МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha \quad \pm \quad 4\cos^2\alpha \frac{4}{5} = 2 \qquad \cos$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha)\cos4\beta + \cos2\alpha\cdot\sin4\beta + \sin2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = \frac{4}{2}\, 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta$

$(x^2-12x+36) + (36y^2-36y+9) = 45+9+36$

$54 \quad 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90 \qquad 324+36$

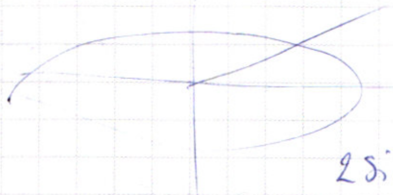
$\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} = \sqrt{\underbrace{(2y-1)}_{a}\underbrace{(x-6)}_{b}}$

$(x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90$

$-\frac{324}{18} \big| \frac{18}{18}$

$\cancel{144}$ 144

$\cos2\alpha = 1-2\sin^2\alpha$



$\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha$

$a = 2y-1$

$b = x-6$

$x = b+6$

$2y = a+1$

$$\begin{cases} b+\cancel{6} - 6a - \cancel{6} = \sqrt{ab} \\ a^2+9b^2 = 90 \end{cases}$$

$\cos2\alpha+\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\cancel{b^2 - 36a^2}$

$-\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = -\frac{2}{5} \qquad -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin2\alpha = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5}$

$a^2+2a+9b^2-12b = 90+2\sqrt{ab}$

$(a+1)^2 + (3b-2)^2 = 87+2\sqrt{ab}$

$g\left(\frac{9}{16}\right) = \frac{-2\cdot 81}{16} + \frac{36\cdot 9}{16} - 5$

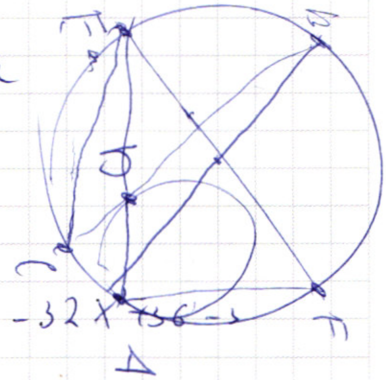
sin

$\frac{36\cdot 2\cdot 81}{16} - 5$

$\frac{3}{5} = 2\sin\alpha\cos\alpha$ $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_b a}$

$\frac{3}{10} = \sin\alpha\cos\alpha$ $-2(\cancel{16x}^2 + 18x$

$\frac{4x-16}{4}$



$a^4 + 36b^2 - 12ab = ab$ $\frac{16x-16}{4x-5} = -32x + 36 - 5$

$45b^2 - 13ab + 30 = 0$

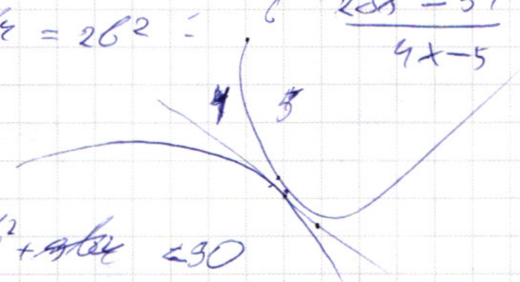
$a = \frac{45b^2+30}{13b} = 45\left(\frac{b^2+2}{b}\right) = 45\left(b + \frac{2}{b}\right)$

$\frac{16x-16+12x-15}{4x-5} =$

$\left(\frac{45^2}{13^2}\right) b^4 + 4b^2 + 4 + 9b^4 = 90b^2$

$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$\frac{45}{14}b^4 + \frac{45}{13^2}b^2 + \frac{4\cdot 45}{13^2} + 9b^4 = 2b^2 =$ $\frac{28x-31}{4x-5}$



$45 - 3\cdot 13$ $a > 6b$

$\frac{df}{dx} = -\frac{4}{(4x-5)^2}\cdot 4 = \frac{16}{(4x-5)^2}$ $45b^2 + \cancel{9b^4} < 30$

$b^2 < 2$ $-\frac{1}{4} + b = 3$

$b < \sqrt{2}$ $b = \frac{13}{4}$

$-64x + 36$

$4 + \frac{4}{4x-5} = -32x^2 + 36x - 5$ $\frac{4}{(4x-5)^2} = 9 - 16x$

$\frac{13}{4} - 1$

$\frac{4x-5}{4} = \frac{1}{-32x^2+36x-7}$ $\sqrt{\frac{30}{15}}$ $a = 2\sqrt{\frac{30}{16}}$ $a = 6b$

$\frac{1}{4} + b = 3$

> 6 $2\sqrt{\frac{90}{15}}$ $b = \frac{11}{4}$

$4\sqrt{\frac{30}{15}} = \sqrt{\ }$ $1 + \frac{11}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

Воспользуемся формулой $\sin\varphi+\sin\psi = 2\sin\left(\frac{\varphi+\psi}{2}\right)\cos\left(\frac{\varphi-\psi}{2}\right)$ для второго выражения, тогда.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{\text{подставим}}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\frac{2}{\sqrt5}\cos2\beta = \frac{2}{5}$; $\cos2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$, найдём $\sin2\beta$

$\sin2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\frac{2\sqrt5}{5}$

Раскроем синус суммы вх-ом выражени

$\cancel{\sin2\alpha\cos2\beta + \sin2\beta\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\frac{\sqrt5}{5}\sin2\alpha \pm \frac{2\sqrt5}{5}\cos2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}}$

$\cancel{\sin2\alpha \pm 2\cos2\alpha = -1}$

$\cancel{\cos2\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}$

$\cancel{2\cos2\alpha =}$

$\cancel{\pm2\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}}$

$\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) =$

$= \sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta + \sin2\beta\cos(2\alpha+2\beta)$

Заметим что

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, а $\cos2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

Значит $2\alpha+2\beta$ отличается от 2β

на $\frac{3\pi}{2}+2\pi k$ (сменилась триг. функция и знак)

$2\alpha = \frac{3\pi}{2}+2\pi k$ ~~либо $2\alpha = \pi-\left(\frac{3\pi}{2}+2\pi k\right)$~~ $k\in\mathbb{Z}$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) + \sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{5} \pm \frac{2\sqrt5}{5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin2\alpha = -\frac{2}{5} \Rightarrow \sin2\alpha = -\frac{1}{5} \pm \frac{4}{5} = \frac{-1\pm4}{5}$

продолжение на стр. 3

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=45+36+9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$, $b=2y-1$, тогда: $x=a+6$

$2y=b+1$

$$\begin{cases} a+6-6(b+1)=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$$ – возведём в квадрат: $\cancel{\begin{cases} a^2-12b+36b^2=ab \end{cases}}$

$$\cancel{\begin{cases} 2(a-3b)-a=\sqrt{ab} \\ a^2-6ab+9b^2=90-6ab \end{cases}} \qquad \cancel{\begin{cases} 2(a-3b)-a=\sqrt{ab} \\ (a-3b)^2=90-6ab \end{cases}}$$

$\cancel{\begin{cases} a^2-36b^2 \end{cases}}$ $a\neq 0$ и $b\neq 0$, при ~~этой подстановке~~

т.к. при подстановке этих выражений

выражения обращаются в равенство

для существования $\sqrt{ab}$

a и b должны быть ~~его~~ одинакового знака

$\cancel{\sqrt{a}-6\sqrt{b}=1}$

$\cancel{\sqrt{a}=1+6\sqrt{b}}$

$\cancel{a=(1+12\sqrt{b}+36b)}$

$\cancel{(a-3b)^2=90-6ab}$, тогда:

$\cancel{a^2-12ab+36b^2}=ab$

Если

$a>0$ и $b>0$

, то заметим, что при $a=9$ и $b=1$

продолжение на стр

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№1 продолжение

Рассмотрим случаи

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$2\alpha = \frac{3\pi}{2} + 2\pi k$

$\alpha = \frac{3\pi}{4} + \pi k, \ k \in Z$

$tg\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = \pm \frac{4}{5}$

$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$\cos^2\alpha = \frac{\pm\frac{4}{5}+1}{2}$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{10}} \\ \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \end{array}\right.$, тогда

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{3}{10}} \\ \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1}{10}} \\ \sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{9}{10}} \end{cases} \end{array}\right.$, тогда $tg\alpha = \pm 3$

$tg\alpha = \pm\frac{1}{3}$, но $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha \cdot \cos\alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} > 0 \Rightarrow tg\alpha > 0$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$

№2 Продолжение

$\begin{cases} 9-6 = \sqrt{9 \cdot 1} \\ 81 + 9 = 90 \end{cases}$ условие выполнено

$a - 6b = \sqrt{ab}$

$\sqrt{\frac{a}{b}} - 6\sqrt{\frac{b}{a}} = 1$

$\frac{a}{b} = t$

$t^2 - t - 6 = 0$

$t_1 = 3 - a = 9, \ b = 1$

$t_2 = -2$,

$\begin{cases} a = 9 \\ b = 1 \end{cases}$

~~$4b^2 + 9b^2 = 90$~~

~~$13b^2 = 90$~~

~~$b^2 = \frac{90}{13}$~~

$\begin{cases} x = 9 + 6 \\ 2y = 1 + 1 \end{cases}$; $\begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$

~~$\frac{a}{b} = 2$~~ $a = 2b$

$a^2 = 4b$

При $\frac{a}{b} = -2$ $\sqrt{ab} < 0$

такового не может

Ответ: $(15; 1)$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}=\frac{(16x-20)+20-16}{4x-5}=4+\frac{4}{4x-5}$ - гипербола

~~$-32x^2+36x-3$ пересекает ось OX при $x=$~~

$f(\frac{1}{4})=4+\frac{4}{1-5}=4-\frac{4}{4}=3$

$f(1)=4-4=0$ заметим, что на ~~промежутке~~ отрезке $[\frac{1}{4};1]$ $f(x)$ убывает

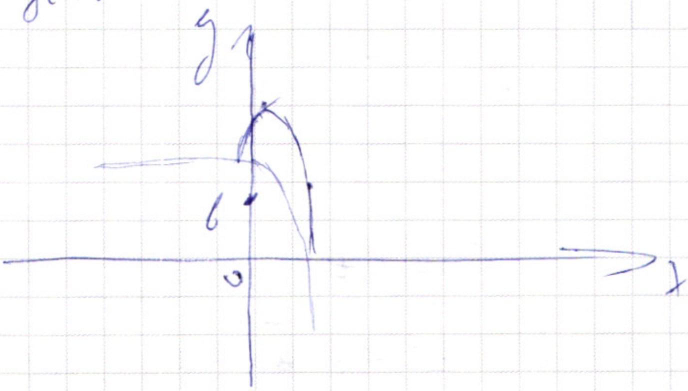
$g(x)=-32x^2+36x-3$, найдём координату x экстремума

$x=\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$ - точка максимума

$g(\frac{1}{4})=-\frac{32}{16}+\frac{36}{4}-3=-2+9-3=4$

$g(1)=-32+36-3=1$

Изобразим эту ситуацию схематично



Найдём a при которых зафиксируем b и рассмотрим всевозможные a (вращение прямой отн. точки

$\varphi = ax+b$; $\varphi(\frac{1}{4})\geq 3$ $\frac{a}{4}\geq 3-b$ $a\geq 12-b$

$\varphi(\frac{1}{4})\leq 4$ $\frac{a}{4}\leq 4-b$ $a\leq 16-b$

$\varphi(1)\geq 0$ $a\geq -b$

$\varphi(1)\leq 1$ $a\leq 1-b$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

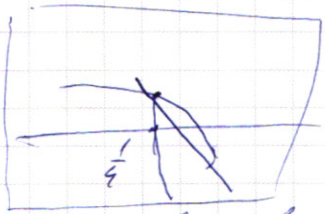
Страница №9

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Помимо этих условий

$\frac{d\varphi}{dx}\left(\frac{1}{4}\right) \geq \frac{df}{d(x)}\left(\frac{1}{4}\right)$ иначе



- находятся такие цифры

$\frac{d\varphi}{dx}(1) \geq \frac{dg}{dx}(1)$ иначе прямая будет выше правой

$\frac{df}{dx} = -\frac{16}{(4x-5)^2}$; $\frac{df}{dx}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{16}{(1-5)^2} = -1$

$\frac{dg}{dx} = -64x+36$; $\frac{dg}{dx}(1) = -28$

$a \geq 1$ изображая полученные огр. на числовой прямой

из $\begin{cases} a \geq -b \\ a \geq 12-b \end{cases}$ остается $a \geq 12-b$

из $\begin{cases} a \geq 12-b \\ a \leq 1-b \end{cases}$ остается $1-b$

$0-b$ $1-b$ $12-b$

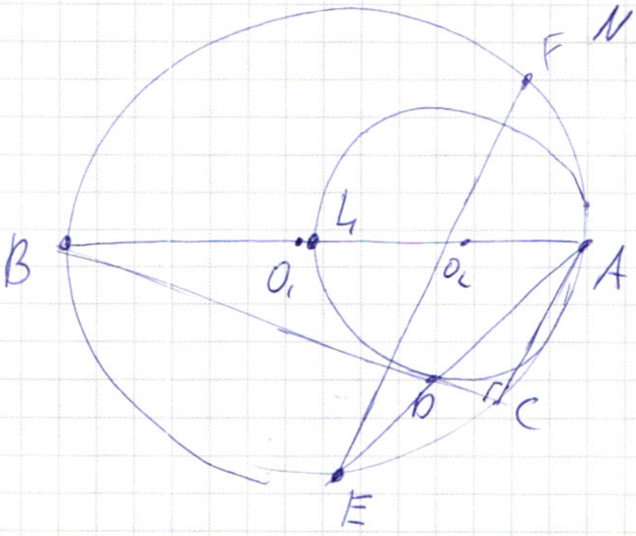
чтобы корни вообще были

$12-b \leq 1-b$

$12 \leq 1$, что неправда, следовательно

нет таких пары

Ответ: $\varnothing$



№5 Дано: $CD = \frac{15}{2}$; $BD = \frac{17}{2}$

Найти: R_ω, R_Ω, $\angle AEF$

1) Диаметры тих окр- лежат на одной прямой AB

По свойству кас. и сек.

2) $BD^2 = BL \cdot AB$; $AB = 2R_\Omega$; $BL = 2(R_\Omega - \cancel{2}R_\omega)$

3) $\angle BCA = 90°$, т.к. AB диаметр

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N 3

$(10x-x^2)+|10x-x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

Пусть $t=10x-x^2$

$t+|t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t>0$, т.к. $\log_3 t$ существует при $t>0$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t=3^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+3^{\log_3 t\cdot\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t}+4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

Пусть z $\log_3 t$

$3^z+4^z \geq 5^z$

$3^z+4^z \geq (3^2+4^2)^z$

$\frac{3^z+4^z}{(3^2+4^2)^z} \geq 1$

$f(x)=\frac{3^z+4^z}{5^z}$

$\frac{df}{dz}=\frac{(3^z\cdot\ln 3+4^z\cdot\ln 4)5^z-5^z\ln 5(3^z+4^z)}{5^{2z}}=$

$=\frac{(3\cdot5)^z\cdot\ln 3+(4\cdot5)^z\ln 4-(3\cdot5)^z\ln 5-(5\cdot4)^z\ln 5}{5^{2z}}=$

$=\frac{(3\cdot5)^z(\ln 3-\ln 5)+(4\cdot5)^z(\ln 4-\ln 5)}{5^{2z}}=\frac{15^z\ln\frac{3}{5}+20^z\ln\frac{4}{5}}{5^{2z}}$

$\ln\frac{3}{5}<0$, $\ln\frac{4}{5}<0$, $15^z, 20^z, 5^{2z}>0$, тогда в дроби сверху сумма отр. с низу пол. вся дробь отр., тогда $\frac{df}{dz}<0$, при любом z

Функция строго убывает, тогда

нам найти ситуацию равенств.

$\frac{3^z+4^z}{5^z}=1$, очевидно, что числа составляют Пифагорову тройку и при $z=2$ неравенство обр. в равенство.

$z \le 2$, тогда $\log_3 t \le 2$; $\log_3 x$ монотонно возрастает, тогда

$t \le 9$, тогда

$10x-x^2 \le 9$

$x^2-10x+9 \ge 0$

сумма коэф. равна $0 \Rightarrow x_1=1 \quad x_2=9$

$(x-1)(x-9)\ge 0$

0 1 9 10 , помня заодно, что

$10x-x^2>0$

$x(x-10)<0$

$x\in(0;1]\cup[9;10)$

Ответ: $x\in(0;1]\cup[9;10)$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ подставим в функцию числа

$2 \cdot p_x \cdot \frac{1}{p_x} = 2$

$f(2 \cdot p_x \cdot \frac{1}{p_x}) = \underset{0}{f(2)} + \underset{x}{f(p)} + f(\frac{1}{p_x}) = f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(p_x) + f(\frac{1}{p_x}) = 0$

$f(\frac{1}{p_x}) = -f(p_x)$, это справедливо для любых чисел, в том числе и для простых, тогда

$f(\frac{x}{y}) = f(x) - f(y)$, т.к. x и y натуральные, то их можно разложить на простые множители и такое выражение можно записать как

$f(p_{x1} \cdot p_{x2} \cdot p_{x3} \cdots p_{xn}) - f(p_{y1} \cdot p_{y2} \cdot p_{y3} \cdots p_{ym}) =$

$= (f(p_{x1}) + f(p_{x2}) + \ldots + f(p_{xn})) - (f(p_{y1}) + f(p_{y2}) + \ldots + f(p_{ym})) =$

$= [\frac{p_{x1}}{4}] + [\frac{p_{x2}}{4}] + \ldots + [\frac{p_{xn}}{4}] - ([\frac{p_{y1}}{4}] + [\frac{p_{y2}}{4}] + \ldots + [\frac{p_{ym}}{4}]$

Найдём простые числа которые не влияют на зн. ф-ции, то есть $f(p) = 0$ $[\frac{p}{4}] = 0$; $p < 4$, что числа 2 и 3 от их наличия в числе зн-ние ф-ции не зависит

~~Для того, что $f(x) < f(y)$~~ Найдём $f(x)$ для всех чисел от 2 до 25

$f(x) = 0$, при $x \in \{2, 3, 4; 6; 8; 9; 16; 12; 18; 24\}$ - A

$f(x) = 1$, при $x \in \{5, 7, 10, 14, 15, 20, 21,\}$ — B

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$f(x)=2$, при $x \in \{11, \cancel{13}, \cancel{14}\ 22, 25\}$ – C

$f(x)=3$, при $x \in \{13\}$ – D

$f(x)=4$, при $x \in \{17, 19\}$ – E

~~f(x5)~~

$f(x)=5$, при $x \in \{23\}$ F

Заметим, что $f(\frac{x}{y}) \geq 0$, эквивалентно $f(y) \geq f(x)$

Зная зн-ния ~~ф~~-ции в каждой из точек не сложно, найти все решения, единственной проблемой может быть запись этих решений для удобства каждое из мн-в обозначено буквой от A до E. Ответ:

1. $(x_1; 23)$, $x_1 \in A \cup B \cup C \cup D \cup E$;
2. $(x_2; y_2)$, $x_2 \in A \cup B \cup C \cup D$; $y_2 \in E$
3. $(x_3; 13)$, $x_3 \in A \cup B \cup C$
4. $(x_4; y_4)$, $x_4 \in A \cup B$; $y_4 \in C$
5. $(x_5; y_5)$, $x_5 \in A$; $y_5 \in B$