МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

Заметим, что $f(3)=0$. Пусть $k \in \mathbb{N}$

$f(3) = f(k \cdot \frac{3}{k}) = f(k) + f(\frac{3}{k}) = f(k) + f(3) + f(\frac{1}{k})$

Т.к $f(3)=0$, то $f(k)+f(\frac{1}{k})=0$. $f(k) = -f(\frac{1}{k})$

~~Рассмотрим~~ Найдём все значения ф-ии f в точках $2,\dots,25$ и $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\dots,\frac{1}{25}$

$f(2)=0$ $\quad f(\frac{1}{2})=0$
$f(3)=0$ $\quad f(\frac{1}{3})=0$
$f(4)=f(2)+f(2)=0$ $\quad f(\frac{1}{4})=0$
$f(5)=1$ $\quad f(\frac{1}{5})=-1$
$f(6)=f(2)+f(3)=0$ $\quad f(\frac{1}{6})=0$
$f(7)=1$ $\quad f(\frac{1}{7})=-1$
$f(8)=f(4)+f(2)=0$ $\quad f(\frac{1}{8})=0$
$f(9)=f(3)+f(3)=0$ $\quad f(\frac{1}{9})=0$
$f(10)=f(2)+f(5)=1$ $\quad f(\frac{1}{10})=-1$
$f(11)=2$ $\quad f(\frac{1}{11})=-2$
$f(12)=f(2)+f(6)=0$ $\quad f(\frac{1}{12})=0$
$f(13)=3$ $\quad f(\frac{1}{13})=-3$
$f(14)=f(2)+f(7)=1$ $\quad f(\frac{1}{14})=-1$
$f(15)=f(3)+f(5)=1$ $\quad f(\frac{1}{15})=-1$
$f(16)=f(2)+f(8)=0$ $\quad f(\frac{1}{16})=0$
$f(17)=4$ $\quad f(\frac{1}{17})=-4$
$f(18)=f(2)+f(9)=0$ $\quad f(\frac{1}{18})=0$

$f(19)=4$
$f(20)=f(2)+f(10)=1$
$f(21)=f(7)+f(3)=1$
$f(22)=f(2)+f(11)=2$
$f(23)=5$
$f(24)=f(2)+f(12)=0$
$f(25)=f(5)+f(5)=2$

~~Чисел 10~~ Среди целых чисел от 2 до 25 имеем
10 точек, в которых ф-ия принимает значение 0,
7 точек, в которых значение 1
3 точки, в которых значение 2
1 точка, значение в которой 3
2 точки, в которых значение 4
1 точка значение в которой 5

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№5 (продолжение)

~~$f(\frac{m}{n})$~~ $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0 \Leftrightarrow -f(\frac{1}{y}) > f(x)$

Пусть $f(\frac{1}{y}) = -1$, тогда $f(\frac{x}{y}) < 0 \Leftrightarrow f(x) = 0$

Ф-ия f принимает значение 0 в 10 точках, среди чисел $2, \ldots, 25$, и принимает значение -1 в 7 точках, среди чисел $\frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{25}$. Для каждого y, такого, что $f(\frac{1}{y}) = -1$ существует ровно 10 чисел x, таких, что $f(\frac{x}{y}) < 0$.

Аналогично, для всех y таких, что $f(\frac{1}{y}) = -2$, существует ровно 17 значений x таких, что $f(\frac{x}{y}) < 0$. Для y, что $f(\frac{1}{y}) = -3$, есть 20 значений x, $f(\frac{1}{y}) = -4$, 21 значение x, $f(\frac{1}{y}) = -5$, есть 23 значения x. (Все рассуждения проведены для $2 \le x \le 25$, $2 \le y \le 25$, $x, y \in \mathbb{N}$)

Итого, всего пар чисел удовлетворяющих условию

$7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 23 = 206$

Ответ: 206.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $x \in [\frac{1}{4};1]$

$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}} = f(x)$

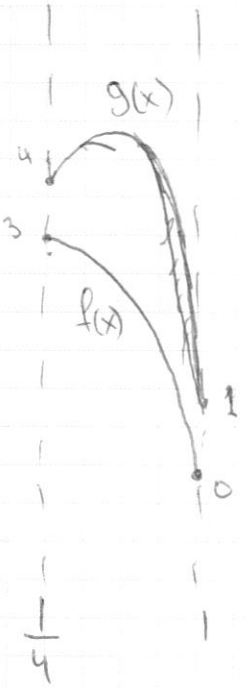
$-32x^2+36x-3 = g(x)$

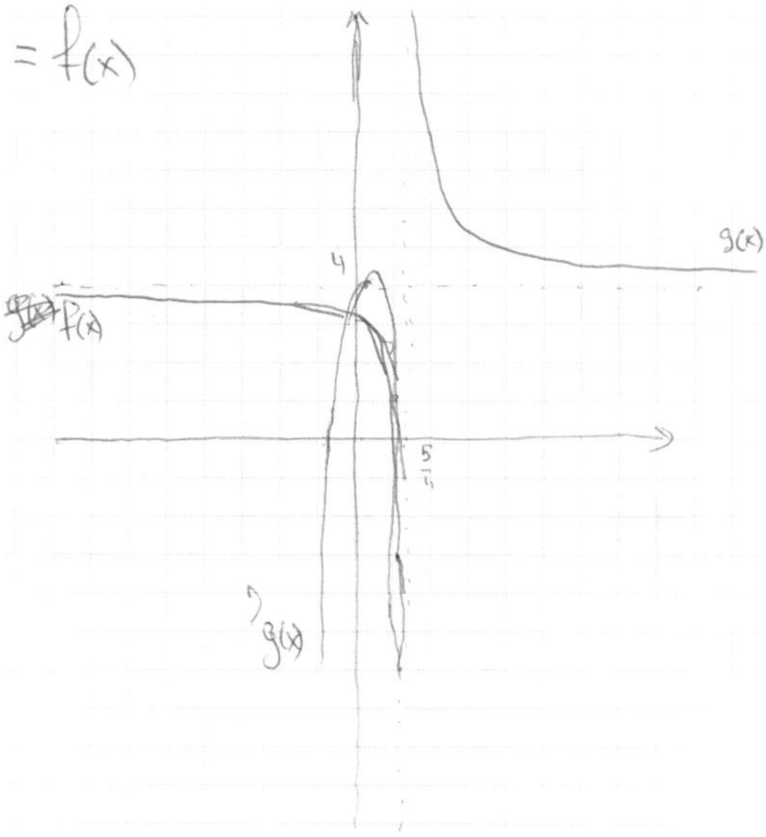
$f(\frac{1}{4}) = 3$

$f(1)=0$

$g(\frac{1}{4})=4$

$g(1)=1$





Построим прямую проходящую через точки $(\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$.

$y = ax+b$

$\begin{cases} 4 = \frac{a}{4}+b \\ 1 = a+b \end{cases}$

$3 = -\frac{3a}{4}$, $a=-4$

$1=-4+b$, $b=5$ $y=-4x+5$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолжение)

$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$

$-16x+16 = (4x-5)^2$

$-16x+16 = 16x^2-40x+25$

$16x^2-24x+9=0$

$(4x-3)^2=0$

$x = \frac{3}{4}$. $\frac{3}{4} \in [\frac{1}{4};1]$

Значит, прямая, проведённая через 2 „крайних" точки касается графика ф-ии $f(x)$, значит если мы проведём прямую через любую другую пару точек, то она пересечёт график ф-ии $f(x)$, и, т.к. $f(x)$ выпуклая вниз ф-ия при $x \in [\frac{1}{4};1]$, то это ~~в~~ будет значить, что ~~$\exists x_0 \frac{16x_0-16}{4x_0}$~~ $\exists x_0 \in [\frac{1}{4};1]$: $\frac{16x_0-16}{4x_0-5} > ax_0+b$.

Ответ: $a=-4$, $b=5$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

$$(2)\quad x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$$

$$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$$

$$2xy-12y-x+6=2y(x-6)-(x-6)=(x-6)(2y-1)$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

$x-6=u$

$2y-1=v$

$$\begin{cases} u-6v=\sqrt{vu} & (3) \\ u^2+9v^2=90 & (4) \end{cases}$$

$$(3)\quad u^2-12uv+36v^2=uv$$

$$u^2-13uv+36v^2=0$$

$$D=169v^2-144v^2=25v^2$$

$$u=\frac{13v\pm5v}{2}=4v;\ 9v$$

I. $u=9v$

$$(4)\quad 81v^2+9v^2=90$$

$$v=\pm1 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} v=1 \\ u=9 \end{cases} \\ \begin{cases} v=-1 \\ u=-9 \end{cases} \text{ не подходит, т.к. } u-6v\geq0 \end{array}\right.$$

№2 (продолжение)

$\begin{cases} 2y-1=1 \\ x-6=9 \end{cases}$

$\begin{cases} y=1 \\ x=15 \end{cases}$

II $u=4v$

(1) $16v^2+9v^2=90$

$25v^2=90$

$v^2=\frac{18}{5}$

$v=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}=\pm3\sqrt{\frac{2}{5}}$

$u=\pm12\sqrt{\frac{2}{5}}$

$\begin{cases} v=3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ u=12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

$u-6v=-6\sqrt{\frac{2}{5}}<0 \Rightarrow \begin{cases} u=12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ v=3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$ не подходит

$\begin{cases} v=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ u=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

$u-6v=6\sqrt{\frac{2}{5}}>0$

$\begin{cases} x-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \\ 2y-1=-3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases}$

$\begin{cases} x=-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6 \\ y=\frac{1}{2}(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1) \end{cases}$

Ответ: $(15;1)$; $(6-12\sqrt{\frac{2}{5}}; \frac{1}{2}(1-3\sqrt{\frac{2}{5}}))$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$10x-x^2>0 \Leftrightarrow x^2-10x<0$

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$

$10x-x^2=t$

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t} \geq 0$

$5^{\log_3 t}=5^{\frac{\log_5 t}{\log_5 3}}=5^{\log_5 t\cdot\log_3 5}=t^{\log_3 5}$

$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t \leq 0$

$t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t=f(t)$

$f'(t)=\log_3 5\, t^{\log_3\frac{5}{3}}-\log_3 4\, t^{\log_3\frac{4}{3}}-1$

Т.к. $f'(0)=-1$ и $\lim\limits_{t\to\infty} f'(t)=+\infty$, очевидно, что $\exists t_0: f'(t_0)=0$. Также такое t_0 единственное.

$f(t)$	$\searrow$	$f(t_0)$	$\nearrow$
$f'(t)$	$-$	0	$+$

Т.к. $t\geq 0$ и $f(0)=0$, то ур-ие $t^{\log_3 5}-t^{\log_3 4}-t=0$ имеет единственный корень. Заметим, что $t=9$ подходит.

$t\geq 9$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

№3 (продолжение)

$-x^2+10x \geq 9$

$-x^2+10x-9 \geq 0$

$x^2-10x+9 \leq 0$

$x \in [1; 9]$

Ответ: $x \in [1, 9]$

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{\cancel{25}5}$

$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{5}{25}} = \pm\sqrt{\frac{20}{25}} = \pm\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

~~sin(2α+4β)+ sin2α = sin2α cos4β + sin~~

$\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha = x$

$x\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}+\frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$x+2\sqrt{1-x^2} = -1$

$2\sqrt{1-x^2} = -1-x$

$4x^2-8x+4 = x^2+2x+1$

$3x^2-10x+3=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 (продолжение)

$3x^2-10x+3=0$

$D=100-36=64$

$x=\frac{10\pm 8}{6}=\frac{1}{3};3$ $\quad x\in[-1;1]$

$x=\frac{1}{3}$

$\sin 2\alpha=\frac{1}{3}$

$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\frac{8}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$

$\operatorname{tg} 2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

$\frac{1}{2\sqrt{2}}\operatorname{tg}^2\alpha-\frac{1}{2\sqrt{2}}+2\operatorname{tg}\alpha=0$

$D=4+4\cdot\frac{1}{8}=4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\left(-2\pm\frac{3}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2}}{\cancel{2}}=-2\sqrt{2}\pm 3$

$x\cdot\frac{\sqrt{5}}{5}-\frac{2\sqrt{5}}{5}\sqrt{1-x^2}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \sin 2\beta=-\frac{2\sqrt{5}}{5}$

$x+1=\overset{3.}{2}\sqrt{1-x^2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin\alpha + \sin\beta$

$\sin 30 + \sin 90 = \frac{3}{2}$

$2\sin 60 \cdot \cos 30$ $\quad$ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\sin 45 + \sin 45 = \sqrt{2}$

$2\sin 45 \cdot \cos 0 = \sqrt{2}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

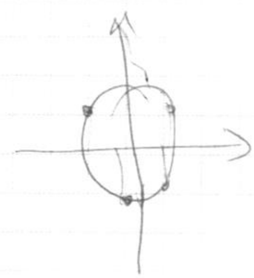
$\cos(\alpha+\beta) = \cancel{\sin\alpha\sin\beta - \cos\alpha\cos\beta} = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$ $\quad$ $tg(\alpha+\beta) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\quad$ $tg\, 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\quad$ $C = \frac{2x}{1-x^2}$



$\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5} = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad$ $(1-x^2)C = 2x$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha = \cos^2\alpha + \sin^2\alpha - 2\sin^2\alpha$

$\cos 2\beta = 1 - 2\sin^2\beta = 2\cos^2\beta - 1 = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$1 - 2\sin^2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin^2\beta = 1 - \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin^2\beta = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}$ $\quad$ $\cos^2\beta = 1 - \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}-\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}$

$\sin\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{5}}}$

$\cos\beta = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{5}+1}{2\sqrt{5}}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)}$ $\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\cancel{=2\sin(\alpha+\beta)}$

$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha tg\beta}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin\alpha\cos\alpha\cdot(1-\sin^2\beta)+2\sin\beta\cos\beta\cdot(1-\sin^2\alpha)$

$c\cdot\sin\alpha\cos\alpha+d\cdot(1-\sin^2\alpha)=k$

$c\sin\alpha\cos\alpha+d-d\sin^2\alpha$

$c\sin\alpha\cos\alpha-d\sin^2\alpha$

$\sin\alpha(c\cos\alpha-d\sin\alpha)$

$|t|^{\log_3 4}\geq t+5^{\log_3(-t)}$

$\log_3(-t)=\frac{\log_5(-t)}{\log_5 3}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$ $:\cos2\beta\cdot\cos2\alpha$

$\log_b a=\frac{1}{\log_a b}$

$\frac{\sin2\alpha}{\cos2\alpha}+\frac{\sin2\beta}{\cos2\beta}=-\frac{1}{\sqrt5\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha}$

$|t|^{\log_3 4}\geq t+5^{\log_5(-t)\cdot\log_3 5}$

$\cos(2\alpha+2\beta)=\cos2\alpha\cdot\cos2\beta-\sin2\alpha\cdot\sin2\beta$ $|t|^{\log_3 4}\geq t+(-t)^{\log_3 5}$

$\begin{cases}x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}\\x^2+36y^2-12x-36y=45\end{cases}$

$-t>0$

$t<0$

$x(2y-1)-6(2y-1)=(x-6)(2y-1)$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2+12y+x+6=0$

$(x-12y)^2=(x-6)(2y-1)$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$x(x-12)+36y(y-1)=45$

$2x^2+180y^2-24xy-12x-36y=45+(x-6)(2y-1)$

$24xy+12x-36y=12x(24y+1)-36y$

$\cancel{12(2xy+x-3y)}$

$\cancel{2xy+x-3y=x(2y}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(k) = -f(\frac{1}{k})$

$f(2)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$

$f(3)=0 \quad f(\frac{1}{3})=0$

$f(4)=f(2)+f(2)=0 \quad f(\frac{1}{4})=0$

$f(5)=1 \quad f(\frac{1}{5})=-1$

$f(6)=0$

$f(7)=1 \quad f(\frac{1}{7})=-1$

$f(8)=0$

$f(9)=0$

$f(10)=f(5)+f(2)=1 \quad f(\frac{1}{10})=-1$

$f(11)=2 \quad f(\frac{1}{11})=-2$

$f(12)=0$

$\boxed{f(13)=3} \quad f(\frac{1}{13})=-3$

$f(14)=1 \quad f(\frac{1}{14})=-1$

$f(15)=1 \quad f(\frac{1}{15})=-1$

$f(16)=0$

$f(17)=4 \quad f(\frac{1}{17})=-4$

$f(18)=0$

$f(19)=4 \quad f(\frac{1}{19})=-4$

$f(20)=1 \quad f(\frac{1}{20})=-1$

$f(21)=1 \quad f(\frac{1}{21})=-1$

$f(22)=2 \quad f(\frac{1}{22})=-2$

$f(23)=5 \quad f(\frac{1}{23})=-5$

$f(24)=0$

$f(25)=2 \quad f(\frac{1}{25})=-2$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$\Rightarrow$

$f(\frac{1}{y}) < -f(x)$ 150

$f(\frac{2}{5}) = f(\frac{2}{\cancel{2}}) + f(\frac{1}{5}) = -1$

$7 \cdot 9 = 63$

$3\cancel{2} \cdot 13 = \cancel{26}$ 36 95

110

$1 \cdot 15 = 15$ ~~160~~ 173

56

$2 \cdot 16 = 32$

$1 \cdot 24 = 24$

$70+51+20+42+23$

$121+63\cancel{3}2+23$

$183+23$

206

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10-x^2)}$

$|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2-10x+5^{\log_3(-(x^2-10x))}$

$|t|^{\log_3 4} \geq t+5^{\log_3(-t)}$

$\log_3(-t)=\dfrac{\log_5(-t)}{\log_5 3}$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=2f(1) \quad f(1)=0$

$f(p)$

$f(1/p)=f(1)+f(1/p)$

$f(x/y)=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$f(y/x)=f(y)+f(\frac{1}{x})$

$f(\frac{1}{ab})=f(\frac{1}{a})+f(\frac{1}{b})$

$\cancel{f(3)=f(10\cdot\frac{3}{10})}$

$f(3)=[3/4]=0$

$f(2)=0$

$f(3)=f(4\cdot\frac{3}{4})=f(4)+f(\frac{3}{4})=f(4)+f(3)+f(\frac{1}{4})$

$f(\frac{3}{4})=f(3)+f(\frac{1}{4})$

$0=f(3)=1+0+f(\frac{1}{4})$

$f(4)=-f(\frac{1}{4}) \quad \overset{\|}{-1}$

$0=f(3)=f(k\cdot\frac{3}{k})=f(k)+f(\frac{3}{k})=$

$=f(k)+f(3)+f(\frac{1}{k})$

$0=f(k)+f(\frac{1}{k}) \quad f(k)=-f(\frac{1}{k})$

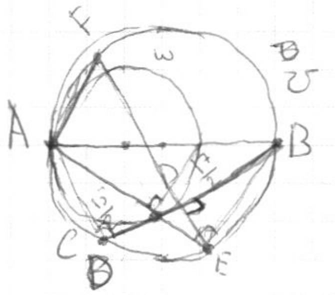
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} = -32x^2+36x-3$



$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = D \cdot (1) - d)$

$\cancel{(1,1) \in ax+b}$

$\left(\frac{1}{4}, 4\right)$ $(1,1)$

$\cancel{y = kx+b}$

$\cancel{4 = \frac{k}{4}+b}$

$\cancel{1 = k+b}$

$\cancel{-\frac{3}{4}k = 3}$

$\cancel{k = -\frac{1}{4}}$

$\cancel{1 = -\frac{1}{4}+\frac{5}{4}}$

$\cancel{k = -\frac{1}{4} \quad b = \frac{5}{4}}$

$\cancel{y = -\frac{1}{4}x+\frac{5}{4}}$

$\cancel{4 = -\frac{1}{16}}$

$y = kx+b$

$1 = k \cdot 1 + b$

$4 = \frac{1}{4} \cdot k + b$

$-3 = k - \frac{1}{4}k$

$-3 = \frac{3}{4}k$

$-1 = \frac{1}{4}k$

$-4 = k$

$1 = -4+b$

$b = 5$

$y = -4x+5$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$

$16x-16 = -(4x-5)^2$

$-16x+16 = 16x^2-40x+25$

$16x^2 \cancel{-56x} + 9$

$16x^2-24x+9 = (4x-3)^2$

$x = \frac{3}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

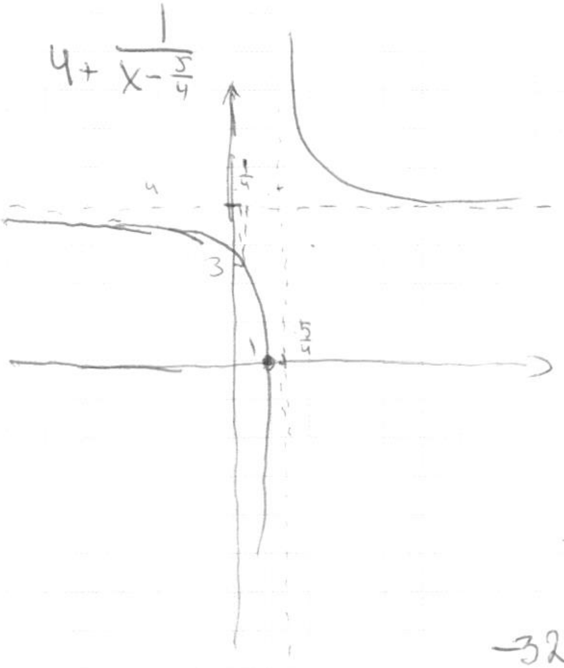
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le 32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le 32x^2+36x-3$

$4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}$



$4+\frac{1}{\frac{1}{4}-\frac{5}{4}}=3$

$4+\frac{1}{1-\frac{5}{4}}$

$=0$

$-32x^2+36x-3$

$\cancel{x_b=-\frac{72}{32}}$ $\quad x_b=+\frac{36}{64}=\frac{9}{16}$

$\cancel{x=\frac{1}{4} \quad 2+9-3=8}$ $\quad -2+9-3=4$

$\cancel{x=1} \quad 65$ $\quad -32+36-3=1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$|t|^{\log_3 4} \geq t + (-t)^{\log_3 5}$

$-t = v$

$|-v|^{\log_3 4} \geq -v + v^{\log_3 5}$

$v^{\log_3 5} - v^{\log_3 4} - v \leq 0$

$\cancel{\log_3 5\, v^{\log_3 \frac{5}{3}} - \log_3 4\, v^{\log_3 \frac{4}{3}}}$

$v^{\log_3 5} - v^{\log_3 4} - v \leq 0$

$x^{\log_3 5} - x^{\log_3 4} - x \leq 0$

$x^{\log_3 5} - x^{\log_3 4} - x^{\log_3 3} \leq 0$

$x(x^{\log_3 \frac{5}{3}} - x^{\log_3 \frac{4}{3}} - 1) \leq 0$

$x^{\log_3 \frac{5}{3}} - x^{\log_3 \frac{4}{3}} - 1 \leq 0$

$\cancel{\log_3 \frac{5}{3}}\, x^{\log_3 \frac{5}{3}} - x^{\log_3 \frac{4}{3}} \leq 1$

$x^2 - 10x \leq 0$

$\cancel{t = 10(10x - x^2)}$

$\cancel{\log_3 5\, x^{\log_3 \frac{5}{3}} - \log_3 4\, x^{\log_3 \frac{4}{3}} - 1}$

$\cancel{\log_3 5\, x^{\log_3 \frac{5}{3}}}$

$\cancel{5 - 4 - 3}$ 3^2 $25 - 16 - 9 = 0$

$\log_3 5\, x^{\log_3 \frac{5}{3}} - \log_3 4\, x^{\log_3 \frac{4}{3}} - 1 = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=90$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

$\left(6;\frac{1}{2}\right)$ $r=3\sqrt{10}$

$2y(x-6)-x+6$

$(x-6)(2y-1)$

$x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)}$

$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90$

$x-6=u$

$2y-1=v$

$36\cdot4=144$

$\begin{cases}u-6v=\sqrt{uv}\\u^2+9v^2=90\end{cases}$ $\begin{cases}u^2-12uv+36v^2=uv\\u^2+9v^2=90\end{cases}$

$90-13uv+25v^2=0$

$25v^2-13uv+90=0$

$D=169u^2-9000$

$v=\frac{13u\pm\sqrt{169u^2-9000}}{50}$

$u^2-13uv+36v^2=0$

$D=169v^2-144v^2=25v^2$

$u=\frac{13v\pm5v}{2}$

$\left[\begin{array}{l}u=9v\\u=4v\end{array}\right.$

$u=9v$

$81v^2+9v^2=90$

$\left[\begin{array}{l}v=1\\u=9\end{array}\right.$ X

$\left[\begin{array}{l}v=-1\\u=-9\end{array}\right.$ Y

$u=4v$

$16v^2+9v^2=90$

$25v^2=90$

$v^2=\frac{90}{25}=\frac{18}{5}$ $v=\pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$ $u=\pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)