МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1. $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cdot\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2} = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta.$

$\left.\begin{array}{l} 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right| \Rightarrow -2\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

Т.к. $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$, то $|\sin 2\beta| = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

2. $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin 2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} + \sin 2\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |: \cos^2\alpha \neq 0$
(т.к. $tg\alpha$ определён)

$\frac{2}{\sqrt{5}}tg\alpha + \sin 2\beta(1-tg^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$\frac{1}{\cos^2\alpha} = \frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = tg^2\alpha+1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{5}}tg\alpha + \sin 2\beta(1-tg^2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}(tg^2\alpha+1)$

$2tg\alpha + \sqrt{5}\sin 2\beta - \sqrt{5}\sin 2\beta\cdot tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$

$tg^2\alpha(1-\sqrt{5}\sin 2\beta) + 2tg\alpha + (1+\sqrt{5}\sin 2\beta) = 0.$

Получаем квадратное уравнение относительно $tg\alpha$.

Если $\sin 2\beta$ принимает ед. решение, то $tg\alpha$ может принимать не более 2-х различных значений. Но по условию их 3. Значит, т.к. $|\sin 2\beta| = \frac{2}{\sqrt{5}}$, то $\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$$\left[\begin{array}{ll} tg^2\alpha\left(1-\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2tg\alpha + \left(1+\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 & \left(\sin 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \\ tg^2\alpha\left(1+\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) + 2tg\alpha + \left(1-\sqrt{5}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}\right) = 0 & \left(\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt{5}}\right) \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{ll} tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0 & tg\alpha = -1,\ tg\alpha = 3 \\ 3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0 & tg\alpha = -1,\ tg\alpha = \frac{1}{3}. \end{array}\right.$$

Ответ: $-1;\ 3;\ \frac{1}{3}$.

№ 2.

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - 12y = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9\cdot(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} (2y-1)\cdot(x-6) \geqslant 0 \\ x - 12y \geqslant 0 \end{cases}$

Пусть $x - 6 = a$, $2y - 1 = b$. Тогда $x - 12y = (x-6) - 6(2y-1) = a - 6b$

ОДЗ: $\begin{cases} ab \geqslant 0 \\ a - 6b \geqslant 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0 \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

1. Решим ур-е $a^2 - 13ab + b^2 = 0$ относительно a:

$D = (13b)^2 - 4\cdot 36b^2 = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$a = \frac{13b \pm 5b}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b \end{array}\right.$

2. $$\begin{cases} a^2 + 9b^2 = 90 \\ \left[\begin{array}{l} a = 9b \\ a = 4b \end{array}\right. \end{cases} \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 81b^2 + 9b^2 = 90 \\ a = 9b \end{cases} \\ \begin{cases} 16b^2 + 9b^2 = 90 \\ a = 4b \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \pm 1 \\ a = 9b \end{cases} \\ \begin{cases} b = \pm 0{,}6\sqrt{10} \\ a = 4b \end{cases} \end{array}\right.$$

$a = 9,\ b = 1;$
$a = -9,\ b = -1;$
$b = 0{,}6\sqrt{10},\ a = 2{,}4\sqrt{10}$
$a = -2{,}4\sqrt{10},\ b = -0{,}6\sqrt{10}$

С учётом ОДЗ: $a = 9,\ b = 1;\ a = -2{,}4\sqrt{10},\ b = -0{,}6\sqrt{10}$

3. $x = a + 6,\ y = \frac{b+1}{2}$

$x = 15,\ y = 1;\ x = -2{,}4\sqrt{10} + 6,\ y = -0{,}3\sqrt{10} + 0{,}5$

Ответ: $x = 15, y = 1;\ x = -2{,}4\sqrt{10} + 6,\ y = -0{,}3\sqrt{10} + 0{,}5$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$(10x-x^2) + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

1. ОДЗ: $10x - x^2 > 0$ $\qquad 0 < x < 10$

Из ОДЗ следует, что $|x^2-10x| = 10x - x^2$

2. Пусть $a = 10x - x^2$, $a > 0$.

$$a + a^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 a}$$

$$5^{\log_3 a} = 5^{\frac{\log_5 a}{\log_5 3}} = a^{\frac{1}{\log_5 3}} = a^{\log_3 5}$$

$$a + a^{\log_3 4} \geqslant a^{\log_3 5} \qquad |: a^{\log_3 5} > 0$$

$$a^{\log_3 3 - \log_3 5} + a^{\log_3 4 - \log_3 5} \geqslant 1.$$

$$a^{\log_3 \frac{3}{5}} + a^{\log_3 \frac{4}{5}} \geqslant 1$$

$$\sqrt{a}^{\log_3 \frac{9}{25}} + \sqrt{a}^{\log_3 \frac{16}{25}} \geqslant 1$$

При $\sqrt{a} \geqslant 3$: $\sqrt{a}^{\log_3 \frac{9}{25}} + \sqrt{a}^{\log_3 \frac{16}{25}} \geqslant \frac{9}{25} + \frac{16}{25} = 1$

При $\sqrt{a} < 3$: $\sqrt{a}^{\log_3 \frac{9}{25}} + \sqrt{a}^{\log_3 \frac{16}{25}} < 1.$

Значит, $\sqrt{a} \geqslant 3 \Rightarrow a \geqslant 9 \quad (a > 0)$

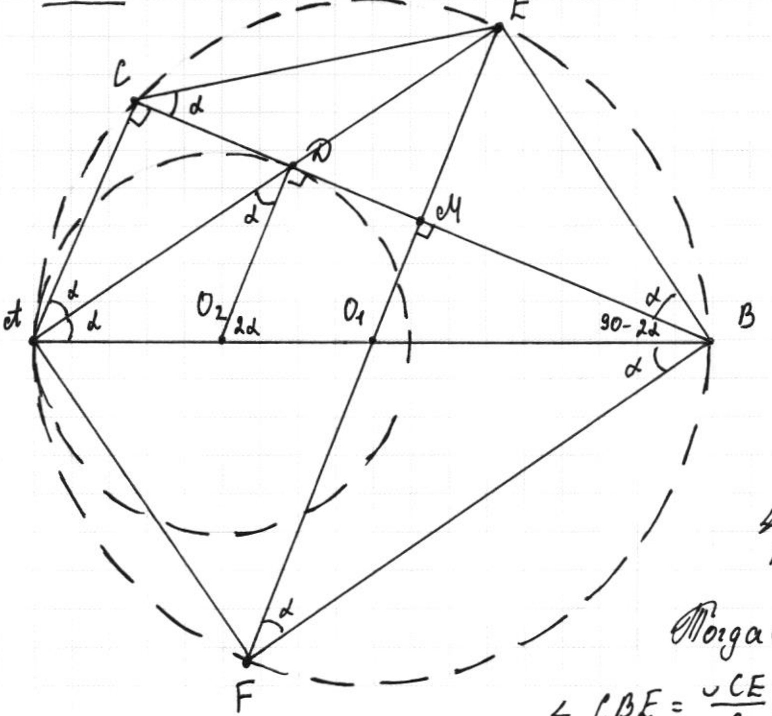
3. $10x - x^2 \geqslant 9$

$$x^2 - 10x + 9 \leqslant 0$$

$$1 \leqslant x \leqslant 9$$

Ответ: $[1; 9]$.

№4.



O_1, O_2 - центры окр. Ω и ω

Т.к. A - т. касания, то $A \in O_1O_2$, $O_2 \in AB$

1. Пусть $\angle ECB = \alpha$

$\angle EAB = \angle ECB = \alpha$ - вписанные

$\angle O_2DA = \angle O_2AD = \alpha$ (т.к. $AO_2 = DO_2$)

$\angle DO_2B = 2\alpha$ - внешний к $\triangle AO_2D$

$\angle O_2BD = 90 - 2\alpha$ (т.к. $O_2D \perp CB$ как касательная к радиусу)

Тогда $\smile AC = 180 - 4\alpha$, $\smile BE = 2\alpha$, $\smile CE = 180 - \smile AC - \smile BE$

$\angle CBE = \frac{\smile CE}{2} = \frac{180 - (180 - 4\alpha) - 2\alpha}{2} = \alpha$.

Т.к. $\angle ECB = \angle EBC = \alpha$, то $\triangle CEB$ - р/б. Т.к. $EF \perp BC$, то EF - сер. перп.

Т.к. CB - хорда, FE - сер. перп. к CB, то FE - диаметр, $O_1 \in FE$.

2. Т.к. AB - диаметр, то $\angle ACB = 90°$.

Значит, $AC \parallel O_2D$, $\angle CAD = \angle ADO_2 = \alpha$.

Пусть R - радиус окр. Ω. Тогда $AB = 2R$

В $\triangle ACB$ по т. Пифагора: $AC = \sqrt{(2R)^2 - 16^2} = 2\sqrt{R^2 - 64}$

Т.к. AD - бисс., то $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{15}{17}$

$\frac{2\sqrt{R^2-64}}{2R} = \frac{15}{17}$

$289(R^2 - 64) = 225R^2$

$64R^2 = 289 \cdot 64$

$R = 17$.

3. Пусть $CB \cap EF = M$. Тогда $MB = \frac{CB}{2} = \cancel{16}\ 8$, $DM = \frac{17}{2} - 8 = \frac{1}{2}$.

Пусть r - радиус окр. ω.

$\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} = \cancel{\frac{17}{64}}\ \frac{17}{32}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{32} \Rightarrow 64R - 32r = 34R \Rightarrow r = \frac{30}{32}R = \frac{15}{16}\cdot 17 = \frac{255}{16}.$

4. $\angle FBE = 90^\circ \Rightarrow \angle FBO_1 = 90 - (90-2\alpha) - \alpha = \alpha$

$\angle O_1FB = \angle O_1BF = \alpha$ (т.к. $O_1F = O_1B$)

$\angle AFB = 90^\circ \Rightarrow \angle AFE = 90 - \alpha$

В $\triangle O_1MB$: $\frac{8}{17} = \cos(90-2\alpha) = \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha$

$\sqrt{1-\sin^2\alpha}\cdot\sin\alpha = \frac{4}{17}$

$289(1-\sin^2\alpha)\cdot\sin^2\alpha = 16$

$289\sin^4\alpha - 289\sin^2\alpha + 16 = 0$

$D = (289)^2 - 4\cdot 289\cdot 16 = 289(\overset{225}{289-64}) = (17\cdot 15)^2$

$\sin^2\alpha = \frac{289 \pm 255}{2\cdot 289}$

Т.к. $\frac{289+255}{2\cdot 289} > 1$, то $\sin^2\alpha = \frac{289-255}{2\cdot 289} = \frac{34}{2\cdot 289} = \frac{1}{17}$

$\sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17}.$

$\cos\angle AFE = \sin\alpha = \frac{\sqrt{17}}{17} \Rightarrow \angle AFE = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}.$

5. $\angle O_1FA = \angle O_1AF = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AO_1F = 2\alpha$ ($AO_1 = FO_1$)

$S_{AFE} = S_{AO_1F} + S_{AO_1E} = \frac{1}{2}R^2\sin 2\alpha + \frac{1}{2}R^2\sin(180-2\alpha) = R^2\sin 2\alpha.$

$R = 17$, $\sin 2\alpha = \frac{8}{17} \Rightarrow S_{AFE} = 17^2\cdot\frac{8}{17} = 8\cdot 17 = 136$

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{255}{16}$;

$\angle AFE = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$;

$S_{AFE} = 136.$

№6. $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3.$ (1)

Построим графики ф-ций $f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$; $g(x)=-32x^2+36x-3$

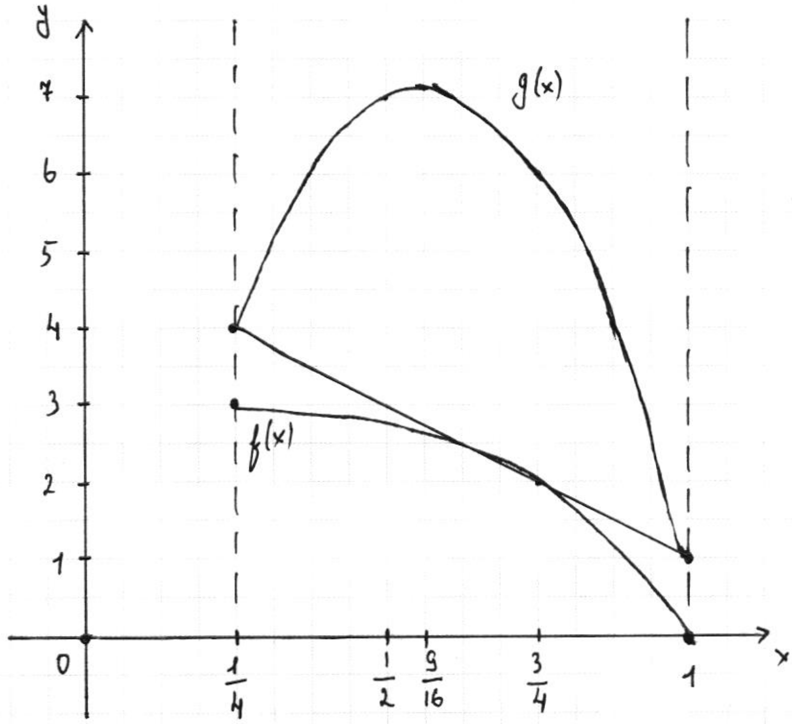
1. $g(x)=-32x^2+36x-3.$ $-\frac{b}{2a}=\frac{36}{2\cdot 32}=\frac{9}{16}$; $g\left(\frac{9}{16}\right)=7\frac{1}{8}.$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
$g(x)$	4	7	6	1

2. $f(x)=\frac{16x-16}{4x-5}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	1
$f(x)$	3	2	0

3.



1. Проведём прямую (и найдём ее ур-е) через нижние точки параболы: $y=kx+b$

$\left(\frac{1}{4};4\right)$, $(1;1)$

$k=\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{-3}{\frac{3}{4}}=-4$

$y=-4x+b$

$1=-4+b \Rightarrow b=5$

$\underline{y=-4x+5}$

2. Определим, сколько общих точек имеет эта прямая с гиперболой:

$\begin{cases} y=-4x+5 \\ y=\frac{16x-16}{4x-5} \end{cases}$ $-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$ $~~16x~~^{12}$

$16x^2-40x+25=16-16x$

$16x^2-24x+9=0$ $\quad \Big| \frac{D}{4}=12^2-16\cdot 9=0$

Значит, $y=-4x+5$ касается $f(x)$. Т.к. $y=-4x+5$ проходит через нижние точки параболы и касается гиперболы, то при изменении её угла наклона k или b нер-во (1) не будет выполняться.

Ответ: $a=-4$, $b=5$.

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 6

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

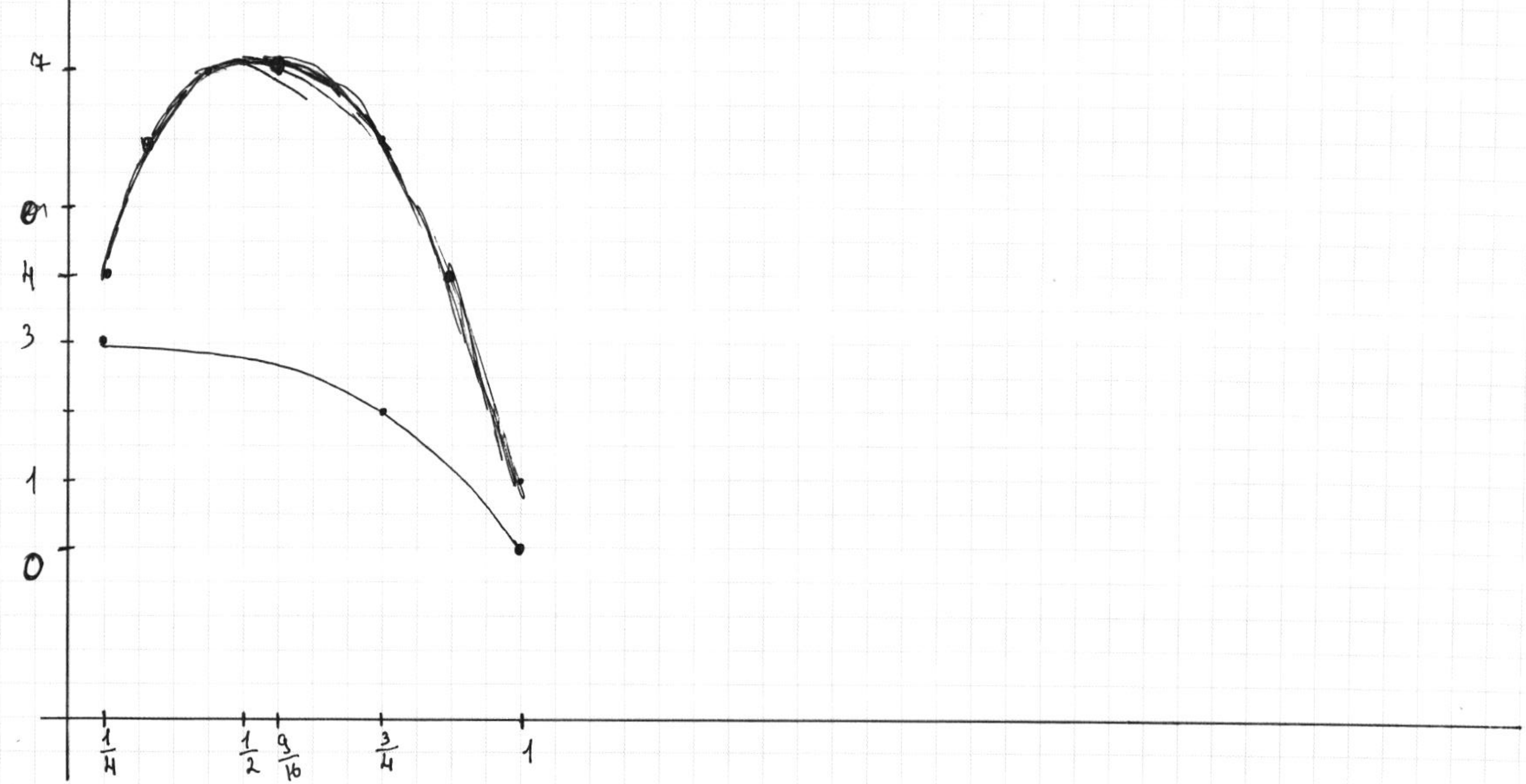
$\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ и $(1;1)$ $\quad k = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-3}{\frac{3}{4}} = -4$ $\quad y = -4x + b$ $\quad y = -4x + 5$

$1 = -4 + 5$

$$\begin{cases} y = -4x + 5 \\ y = \frac{16x - 16}{4x - 5} \end{cases}$$

$-4x + 5 = \frac{16x-16}{4x-5} \Rightarrow 16x^2 - 40x + 25 = 16 - 16x$

$16x - 24x + 9 = 0 \qquad \frac{D}{4} = \overset{144}{(12)^2} - \overset{144}{16 \cdot 9}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5.

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\qquad f(p) = [p/4]$, p - простое

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$ $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f(2) = 0 \quad f(3) = 0, \quad f(4) = f(2) + f(2) = 0 \quad f(5) = 1 \quad f(6) = 0$

$f(7) = 1 \quad f(8) = 0 \quad f(9) = 0 \quad f(10) = 1 \quad f(11) = 2 \quad f(12) = 0$

$f(13) = 3 \quad f(14) = 1 \quad f(15) = 1 \quad f(16) = 0 \quad f(17) = 4 \quad f(18) =$

$f(n^2) = 2f(n)$

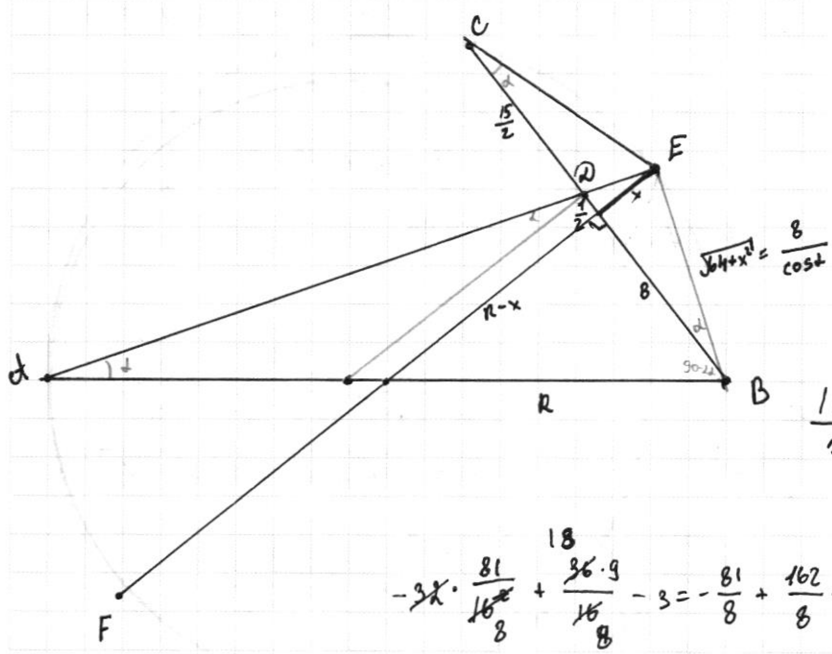
$f\left(\frac{2}{3}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{3}\right) = f\left(\frac{1}{3}\right) =$

$16x - 20$

$\cancel{R^2} + \frac{64}{\cos^2\alpha} - 2R \cdot \frac{8}{\cos\alpha} \sin\alpha = \cancel{R^2}$

$64 - 8R \sin 2\alpha = 0$

$R \sin 2\alpha = 8$



$-\frac{b}{2a} = \frac{\cancel{36}^{9}}{\cancel{32}_{8} \cdot 2} = \frac{9}{16}$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax + b \le -32x^2 + 36x - 3$

$\frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$-2 + 9 - 3 = 4$

$-8 + 18 - 3 = 7$

$-18 + 27 - 3 = 6$

$-32 + 36 - 3 = 1$

$4 + \frac{4}{1-5} = 3$

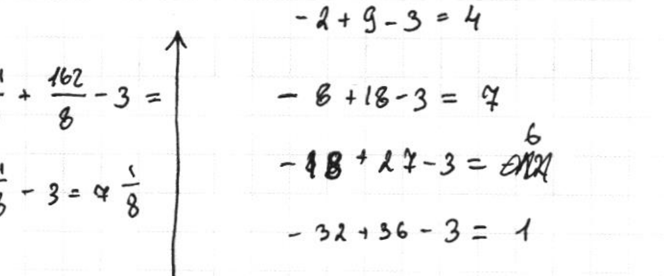
$4 + \frac{4}{2-5} = 4 - \frac{4}{3}$

$4 + \frac{4}{3-5} = 2$

0

$-\cancel{32} \cdot \frac{81}{\cancel{16}_{8}} + \frac{\cancel{36}^{18} \cdot 9}{\cancel{16}_{8}} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{162}{8} - 3 =$

$= \frac{81}{8} - 3 = 10\frac{1}{8} - 3 = 7\frac{1}{8}$



$-32x^2 + 36x - 3$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	1
F	4	7	6	1

$4 + \frac{4}{4x-5}$

x	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$
F	3		

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

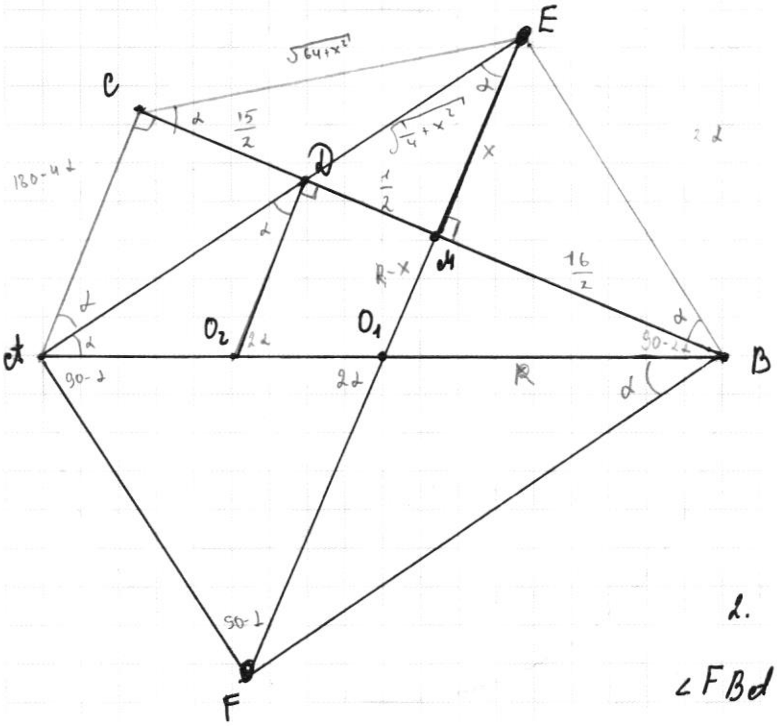
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



Дано: $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$

$BC = 16$

1. Пусть. $\angle ECB = \alpha$.

$\angle EAB = \angle ECB = \alpha$ - впис.

$\angle O_2DA = \angle O_2AD = \alpha$.

$\angle AO_2D = 2\alpha$, $\angle O_2BD = 90 - 2\alpha$

$\smile BE = 2\alpha$, $\smile AC = 180 - 4\alpha$, $\smile AB = 180^0$

$\smile CE = 2\alpha$, $\angle CBE = \alpha$.

2. $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$, $BM = \frac{16}{2}$, $DM = \frac{1}{2}$

$\angle FBA = 90^0 - \underset{\angle ABC}{(90-2\alpha)} - \underset{\angle CBE}{\alpha} = \alpha$

$\frac{16}{15} = \frac{17}{r}$

3. $EM = x$, $EO_1 = O_1B = R$, $O_1M = R - x$

$\cancel{\sin\alpha}\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{2x}{16} \\ \cancel{ctg\,2\alpha = \frac{2(R-x)}{16}} \end{cases}$ $\begin{cases} tg\,\alpha = \frac{x}{8} \\ \cancel{tg\,2\alpha = \frac{8}{R-x}} \end{cases}$ $\cancel{tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha} = \frac{2\cdot\frac{x}{8}}{1-\frac{x^2}{64}} = \frac{16x}{64-x^2}}$

$AC = \sqrt{4R^2 - 16^2} = 2\sqrt{R^2 - 64}$

$\cancel{\frac{16x}{64-x^2} = \frac{8}{R-x} \Rightarrow 2x(R-x) = 64 - x^2}$ $\cancel{\begin{cases} 2Rx - x^2 = 64 \\ R^2 = (R-x)^2 + 64 \end{cases}}$ $\cancel{\frac{\sqrt{R^2-64}}{\sqrt{R-x}}} =$

$S_{BEO_1} = \frac{1}{2}\cdot 8\cdot R = 4R$ $\quad S_{BEO_1} = \frac{1}{2}R\sqrt{64+x^2}\ \cancel{\sin}\ \cos\alpha$

$8 = \sqrt{64+x^2}\cos\alpha$ $\quad \frac{16}{\cos^2\alpha} = 64 + x^2$ $\quad 16(tg^2\alpha + 1) = 64 + x^2$

$16\,tg^2\alpha = 48 + x^2$ $\quad \frac{x^2}{4} = 48 + x^2 \Rightarrow$ $\quad x = 8\,tg\,\alpha$

$(R-x)^2 + 64 = R^2$

$64\,tg^2\alpha - 16\,tg\alpha + 64 = 0 \Rightarrow 4\,tg^2\alpha - tg\alpha + 4 = 0$

$64 + \cancel{x^2} + \frac{225}{4} - 2\cdot\frac{15}{2}\sqrt{64+x^2}\cos\alpha = \frac{1}{4} + \cancel{x^2}\ \ |\cdot 4$

$256 + 225 - 60\sqrt{64+x^2}\cos\alpha = 1$

$32 = 60\sqrt{64+x^2}\cos\alpha$

$\cancel{(2R)^2 m}$

$AC = \sqrt{16^2 - 4R^2} = 2\sqrt{64 - R^2}$

$+\begin{array}{r}256\\224\\\hline 32\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}17\\15\\\hline 85\\+17\\\hline 255\end{array}$

$\frac{AC}{AB} = \frac{15}{17} = \frac{2\sqrt{64-R^2}}{2R}$

$-\begin{array}{r}289\\225\\\hline 64\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}17\\8\\\hline 136\end{array}$ $\quad \times\begin{array}{r}17\\17\\\hline 119\\17\end{array}$

№1.

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta$$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}\\ 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta=-\frac{2}{5}\end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos2\beta=\frac{\sqrt5}{5}$$

$$|\sin2\beta|=\sqrt{1-\frac15}=\frac{2\sqrt5}{5}=\frac{2}{\sqrt5}=\sqrt{\frac45}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\sin2\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)$$

$$2\,tg\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5}+\sin2\beta(1-tg^2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt5}$$

$$1-tg^2\alpha+\frac{2\sqrt5}{5\sin2\beta}tg\alpha+\frac{\sqrt5}{5\sin2\beta}=0$$

$$tg^2\alpha-2\cdot\frac{\sqrt5}{5\sin2\beta}tg\alpha-1-\frac{\sqrt5}{5\sin2\beta}=0$$

$$\frac{D}{4}=\frac{1}{5\sin^22\beta}+1+\frac{1}{\sqrt5\sin2\beta}=\frac{1}{5\cdot\frac45}+1+\frac{1}{\sqrt5\cdot\frac{2}{\sqrt5}}=\frac14+1+\frac12=1\frac34=\frac74$$

$$=\frac{1}{5\cdot\frac45}+1-\frac{1}{\sqrt5\cdot\frac{2}{\sqrt5}}=\frac14+1-\frac12=\frac34$$

$$tg\alpha=\frac{1}{\sqrt5\cdot\frac{2}{\sqrt5}}\pm\frac{\sqrt7}{2},\quad tg\alpha=-\frac12\pm\frac{\sqrt3}{2}.$$

№3.

$$10x+|x^2-10x|^{\log_34}\geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

ОДЗ: $10x-x^2>0\quad\Rightarrow\quad 10x+(10x-x^2)^{\log_34}\geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$

$$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_34}\geqslant5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$a+a^{\log_34}\geqslant5^{\log_3a}$$

$$5^{\log_3a}=\left(5^{\frac{\log_5a}{\log_53}}\right)=a^{\frac{1}{\log_53}}$$

$$a+a^{\log_34}-5^{\log_3a}\geqslant0$$

$$\log_34\ \vee\ \frac{1}{\log_53}$$

$$a^1+a^{\log_34}-a^{\frac{1}{\log_53}}\geqslant0$$

$$\log_53\cdot\log_34=\frac{\log_34}{\log_35}$$

$$a^{\log_33}+a^{\log_34}-a^{\log_35}\geqslant0$$

$$\cancel{a^{\log_3\frac35}+a^{\log_3\frac45}\geqslant1}\quad a^{\log_3\frac35}+a^{\log_3\frac45}\geqslant1$$

$$\sqrt a^{\log_3\frac{9}{25}}+\sqrt a^{\log_3\frac{16}{25}}$$

$$\frac12>\frac13\quad\sqrt{\frac12}>\sqrt{\frac13}$$

При $\sqrt a\geqslant3\quad \sqrt a^{\log_3\frac{9}{25}}+\sqrt a^{\log_3\frac{16}{25}}\geqslant1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

№2.

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x^2-12x+36)+9(\underbrace{4y^2-4y+1}_{4y^2-4y+1})=90 \end{cases}$

ОДЗ: $x-12y\geq 0$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$

Пусть $x-6=a$, $2y-1=b$ $\qquad x-12y=(x-6)-6(2y-1)=a-6b$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases}$

1) $a^2-13ab+36b^2=\cancel{ab}\,0$

$D=(13b)^2-4\cdot 36b^2=169b^2-144b^2=25b^2$

$a_{1,2}=\frac{13b\pm 5b}{2} \Rightarrow \begin{matrix} a=9b \\ a=4b \end{matrix}$

2) $\begin{cases} (9b)^2+9b^2=90 \\ 16b^2+9b^2=90 \end{cases}$

$9b^2+b^2=10$, $b=\pm 1$

$b^2=\pm\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$b=1$, $a=9$

$b=-1$, $a=-9$

$b=0{,}6\sqrt{10}$, $a=2{,}4\sqrt{10}$

$b=-0{,}6\sqrt{10}$, $a=-2{,}4\sqrt{10}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)