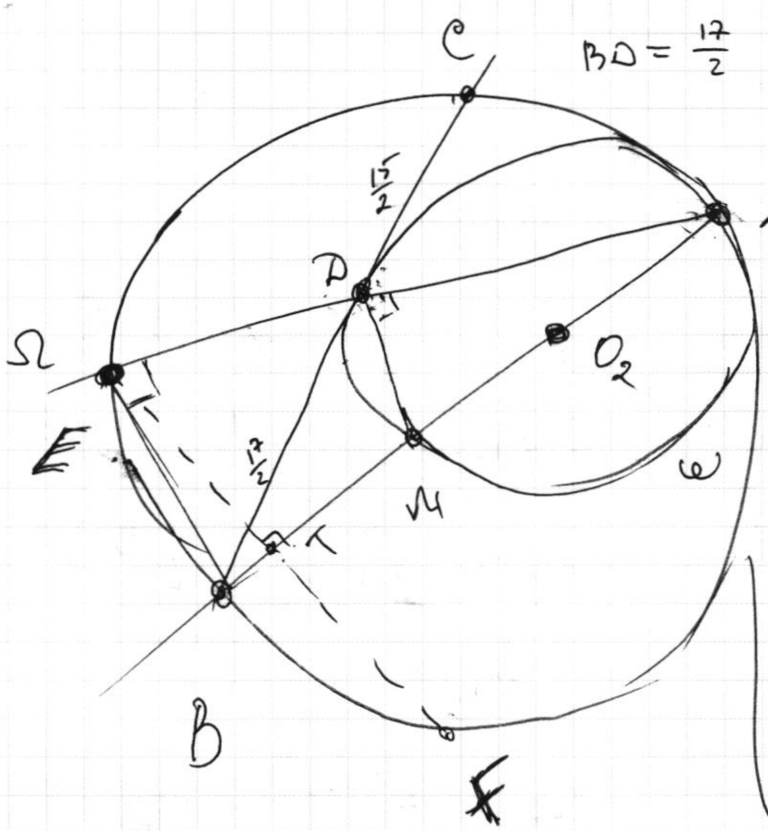
$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$R_1, R_2 - ?$

$\angle AFE - ?$

$S_{\triangle AEF} - ?$



$$BM \cdot (2R_2 + BM) = \left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$f(ab) = f(a) + f(b)$$

$$\frac{AD}{AT} = \frac{AM}{AE} = \frac{DM}{TE}$$

$$\frac{AD}{AE} = \frac{2R_2}{(2R_2 + BM)} = \frac{DM}{BE}$$

$2R$

$$CD \cdot BD = ED \cdot AD = \frac{17 \cdot 15}{4}$$

$$AD \cdot DE = \frac{15 \cdot 17}{4}; \quad \cancel{\frac{AD}{DE}} \Rightarrow \frac{AD}{AD + DE} = \frac{\cancel{AM}\, 2R_2}{2R_2 + BM}$$

$$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$$

$$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$$3^{\frac{1}{2}} + 3^{\frac{1}{2}\cdot\log_3 4} - 3^{\frac{1}{2}\cdot\log_3 5} \geq 0$$

$$\sqrt{3} + 3^{\log_3 2} - 3^{\log_3 \sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + \operatorname{arctg} 2) =$$

$2R_1$

$$\sqrt{3} + 2 - \sqrt{5}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha \cdot \underbrace{\cos 2\beta}_{\frac{\sqrt{5}}{5}} + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$$

$$\sqrt{5} \cdot \sin(2\alpha + \operatorname{arctg} 2) = 1$$

$$\frac{\sqrt{5}}{5}\sin 2\alpha +$$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

$\log_3\left(t+t^{\log_3 4}\right) 7,$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{(1)\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt5}}$

(1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$D = 100+4$

$x^2-10x-1=0$

$x^2=10x+1$

$\sin((2\alpha+\beta)+(\beta)) + \sin((2\alpha+\beta)-\beta) = \sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta + \cancel{\sin\beta\cdot\cos(2\alpha+\beta)} +$

$+\sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta - \cancel{\cos(2\alpha+\beta)\cdot\sin\beta} = 2\sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta$

$\boxed{2\sin(2\alpha+\beta)\cdot\cos\beta = -\frac{4}{5}}$

$\log_3 4 - \log$

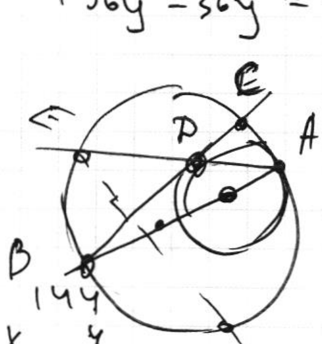
$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = (\sin(2\alpha+2\beta))\cdot\cos(2\beta) + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) +$

$+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$ $\quad t^2$

$x^2-12x+36y^2-36y=45$

(2) $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$\frac{3+4-5}{7}$



$\begin{array}{r} 144 \\ \times\ 4 \\ \hline 576 \end{array}$

$x^2+144y^2-24xy = 2xy-12y-x+6$

$x^2+144y^2-26xy+12y+x-6=0$

$x^2+x(1-26y)+144y^2+12y-6=0$

$D = (1-26y)^2-4\cdot(144y^2+12y-6) = 1+\cancel{676y^2}-52y-\cancel{576y^2}-48y+24=$

$=100y^2-100y+25 = 25(4y^2-4y+1)$

$\frac{26y-1+5(2y-1)}{2} = \frac{26y-1+10y-5}{2} = \frac{36y-6}{2} = 18y-3$

$\frac{26y-1-10y+5}{2} = \frac{16y+4}{2} = 8y+2$

$2\alpha+4\beta+2\alpha = x \quad 2$

$2\alpha+4\beta-2\alpha = y$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$36 - 24y - 6$

$\begin{array}{r} \times\, 12 \\ 12 \\ \hline 144 \end{array}$

$(x - 18y + 3)(x - (8y + 2)) = \cancel{x \ldots}\ (x - (18y - 3))(x - (8y+2)) =$

$= x^2 - x(8y+2) - x(18y-3) + (18y-3)(8y+2) =$

$= x^2 - x(\underline{8y} + 2 + \underline{18y} - 3) + (144y^2 + 12y - 6) =$

$= x^2 + x(1 - 26y) + 144y^2 + 12y - 6$

$(20-2)^2 = 400 + 4 - 80$ $\quad \begin{array}{r} \times\, 18 \\ 6 \\ \hline 108 \end{array}$ $\quad \boxed{x = 8y + 2}$

$12 \cdot 18 = \begin{array}{r} \times\, 18 \\ 12 \\ \hline 36 \\ +\,18 \\ \hline 216 \end{array}$

$20y^2 - 20y - 13 = 0$

$a = 20 \quad k = -10 \quad c = -13$

$D = 100 + 20 \cdot 13 = 10 \cdot 10 + 10 \cdot 26 =$

$= 10(36) = (6\sqrt{10})^2$

$\begin{array}{r} +\,216 \\ 108 \\ \hline 324 \end{array} \quad \begin{array}{r} +\,96 \\ 36 \\ \hline 132 \end{array}$

$y_1 = \dfrac{10 \pm 6\sqrt{10}}{20} = \dfrac{5 \pm 3\sqrt{10}}{10} =$

$= 0{,}5 \pm 0{,}3\sqrt{10}$

$1 - \dfrac{5}{25} = \dfrac{20}{25}$ $\quad \dfrac{4}{5}$ $\quad \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$30 - 27 + 6$

$6 + 2{,}4\sqrt{10} - 12(0{,}5 + 0{,}3\sqrt{10}) =$

$= 6 + 2{,}4\sqrt{10} - 6$

$x = 8y + 2$

$\dfrac{12 \cdot 3}{10}$ $\quad \begin{array}{r} \times\, 12 \\ 0{,}3 \\ \hline 3{,}6 \end{array}$

$\dfrac{\sqrt{5}}{5} \sin 2\ldots +$

$6 - 2{,}4\sqrt{10} - 12(0{,}5 - 0{,}3\sqrt{10}) =$

$= \cancel{6} - 2{,}4\sqrt{10} - \cancel{6} + 3{,}6\sqrt{10}$

$\cancel{12}\ \boxed{1{,}2\sqrt{10}} =$ $\quad \sqrt{1{,}44 \cdot 10}$

$\sin = \pm\sqrt{1 - \dfrac{5}{25}} = \pm\sqrt{\dfrac{20}{25}} = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$2(6 - 2{,}4\sqrt{10})(0{,}5 - 0{,}3\sqrt{10}) - 12 \cdot (0{,}5 - 0{,}3\sqrt{10}) - 6 + 2{,}4\sqrt{10} + 6 =$

$= 2(3 - 3\sqrt{10} + 7{,}2) - 6 + 3{,}6\sqrt{10} - \cancel{6} + 2{,}4\sqrt{10} + \cancel{6} =$

$= \cancel{6} - 6\sqrt{10} + 14{,}4 - \cancel{6} + 3{,}6\sqrt{10} + 2{,}4\sqrt{10} = \sqrt{14{,}4} = 14 =$

$+ 2{,}4\sqrt{10} \cdot 0{,}3\sqrt{10} =$

$= 2{,}4 \cdot 3 =$

$-1{,}8\sqrt{10} - 1{,}2\sqrt{10}$