МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} (2) \end{cases}$ $E(tg\,\alpha)$ - ?

$(2) \Leftrightarrow \cancel{2\sin} \; 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \frac{\cancel{-2}}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = \cancel{-}\frac{\overset{4}{\cancel{8}}}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16\cdot 17}{289}} =$

$= \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$(1) \Rightarrow \cancel{\sin(2(\alpha+\beta))}$ $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta$

$+ \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4\cancel{\sqrt{17}}}{\cancel{\sqrt{17}}} + \frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{17}}}$

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = \cancel{-\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$\cos\alpha(\overset{4}{\cancel{8}}\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \text{ - при этом знач } tg\,\alpha \text{ не определен} \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{array}\right.$

$\Downarrow$

При $4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \;/ : \cos\alpha \neq 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow 4\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

Рассмотрим следствие из (2):

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cancel{2}\sin 2\beta \cos 2\alpha)\cdot \cos 2\beta = \frac{-8}{17}$

$\Rightarrow 2\left(\sin 2\alpha \cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} + \cancel{5}\frac{\cos 2\alpha\sqrt{17}}{\cancel{\sqrt{17}}\,17}\right)\cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{-8}{17}$

$\frac{2\sqrt{17}}{17}(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha)\cdot \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{-8}{17}$

$\cancel{\frac{8\cdot 17}{17^2}}(4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha) = -\cancel{\frac{8}{17}}$

$\cancel{17}\ \cancel{4(}\ 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \cancel{\sin^2\alpha} = \cancel{-\sin^2\alpha} - \cos^2\alpha$

$8\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha = 0 \ /\ 2\cos\alpha$

$4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \ /\ \cos\alpha$

$4\,tg\,\alpha + 1 = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

Р(м (2) $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \cos 4\beta + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = \frac{-8}{17}$

Зам., что $\cos 4\beta = \cos 2\cdot 2\beta = 2\cos^2 2\beta - 1$

$= 2\cdot \frac{16\cdot 17}{17^2} = \frac{32}{17} - 1 = \frac{15}{17}$

$\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta = 2\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1 Тогда: $\frac{15}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\Rightarrow \cancel{15\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha + \sin 2\alpha}$

$\frac{32}{17}\sin 2\alpha + \frac{8}{17}\cos 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad |\cdot 17$

$\cancel{\frac{64}{17}\sin\alpha\cos\alpha +}$

$32\sin 2\alpha + 8\cos 2\alpha = -8$

$\Rightarrow 64\sin\alpha\cos\alpha + 8\cos^2\alpha - \cancel{8\sin^2\alpha}$

$= -\cancel{8\sin^2\alpha} - 8\cos^2\alpha$

$64\sin\alpha\cos\alpha + 16\cos^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0 \quad |: \cos^2\alpha \neq 0$

$\Rightarrow \cancel{16\sin\alpha + 1 = 0}$

$4 \quad \cancel{\sin\alpha = -1}$

$4\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$\Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$ (При условии что $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

Теперь с $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Из (1) =>

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + -\frac{1}{\sqrt{17}} \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad | \cdot 17$

$4 \sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$8 \sin\alpha \cos\alpha - \cancel{\cos^2\alpha} + \sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cancel{\cos^2\alpha}$

$8 \sin\alpha \cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$\Leftrightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \Rightarrow \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ 8\cos\alpha + 2\sin\alpha = 0 \Rightarrow \text{т.к. } \cos\alpha \neq 0 \end{array}\right.$

$\cancel{8\operatorname{tg}\alpha +} \ 2\operatorname{tg}\alpha + 8 = 0$

$\operatorname{tg}\alpha = -4$

Аналогично $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt{17}}$ эти же значения мы получим, если подст во второе выраж. =>

$\operatorname{tg}\alpha = -4$; $\operatorname{tg}\alpha = 0$; $\operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$. Причём т.к. значений не может быть больше трёх по все они подходят, други значен не может быть.

Ответ: -4; $-\frac{1}{4}$; 0.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

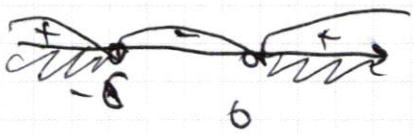
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

*ОДЗ:

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$



$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

Положим $t:=x^2+6x>0$ *

Тогда ~~уравнение~~ неравенство примет вид:

$3^{\log_4(t)}+t\geq|t|^{\log_4 5}$

Т.к. $t>0$ по ОДЗ $\Leftrightarrow 3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

На ОДЗ $\Leftrightarrow 3^{\log_3 t\cdot\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}\geq t^{\log_4 5}$

$\overset{*}{\Leftrightarrow} 3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t}\geq 5^{\log_4 t}$

Положим $y:=\log_4 t$.

$3^y+4^y\geq 5^y$ ~~При~~ Заметим, что следующее равенство единственно

и это $y=2$: $3^2+4^2=5^2$ (Т. Пифагора)

Действительно рассмотрим пример. график $f(y)=$

$F = 3^{y} + 4^{y} - 5^{y}$

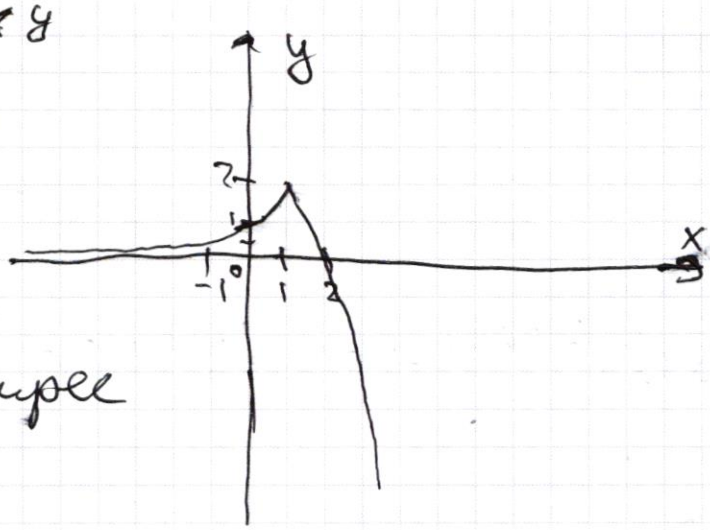
Понятно, что при $y < 0$

$3^y + 4^y$ рост более 5^y, т.к. 5^y ~~ро~~ убыв быстрее

$\Rightarrow$ при $y \le 2$

$F(y) \ge 0$

т.е $\log_4 t \le 2$



Выполним обр. замену:

$\log_4 x^2 + 6x \le 2\log_4 16$

$\Leftrightarrow$

$$\frac{x^2 + 6x - 16}{3} \le 0$$

$\Rightarrow x^2 + 6x - 16 \le 0$

$D = 36 + 64 = 100$

$$x_1 = \frac{-6 + 10}{2} = 2$$

$$x_2 = \frac{-6 - 10}{2} = -8$$

$\Rightarrow (x - 2)(x + 8) \le 0$

+ + x

-8 $\quad$ 2 (будучи *)

$\Rightarrow x \in [-8; 2]$, но пересечём с ОДЗ:

$\Rightarrow x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$. Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

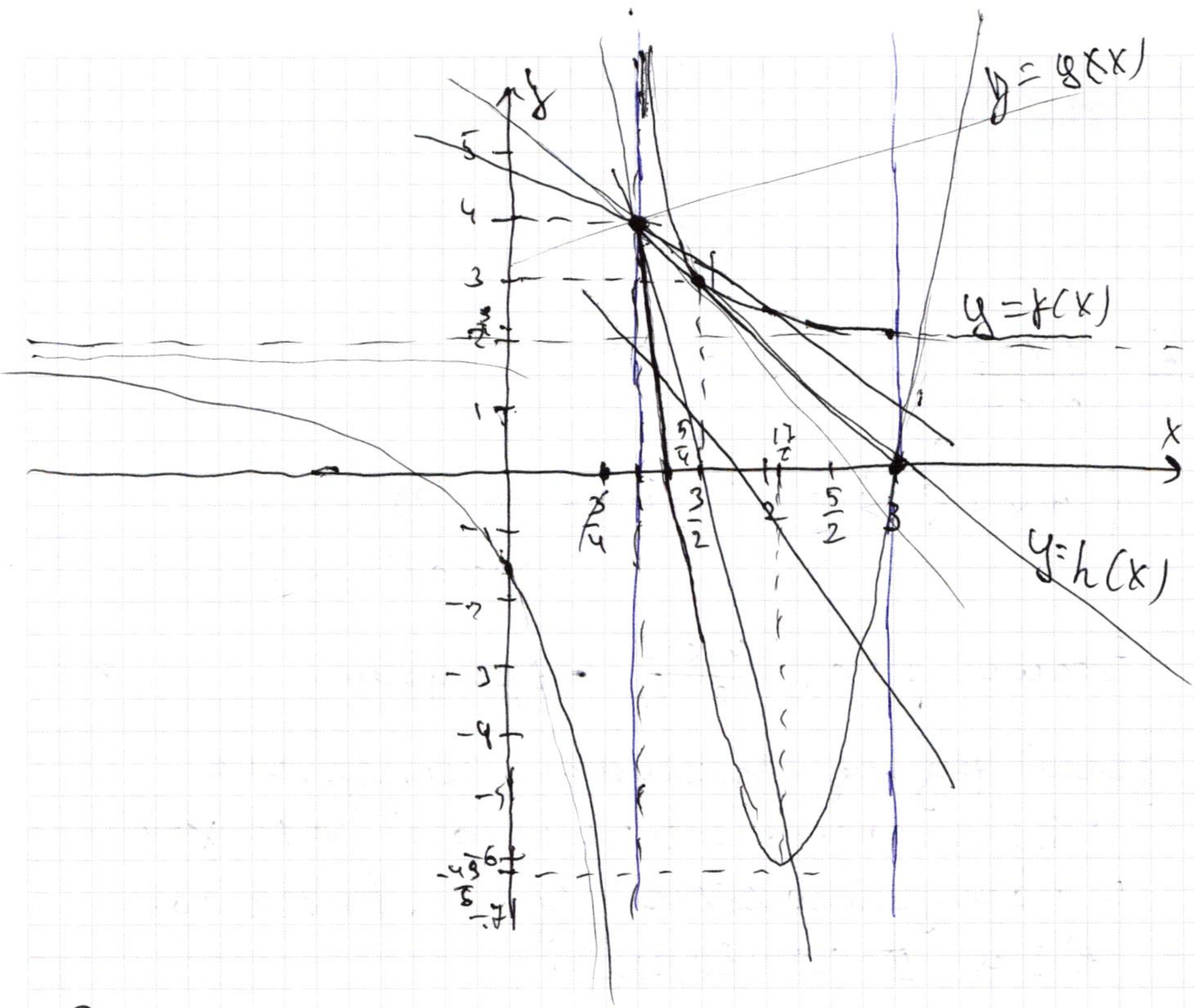
№6 $\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \quad (1) \\ ax+b \geq 8x^2-34x+30 \quad (2) \end{cases}$

$*x \in [1;3]$

Рассм. $f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$ - графиком данной функции является гипербола с вертикальной асимптотой ~~и~~ $x=1$ и горизонтальной $y=2$. Расположена в I и III четвертях.

Рассмотрим $g(x)=8x^2-34x+30$. Графиком функции является парабола с вершиной ~~в~~ $x_в=\frac{+34}{16}=\frac{17}{8}$, $y_в=-\frac{49}{8}$ ~~и~~, пересекает оси абсцисс в $x_1=3$ и $x_2=\frac{5}{4}$

Рассм. $h(x)=ax+b$ - линейная функция, задающую прямую с ~~уг~~ коэф. угл. накл. и $tg\alpha$, где α - угол накл., b - параметр сдвига по ординате. Построим примерный график функций на ~~в~~ ~~полуинтервале~~ интервале $[1;3]$



Заметим, что ~~на~~ $g(x)$ пересекает
$\cancel{y} = 1$ в $y = 4$ и $\cancel{x} = 3$ в $y = 0$.
~~Тогда под условие~~ Тогда под (2)
условие подойдёт прямая как раз
проходящая через точки $(1;4)$ и $(3;0)$
$\Rightarrow$ прямая $y = -2x + 6$. Теперь проверим
(1) условие: $\frac{4x-3}{2x-2} \geq -2x+6$

$\frac{4x-3+(2x-6)(2x-2)}{2x-2} \geq 0$ $\quad \frac{4\cancel{x}-3+4x^2-\cancel{4x}-12x+12}{2x-2} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{4x^2-12x+9}{2x-2} \geq 0$ $\quad \frac{(2x-3)^2}{2x-2} \geq 0 \Rightarrow$ верно при $x \neq 1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 Таким образом если $a=-2$, $b=6$ условия выполняются. Рассмотрим что будет при $b>6$: тогда найдём промежуток на котором $h(x)>f(x)$. если $b<6$, то найдёт промежуток на котором $h(x)<g(x)$.
Если же будем менять a, то так найдутся промежутки когда не выполн (I) или (II) условие. Таким образом нам подойдёт лишь одна пара (a и b) $a=-2$, $b=6$.

Ответ: $(-2;6)$: $(a=-2;\ b=6)$.

~~№4 Тогда ТСОТ синусов~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№4 Т-ма синусов

$$\frac{CB}{\sin(-2\alpha)} = \sqrt{81} = 9$$

$$\Rightarrow 2\alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \angle FEA = 45^0$$

$\Rightarrow \triangle EAF$ – р/б. прямоуголь.

$$\Rightarrow S_{\triangle EAF} = \frac{\cancel{BEEA}^2}{2} = \frac{65}{2}$$

№4

Ответ: $R_\Omega = \frac{9}{2}$; $R_\omega = \frac{9}{4}$

$\angle FEA = 45^0$

$S_{\triangle EAF} = \frac{65}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

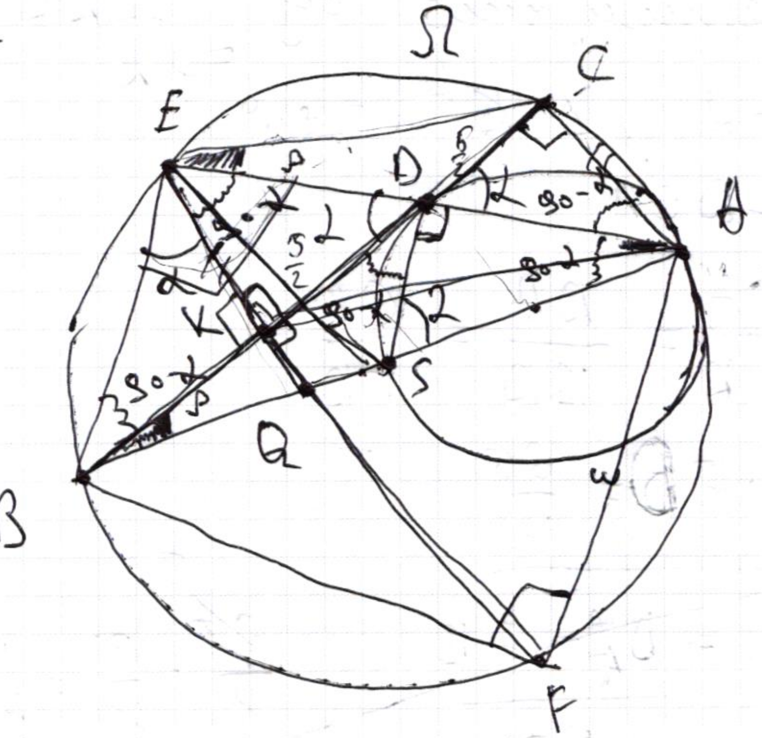
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$



Решение: SA - диаметр ω

1) Пусть $\angle CED = \beta = \angle CBA$, вписан на одну дугу

$\angle CDA = \angle DSA = \alpha$, как угл между кас. и хордой.

Тогда $\angle BFA = \angle DCA = 90^0 = \angle SDA$, т.к. опирается на диаметр

$\Rightarrow \angle BDS = \angle CAD = \angle DAS = 90 - \alpha$

$\Rightarrow$ AD - биссектриса.

$\Rightarrow$ По свойству биссектрисы

$\frac{CD}{BD} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{5}{2} \cdot \frac{2}{13} = \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13}$

Из подобия $\triangle ACD$ и $\triangle ADS$ =>

$$\frac{CD}{DS} = \frac{CA}{DA} = \frac{DA}{AS}$$

~~Acy~~ Тогда заменим, что из $EF \perp BC$ => т. K

=> $\angle EBC = 90 - \alpha$, $\angle BEA = 90°$

=> $\triangle BED \sim \triangle DCA$

=> $\cancel{\frac{CA}{ED}}$ $\frac{CA}{EB} = \frac{DA}{BD} = \frac{CD}{ED}$

$$DA \cdot EB = \frac{65}{4}$$

$$\cancel{CA = \frac{DA \cdot EB}{BD} = \frac{65}{4} \cdot \frac{2}{13} = \frac{5}{2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13} \quad AB = \frac{5}{13} \cdot \frac{2}{5} \quad AB = \frac{\frac{5}{2} \cdot 13}{5} = \frac{13}{2}}$$

$$\cancel{\Rightarrow R_\Omega = \frac{13}{4}}$$

Из $\parallel$ EB и DS => $\frac{DA}{ED} = \frac{AS}{BS}$, но заменим, что $ECAK$ – параллелограм, а значит

$$\frac{DA}{ED} = \frac{1}{1} \Rightarrow \frac{AS}{BS} = \frac{1}{1} \Rightarrow AS = \frac{1}{2} AB = R_\Omega$$

$$\Rightarrow R_\omega = \frac{13}{8}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) Р/м $\triangle ABC$:

$\angle CAB = 180 - 2\alpha$

По т. синусов: $\dfrac{CB}{\sin(180-2\alpha)} = 2R = AB$

$\dfrac{9}{\sin(180-2\alpha)} = \dfrac{13}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{9}{\sin(-2\alpha)} = \dfrac{13}{2}$

$\sin(-2\alpha) = 1$

Р. Заметим, что $ECAK$, т.ч. $(EF \perp BC)$ — параллелограмм

$\Rightarrow DC = DK,\ ED = DA$

$\Rightarrow DA^2 = CD \cdot BD = \frac{5}{2} \cdot \frac{13}{2} = \frac{65}{4}$

$\Rightarrow$ ~~DA ED = DA~~ $\Rightarrow DA = ED = \dfrac{\sqrt{65}}{2}$

$CD = DK = \frac{5}{2} \Rightarrow BK = \frac{3}{2} \Rightarrow CK = \frac{10}{2} = 5$

из т. Фалеса $\Rightarrow \dfrac{AD}{FD} = \dfrac{AS}{BS} \Rightarrow S$ — центр Ω.

Р/м $\triangle KCA$ и $\triangle EKA$:

$\Rightarrow$ т. Пифагора:

$\cancel{CA^2 = AK^2 = CK^2 + CA^2}$

$\cancel{AK^2 = EK^2 + AE^2}$

$\cancel{CA^2}$

$AB^2 = 65 + EB^2$

$AB^2 = CA^2 + 81$

$$\frac{CA}{BE} = \frac{\frac{\sqrt{65}}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{\sqrt{65}}{13} = \sqrt{\frac{65}{13^2}} = \sqrt{\frac{5}{13}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cancel{AB^2 = 65 + \frac{5}{13} CA^2} \\ AB^2 = 65 + EB^2 \\ AB^2 = \frac{5}{13} EB^2 + 81 \end{cases}$$

$\cancel{AB^2 =}$

$\Rightarrow \cancel{2AB^2 \frac{18}{13} EB^2 =}$

$65 + \frac{8}{13} EB^2 - 81 = 0$

$\frac{8}{13} EB^2 = 81 - 65 = 16$

$EB^2 = 26$

$\Rightarrow AB^2 = 65 + 26 = 81$

$AB = \sqrt{91} \Rightarrow R_\Omega = \frac{\sqrt{91}}{2}$ $R_\omega = \frac{\sqrt{91}}{4}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\cancel{y(3y}$

$3y-2x \neq -7y-4x$

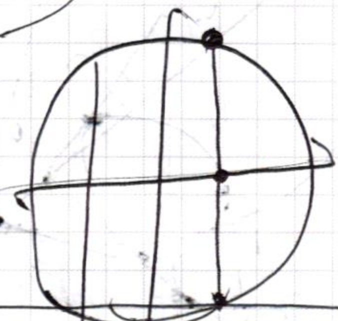
$\sqrt{3xy-2x-2x-3y+2}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$3x^2-6x+$

$3x^2$

$(\sqrt{3}x)^2-$

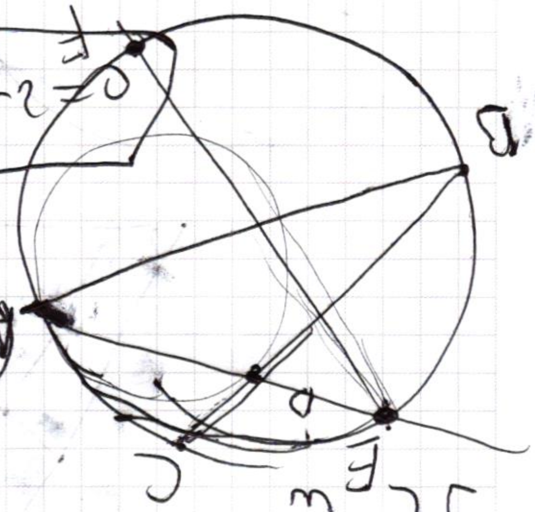


32
$-\frac{1}{2}$
3
18

$\boxed{9y^2-10xy+2x+3y-2=0}$

$9y^2-$

$\cancel{3y^2+}$

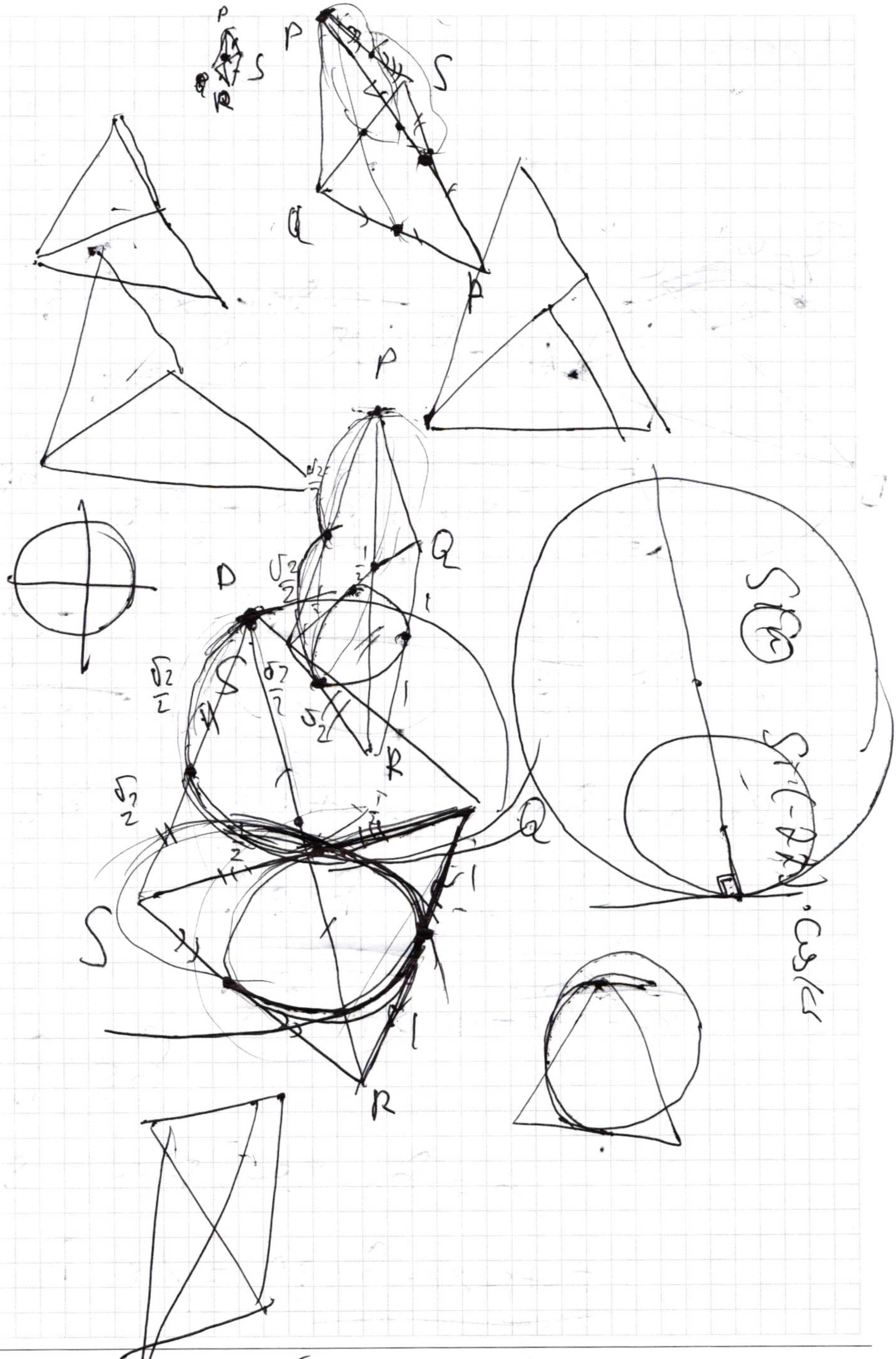


$x(3y-2x)$

$(3y-2x)^2+\cancel{3y+2}$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)


P
S
Q
R
P
Q
D
$\frac{\sqrt{2}}{2}$
1
S
R
S

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

α и β:

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta-\sin\beta\cos\alpha$

~~$\sin\alpha\cos\beta$~~

$\sin 2(\alpha+\beta)$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\gamma=\alpha+\beta$ $\quad \frac{\gamma+\delta}{2}$

$\delta=\alpha-\beta$

$\gamma=$

$8\sin\alpha\cos\alpha+\cancel{\sin^2\alpha}+$

$\cos^2\alpha+\cancel{\sin^2\alpha}$

$2\sin\alpha\cos\beta$

$2\cos^2\alpha-1$

$\sin\alpha+\cos^2\alpha$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \times 17 \\ \hline 112 \\ 160 \\ \hline 272 \end{array} \qquad \frac{289-272}{17} \qquad \frac{17}{289} \qquad \frac{1}{\sqrt{17}}$$

$= -\cancel{\sin^2\alpha}-\cos^2\alpha$

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$8\sin^2\alpha\cos\alpha$

$\sin 2\alpha$

$-\frac{\sqrt{17}}{17}$

$(2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + 2\sin 2\beta\cos 2\alpha)\cos 2\beta$

$2\sin(2\alpha+3\beta)\cos(\beta)+\sin 2\alpha = \frac{-8-\sqrt{17}}{17}$

$\cos\beta\, 2(\sin 2\alpha\cos 3\beta+\sin 3\beta\cos 2\alpha)+\sin 2\alpha$

$= \frac{-8-\sqrt{17}}{17}$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y(x-1)+2(x-1)$

$3y$

$3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)}$

$\cancel{3x(x-2)}$

$3x^2-6x+3y-4y=4$

$3(x^2+y)-2(3x+2y)=4$

$f(ab)$ $=f(a)+'$

$3x(x-2)+y(3y-4)=4$

$f(p)=[pM]$ <0

$9y^2-12xy+4x^2$

$=3y\ 3xy-2x-3y+2$

$3y+2x$

$9y^2+3y+4x^2+2x-15xy-2=0$

$x^2-4x-3y-2+3xy$

$x^2+x(3y-4)-3y-2=0$

$(3y)^2+12xy+(2x)^2$

$5x^2-20x$

$-15y$

$+8+15xy$

$(2x)^2$

$D=16-4\cdot 8\cdot 3$

$9y^2$

$D=9y^2-24y+16$

$+12y+8$

$(3y-2x)^2+3y+2x-3xy$

$12y^2$

$9y^2-12y+24$

$3y^2-4y+8$

$(3y-2x)^2-(3y-2)(x-1)=0$

$$\begin{cases} 9y^2+3y+4x^2+2x-15xy-2=0 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y-4=6 \end{cases}$$

$4x^2+9y^2+2x+3y-2-15xy=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$x \in [1;3]$

$\cancel{ax+b}$ $ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b$

$\cancel{2x-2 \geq 0}$

$x-1 \geq 0$

$4x-3 \geq (2x-2)(ax+b)$

$4x-3 \geq 2ax^2+2xb-2ax-2b$

$$\begin{cases} 2ax^2+x(2b-2a-4)-2b+3 \leq 0 \\ \cancel{ax+b \geq 8x^2-34x+30} \end{cases}$$

$8x^2+x(34+a)+30+b \leq 0$

$\frac{34}{16}$

$34 \cdot 34$, $32 \cdot 30$

136, 1020, 1156, 960, 196

$D=$ 196

$(14)^2$

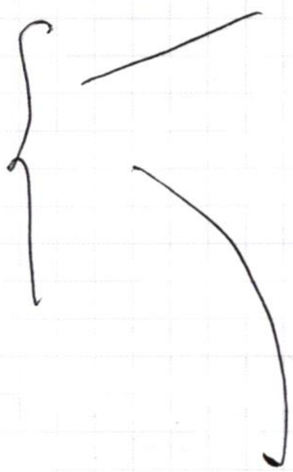
$\frac{2b-2a-4}{2a}$ $\frac{2b+3}{2a}$

$\frac{b}{2a}-\frac{1}{2}-\frac{1}{a}$ $\frac{b}{a}+\frac{3}{2a}$

$\frac{34+14}{16} = 3$

$(34+a)^2-32(30+b) \geq 0$

$\frac{34-14}{16} = \frac{20}{16} = \frac{5}{4}$



$y = ax + b$

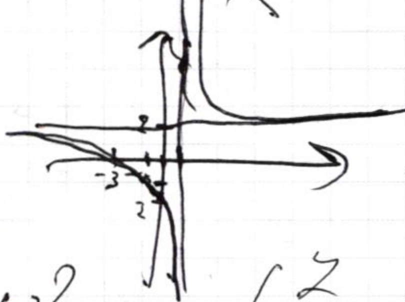
$\begin{cases} 0 = a3 + b \\ 4 = x + b \end{cases}$ -3

-2 $\frac{-3}{2} - 1,5$

$\begin{cases} 0 = 3a + b \\ 4 = a + b \end{cases}$

$2a = -4$

$a = -2$



$\cancel{4x = 4 = 4 - 3}$

$-6 + b = 0$

$b = 6$

1,25 $\frac{8 \cdot 17^2}{8^2}$ $\frac{17^2}{8}$ $-$ $\frac{\cancel{34 \cdot 12}}{\cancel{84}}$ 12 $\cancel{-2 \cdot \frac{3}{x}}$ $8 - 34 + 30$ $-2x + 6$

$32 - 68 + 30$ $-3 + 6$ $\frac{4x - 3}{2x - 2} = -2x + 6$

$62 - 68$ $\frac{17^2 - 12^2 \cdot 2}{8}$ $12^2(1 - 2)$

196 -6 $4x - 3 = (2x - 2)(-2x + 6)$

14 $4x - 3 = 4x$

$\frac{34 + 4}{16} = 3$ $-\frac{122}{8} + 30$

$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq -2x + 6$

$8 \cdot 9 - 34 \cdot 3 + 30 = 0$

$72 - 112$ 240 $4x - 3 \geq (-2x + 6)(2x$

$\cancel{30} - \frac{259}{8}$

$\frac{2}{4} \frac{3}{51}$ $6 - 3 = 3$ $\frac{4x - 3 + 2x - 6(2x - 2)}{2x - 2} \geq 0$

$\frac{2 \cdot 3}{3 - 2} = 1$ $\frac{8 - 3 - 5}{\frac{5}{2}}$ $\frac{49}{8}$

$\frac{6}{2}$ $\frac{10 - 3}{5 - 2} = \frac{2}{3}$ $\frac{12 - 3}{6 - 2} = \frac{9}{4} =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$\frac{\log_3 + \log_4 3}{\log_3 4}$

$t>0$

$t = 3^{\log_3 t}$

$t^{\log_4 3} + t - t^{\log_4 5} \geq 0$

$3^{\log_3 t} + 3$

$\geq \log_4$

$3(^{\log_3 t}(3^{\log_4 t} \log_3^{4} \quad t(t^{\log_4 3 - 1} + 1 - t^{\log_4 5 - 1}) \geq 0$

$t^{\log_4 3 - 1} - t \geq 1$

$t^{\log_4 5} - t = t(t^{1-\log_4 5} - 1)$

$3^{\log_3 t}$

$t^{\log_4 3 - 1} = -1$

$3^{\log_3 t^{\log_4 5}}$ $\log_4 t \geq \log_3 5$ 3

$\frac{\log_3 t}{\log_3 4}$

$= x \log_4 3 \; t^{\log_4 3 - 1} + 1 \geq 0$

$\frac{1}{2} \log_2 3 + t \geq t^{\frac{1}{2}\log_2 5}$

$3 \; t \geq \log_4 5 + \log_4 3$

$\sqrt{t^{\log_2 3}}$

$t^{\log_4 3 - 1} + 1 - t^{\log_4 5 - 1} \neq 0$ $(x^2+6x)^{\log_4 3} + x^2 + 6$

t

$\log_t(t^{\log_4 3} + t) \geq t^{\log_4 5}$ $+ x^2 t < \frac{1}{t}$

$t(t^{\log_4 3 - 1} + 1) + 1 \geq$ $3^2 \; 4^2 = x^2$ $\frac{\log_t 3}{\log_t 4} \log_4 t$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(\sqrt{t})^{\log_2 3} + t \geq$

$\log_4 3 < 1$

$\log_4 5 > 1$

$t^{\log_4 3}$

$\log_4 3\, t^{\log_4 3 - 1} = 0$

$t + t^1$

$\log_4 3 < 1 < \log_4 5$

t

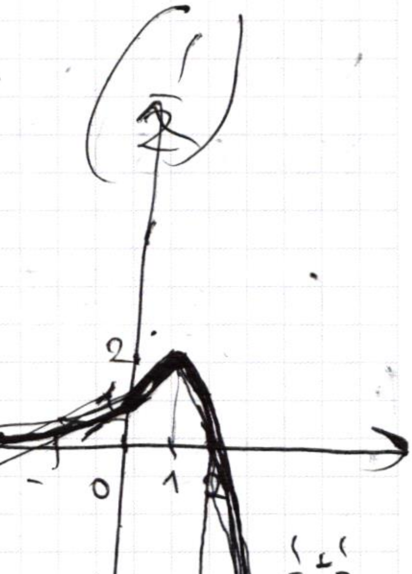
t

$t > 0$

$t^{\log_4 3} + t > t^{\log_4 5} > t$

$t > 1$

$(t > 0)^{\frac{1}{2}}$



$4^x = 3$

$3^y + 4^y > 5^y$

$y < 0$

$x < 1$

$\sqrt{\frac{1}{2}}$

$t^{\log_4 3} + t > t^{\log_4 5} > t$

> 0

$3 < \log_4 3 \cdot 4$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4}$

$\log \frac{1}{2} + \log_4 3$

$\log_4 3 \to \log_4 5$

$3^x + 4^x - 5^x \geq 0$

$t^{\log_4 3} + t > t^{\frac{1}{2} + \log_4 3}$

$\log_4 5 \; 1$

$\log_4 4 \; x > 2$

$t^{\log_4 3} + t > t \cdot t^{\log_4 3}$

$\log_3 5\, t$

$t^{\log_4 3}(1 - t) + t > 0$

$\log_4 5$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log}$

$x = 1 \quad 3 \quad 27 + 64 \geq 125$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$3^x + 4^x \geq 5^x$

$\ln 3 \cdot 3^x + \ln 4 \cdot 4^x = \ln 5$

$3 + 4 \geq 5$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)