МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

+ 2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

+ 3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

+ 6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

+ 7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3.

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - x^2 - 18x$

$t = x^2 + 18x$

$5^{\log_{12}(t)} \geqslant |t|^{\log_{12}13} - t$

Из ОДЗ следует $t > 0 \Rightarrow$ $|t| = t$.

I случай

$0 < t \leqslant 1$

$5^{\log_{12}t} > 0$

$t^{\log_{12}13} - t \leqslant 0$ (так как $\log_{12}13 > 1$) $\Rightarrow 5^{\log_{12}t} > 0 \geqslant t^{\log_{12}13} - t$ всегда верн. при $0 < t \leqslant 1$

II случай

$t > 1$; возьмем $\overset{f(x)}{\log_{12}(x)}$ от обоих частей, так как $f(x) \uparrow$ знак сохранится. Проблем с ОДЗ не будет, так как при $t > 1$ $5^{\log_{12}t} > 0$, $t^{\log_{12}13} - t > 0$.

$\log_{12}t \cdot \log_{12}(5) \geqslant \log_{12}(t^{\log_{12}13} - t) = \log_{12}t + \log_{12}t^{\log\frac{13}{12}} - 1$

$\log_{12}t \cdot \log_{12}\frac{5}{12} \geqslant \log_{12}(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$g(t) = \log_{11} t \cdot \log_{12}\frac{5}{12}$ $\downarrow\downarrow$ для $t > 1$. $\left(\log_{12}\frac{5}{12} < 0\right)$ $\Rightarrow$

$h(t) = \log_{12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$ $\uparrow\uparrow$ для $t > 1$.

$\Rightarrow$ $g(t) = h(t)$ имеет не больше одного корня.

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 = \log_{12}\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1\right)$

$t^{\log_{12}\left(\frac{5}{12}\right)} = \cancel{t\cdot}\, t^{\log_{12}\left(\frac{13}{12}\right)} - 1$

$t^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12}(13)} - t$

Проверим $t = 144$.

$12^{2(\log_{12} 5)} = 12^{2(\log_{12} 13)} - 144$

$25 = 169 - 144$

$25 = 25$ подходит. $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ верно от $t \in (1; 144]$ делать $g(t) > h(t)$.

$\Downarrow$

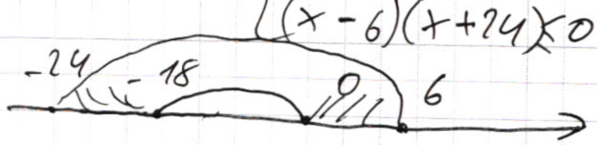
$t \in (0; 144]$.

$0 < x^2 + 18x \leq 144$.

$\Leftrightarrow \begin{cases} 0 < x(x+18) \\ x^2 + 18x + 81 - 225 \leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} 0 < x(x+18) \\ (x+9)^2 \leq 15^2 \end{cases}$

$\cancel{x \in}$

$\begin{cases} 0 < x(x+18) \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$



Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; +6]$

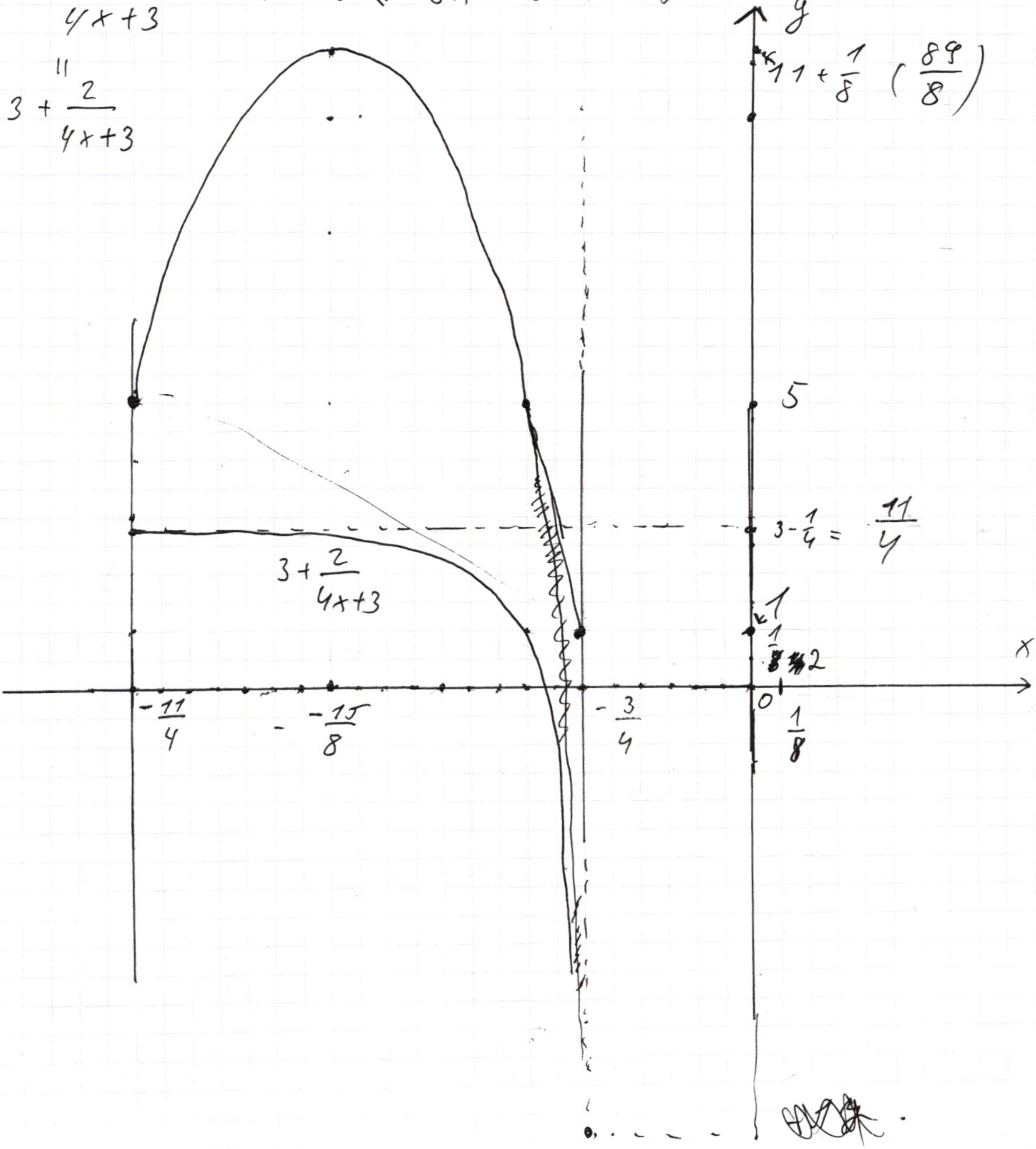
Ответ: $[-24$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

парабола $x_в = -\frac{15}{8}$.

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$



Рассмотрим прямую проходящую через $(-\frac{11}{4}; 5)$ и $(-\frac{3}{4}; 1)$

(верши точки по параболе).

$$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases} \qquad a = -2 \quad b = -\frac{1}{2}$$

Проверим.

$$3 + \frac{2}{4x+3} \leqslant -2x - \frac{1}{2} \quad | \cdot 2.$$

$$4x + 3 + \frac{\cancel{2}\,4}{4x+3} + \cancel{1}\,4 \leqslant 0$$

$t = 4x+3$; $t + \frac{\cancel{2}\,4}{t} + \cancel{1}\,4 \leqslant 0$; $\cancel{\frac{t^2+t+2}{t}} \leqslant 0$ $\quad \frac{t^2+4t+4}{t} \leqslant 0$

$$\frac{(t+2)^2}{t} \leqslant 0$$

~~при~~ $\cancel{t}$ раз $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}) \Rightarrow t \in (0; -8] \Rightarrow$

~~раве~~ $\Rightarrow \frac{(t+2)^2}{t} \leqslant 0$ - всегда верно и $-2x - \frac{1}{2}$ касается $\frac{12x+11}{4x+3}$.

Проверка оптимальности/допустимости? a,

$f_{a;b}(x) = ax + b$; $\cancel{\forall}$ $\forall_{-1}$ $f_{a;b}\cancel{(x)}(-\frac{11}{4}) \leq f_{-2;-\frac{1}{2}}(-\frac{11}{4})$

$f_{a;b}(-\frac{3}{4}) \leq f_{-2;-\frac{1}{2}}(-\frac{3}{4})$ $\Rightarrow$ Так как, это крайние точки $-8x^2 - 30x - 1?$.

для

$\Rightarrow f_{a;b} \neq f_{-2;-\frac{1}{2}}$ $\cancel{\forall}$ должно выполняться $f_{a;b}(x) < f_{-2;-\frac{1}{2}}(x)$ на $x \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$ $\Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow$ Но раз $f_{a;b}(x)$ к $f_{-2;-\frac{1}{2}}(x)$ и $f_{-2;-\frac{1}{2}}(x)$ (касается $\frac{12x+11}{4x+3}$, $\frac{12x+11}{4x+3}$ ↓ +), то

остальные $f_{a;b}(x)$ пересекут $\frac{12x+11}{4x+3}$, а значит где-то $f_{a;b}(x)$ не выполнится.

$f_{a;b}(x) \geq \frac{12x+11}{4x+3}$.

Ответ: $(-2; -\frac{1}{2})$.

№ 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x^2+9y^2-4x-18y-12=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0 \\ x-2y\geq 0 \\ (x-2)^2+(3y-\overset{3}{\cancel{x}})^2=\overset{25}{\cancel{17}} \end{cases}$$

$$D=9(y-1)^2$$

$$\begin{cases} (x-4y+2)(x-y-1)=0 \\ x\geqslant 2y \\ (x-2)^2+(3y-1)^2=17 \end{cases}$$

I
$$\begin{cases} x=4y-2 \\ (4y-4)^2+(3y-\overset{3}{\cancel{1}})^2=\overset{25}{\cancel{17}} \\ \cancel{\leq}\ x\geqslant 2y \end{cases}$$

$$\cancel{16y^2-32y+16+9y^2-\overset{18}{\cancel{6}}y+\overset{9}{\cancel{1}}=\overset{25}{\cancel{17}}}$$

$$\cancel{25y^2}$$

$$\begin{cases} 16(y-1)^2+9(y-1)^2=25 \\ x\geqslant 2y \\ x=4y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} y-1=\pm 1 \\ x\geqslant 2y \\ x=4y-2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases}$$

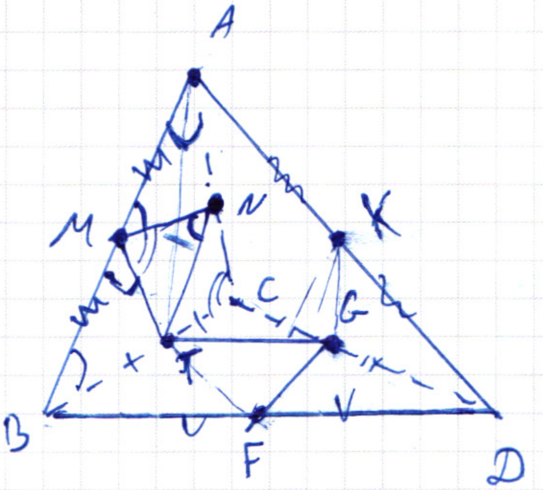
II случай

$$\begin{cases} x=y+1 \\ (y-1)^2+9(y\cancel{+}1)^2=25 \\ x\geqslant 2y \end{cases} \quad \begin{cases} (y-1)^2=\frac{5}{2} \\ x=y+1 \\ x\geqslant 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y=1\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2\pm\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x\geqslant 2y \end{cases} \quad \begin{cases} y=1-\sqrt{\frac{5}{2}} \\ x=2-\sqrt{\frac{5}{2}} \end{cases}$$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}};\ 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4.7.

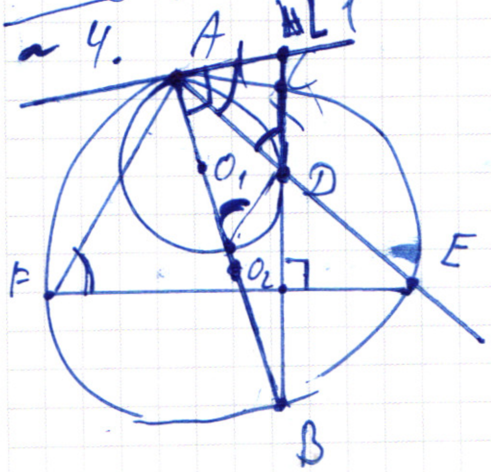


Решение:
K, M, N, T, F, G - середин.
раз A, M, N, T - лежат на одной сфере ⇒
⇒ MANT - вписанн.
но так как. MT и середин ⇒
⇒ MT ∥ AC; TN ∥ AB (сред. лин) ⇒
⇒ ∠MTN = ∠MAN и ∠MTN + ∠MAN = 180° ⇒
⇒ ∠BAC = 90° ~~$BC^2 = AB^2 + AC^2 = 4$~~

~~∠AMN = ∠ABC~~
~~∠TMN = ∠TCN ; ∠ABC + ∠ACB = ∠TMN + ∠AMN ⇒~~
~~∥ 90°~~

⇒ 7

№ 4.



Решение
l - общая касат.
Лот. от квадрата кас.

$BD^2 = BO_1^2 - r^2$

$BD^2 = (R-r)^2 - r^2 = R^2 - 2Rr$. (степень точки)

$\angle LAD = \angle LDA$ ($= \frac{1}{2} \cup AD$)

$-AL^2 + (AL + BD)^2 = 4R^2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-2x-\frac{1}{2} \geq 3+\frac{1}{4x+3}$

$0 \geq 3+\frac{1}{2}+2x+\frac{1}{4x+3}$

$\frac{8x^2+6x+\frac{7}{2}}{4x+3}$ $\quad \frac{8x^2+6x+14x+\frac{21}{2}}{4x+3} \leq 0.$

$\frac{8x^2+20x+\frac{21}{2}}{4x+3}$

$\frac{D}{4} = 100-8\cdot\frac{21}{2} = 100-84 = 16$

$\frac{-10\pm 4}{8} = -\frac{7}{4}; \; -\frac{3}{4}.$

$-2x-\frac{1}{2} \geq 3+\frac{1}{4x+3}$

$4x+1+6+\frac{2}{4x+3} \leq 0$

$16x^2+12x+28x+21+2 \leq 0$

$16x^2-840x+23 \leq 0$

$\frac{D}{4} = 400-16\cdot 23 =$

$= 400-230-120-18 =$

$= 170-120-18 =$

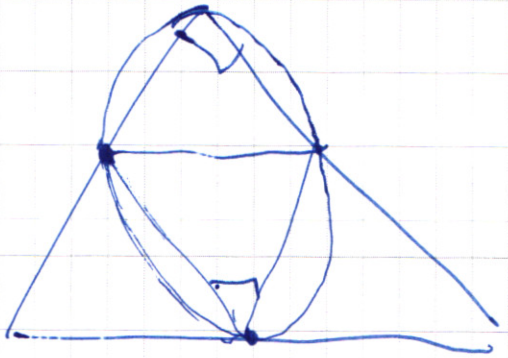
$= 50-18 = 32$

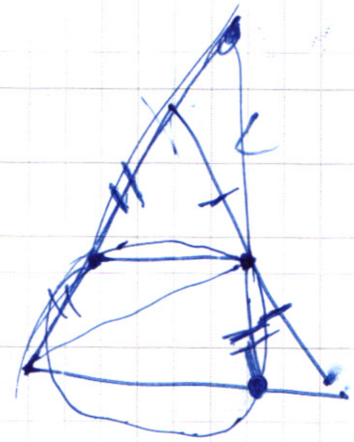
☑ черновик ☐ чистовик

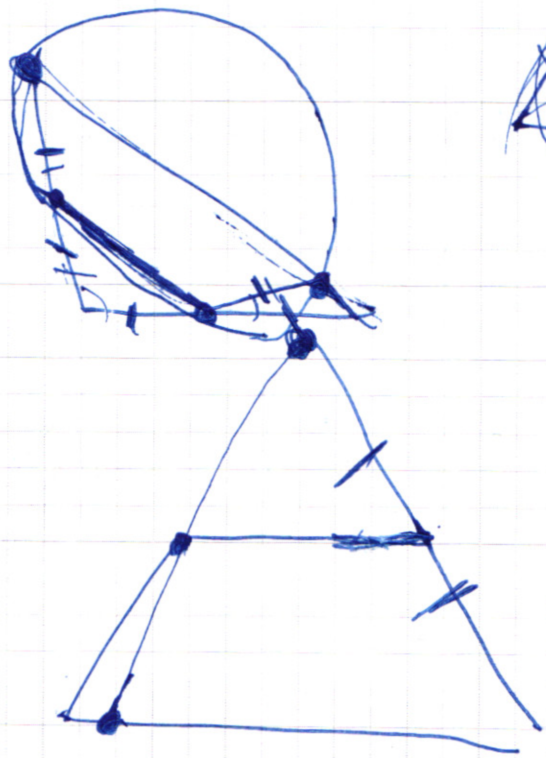
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)







☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

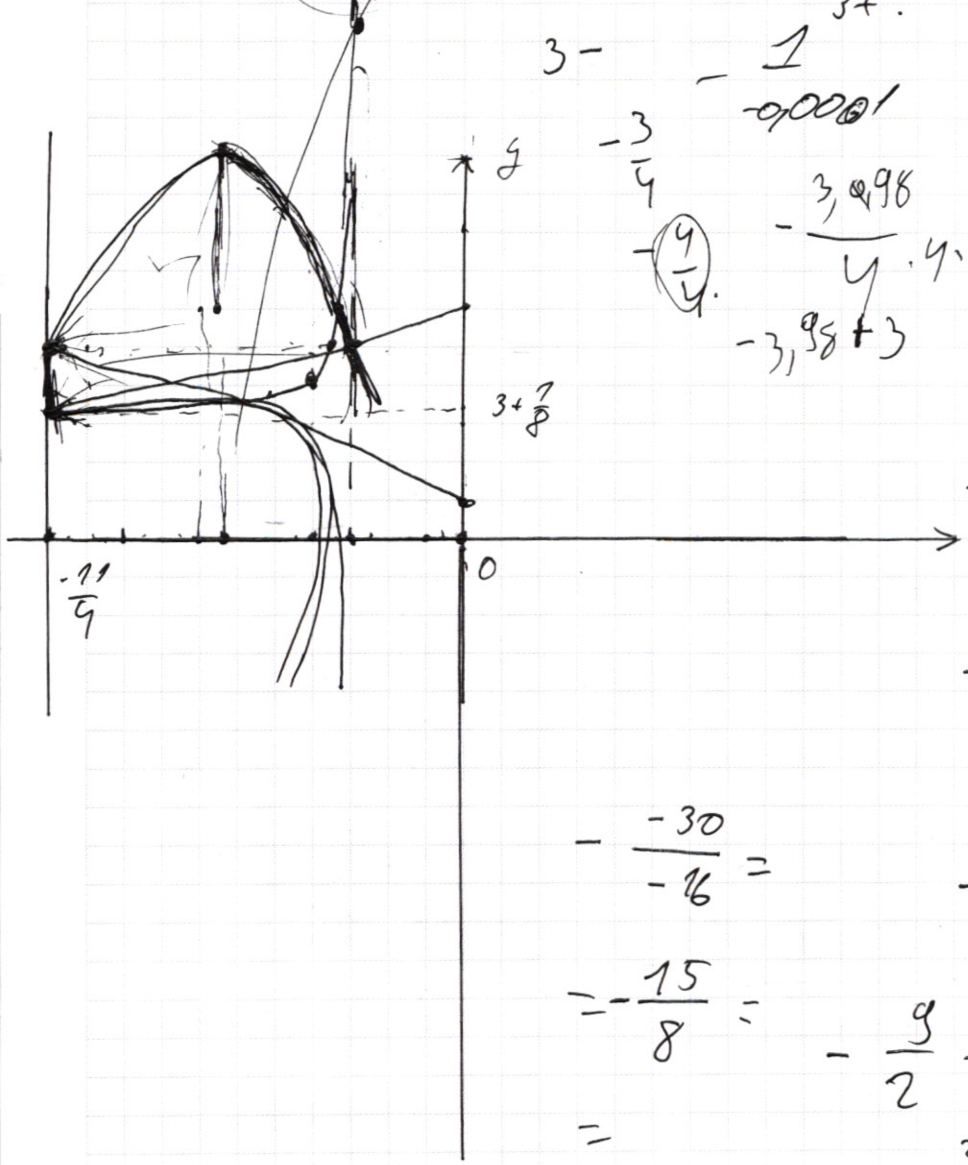
$3-\frac{1}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30-17$

$\frac{1}{-11+3=-8}$ $-0{,}001$

$3+$

$3- \quad -\frac{1}{-0{,}0001}$

$3+\frac{1}{8}$ $3-$



$-\frac{3}{4}$

$-\frac{4}{4}$

$-\frac{3{,}998}{4}\cdot 4\cdot\left(\frac{-11}{4}\right)^2$

$-\frac{3{,}01}{4}\cdot 4$

$-3{,}01+3=$

$=-0{,}001.$

$-3{,}998+3$

$-\frac{121}{16}\cdot 8+\frac{11\cdot 30}{4}-$

$+$ $-17.$

$\begin{array}{r}15\\ 11\\ \hline 165\end{array}$

$\frac{-121}{2}+\frac{165}{2}-17.$

$-\frac{-30}{-16}=$

$\frac{44}{2}$ $22-17=5.$

$=-\frac{15}{8}=$

$-\frac{9}{2}+\frac{5\cdot 3}{2}-17=0$

$=$

$-\frac{36}{2}=$

$225-17\cdot 8 \quad -2.$

$225-80-56=$

$=145-56=\frac{89}{8}$

$=\frac{225}{8}-17=$

$-\frac{225}{64}\cdot 8+\frac{15\cdot 30}{48}-17=$

$-\frac{225}{8}+\frac{225}{4}-17=$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le -8x^2-30x-12.$$

$$-165 \quad -121 \quad 44$$

$$3 - \frac{1}{4x+3}$$

$$3 + \frac{2}{4x+3}$$

$$-\frac{121}{2} + \frac{15\cdot 11}{2} - 12 =$$

$$= 22-12.$$

$$-\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$$

$$-\frac{9}{2} + \frac{15\cdot 3}{2} - 12 =$$

$$= \frac{36}{2} = -12.$$

$$-\frac{225}{8} + \frac{225}{4} - 12.$$

$$\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$$

$$\left(-\frac{3}{4}; 1\right)$$

$$\frac{225}{8} - 12 =$$

$$ax+b;$$

$$\frac{225-80-56}{8} = \frac{145-56}{8} =$$

$$\frac{11}{2} + \frac{-1}{2} = 8$$

$$= \frac{89}{8}$$

$$-\frac{9}{16}\cdot 8 + \frac{30\cdot 3}{4} - 12 =$$

$$-\frac{11}{4}a+b=5$$

$$-\frac{3}{4}a+b=1$$

$$-\frac{8}{4}a=4 \quad = \quad -\frac{9}{2} + \frac{9}{2} - 12.$$

$$a=-2;\ b \qquad -\frac{3}{2}+b=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{2}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$x^2-4x+4+9y^2-18y+\cancel{1}^{9}=\cancel{17}^{25}$$

$$(x-2)^2+(3y-1)^2=17$$

$$x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2$$

$$x-2y\geq 0$$

$$x^2-xy+4y^2-4xy$$

$$x(x-y)+4y(y-x)=-x-2y+2$$

$$(x-y)(x-4y)=-x-2y+2$$

$$\cancel{x^2+x}($$

$$x^2-\cancel{4}^{5}xy+x+4y^2+2y-2=0$$

$$x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$$

$$D=1-\cancel{2}10y+25y^2-\cancel{12}^{16}y^2-8y+8=$$

$$=9-18y+9y^2=\cancel{3y}-3\quad 9(y-1)^2$$

$$x=\frac{5y-1\pm 3(y-1)}{2}=4y-2;\ y+1$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№ 1

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$

$\sin \cancel{2\alpha}\ 2\alpha \cdot$

$\sin x \cdot \cos y + \sin y \cdot \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}.$

$\sin x \cdot \cos 2y + \sin 2y \cdot \cos x = -\frac{4}{5} + \sin x \cdot y.$

$\sin 2\alpha =$

$tg\ \cancel{*}\ \alpha -$

$tg\frac{x}{2} \cdot$

$tg\frac{x}{2} = \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}$

$\sin 2\alpha = \frac{2 tg \alpha +}{1 + tg^2 \alpha}.$

$tg\frac{x}{2} \cdot$

$2 tg\frac{x}{2} +$ $\frac{2\sin\frac{x}{2}}{}$

$\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}} = \frac{\frac{2\sin\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}}{\cos} \quad \frac{\frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}} + \frac{\sin\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}}{\frac{\cos^2\frac{x}{2}+\sin^2\frac{x}{2}}{\cos^2\frac{x}{2}}} =$

$= \frac{2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}\cdot 1} = 2\sin\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x \cdot y =$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin 4\beta \cdot \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$.

$x \cdot y + \sqrt{1-y^2} \cdot \sqrt{1-x^2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\cos 2\beta = \quad tg\frac{x}{2} \quad 1 + \quad \frac{1-tg^2\beta}{tg^2\beta} = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\cos^2\beta}$

$\cos^2 x - \sin^2 x$

$\cos 2\beta =$

$\frac{1 - tg^2\beta}{1+tg^2\beta} =$ $\quad \cos^2\beta - \sin^2$

$5^{\log_{12}(t)} \geq |t|^{\log_{12} 13} - t$

$t \quad 0{,}5^2 -$

$t > 1$

$\frac{2x}{1+x^2}$.

$\log_5 (5^{\log_{12}(t)}) \geq |t|^{\log_{12} 13} - t$.

$t^{\log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{5}{12}} =$

$\log_{12}(t) \geq 0$.

$= \log_{12} \cdot \quad t^{\log_{12}\frac{5}{12}} = t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1 \cdot t$

$t^{\log_{12} 5} = t^{\log_{12} 13} - t$;

$5^{\log_{12} t} \geq 41^{\log_{12} 13} - t$

$t \geq 1$

$t < 1$

$0 < t \leq 1$ То все ок.

$t \geq 1$.

$\log_5 |$

$\log_{12}$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12}(t^{\log_{12} 13} - t) =$

$= \log_{12} t + \log_{12} t^{\log_{12} \frac{13}{12} - 1}$

$\log_{12} t \cdot (\log_{12} 5 - 1) \geq \log_{12} \frac{13}{12} - 1$

$\log_{12} t \geq \log_5 (t \cdot t^{\log_{12} \frac{13}{12}}) = \log_5 (t) + \log_{12}\frac{13}{12} \log_5 t$

$=$

$\frac{\log_{12} t}{\log_5 t} \geq \log_{12} \frac{13}{12} + 1$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq$

$\geq \log_{12} (t^{\log_{12} 13} - t)$

$\log_{12} t \cdot \log_{12} 5 - \log_{12} t \geq$

$\geq \log_{12} (t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1)$

$\log_{12} t \cdot \log_5 5$.

$\frac{5}{12} \leq 12^{\alpha}$; $\frac{5}{12} \leq x \cdot 5^{\cdot \log_5 12 \cdot \log_5}$

$= \log_{12} t \cdot (\log_{12} \frac{5}{12}) \geq$

$\geq l_1$ (*)

$\sqrt[\log_5 t]{t^{(\log_{12} 13 - 1) \cdot \log_5 12}}$.

$= \log_{12} t \cdot \log_{12} \frac{5}{12}$

$= \sqrt[\log_5 t]{t^{\log_5 13 - 1}}$

t

$72 - 24 - 36 = 12$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$t=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t} \geq |t|^{\log_{12}13}-t$$

Так как t ~~в~~ тож логарифмируемое $5^{\log_{12}t}$ $\Rightarrow$

$\Rightarrow t>0 \Rightarrow$ модуль ~~м~~ можно убрать.

I случай $0<t\leq 1$

$5^{\log_{12}t} > 0$

$\Rightarrow$

$t^{\log_{12}13}-t\leq 0$ (так как $\log_{12}13>1$)

$\Rightarrow 5^{\log_{12}t}>0\geq t^{\log_{12}13}-t$ ~~верно~~ верно

II случай $t>1$

возьмем $\log_{12}$ от каждой части, так как

$\underset{f(x)}{\log_{12}(x)}$ $-\nearrow \Rightarrow$ знак сохранится. (Проблем с ОДЗ не будет так как $0<t^{\log_{12}13}-t$ при $t>1$.

$0<5^{\log_{12}(t)}$

$\Rightarrow$

☑ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\log_{12} t \geq \log_5 t(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$ $\qquad \log_{12}(t^{\log\frac{13}{12}} - 1) = \log_{12}\frac{5}{12} \cdot \log_{12} t$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} = t^{\log\frac{13}{12}} - 1.$

$\log_{12} t \geq \log_5 t + \log_5(t^{\log_{12} 13} - 1) \quad \Big| : \log_5 t$ $\qquad 1 = t^{\log\frac{13}{12}} - t^{\log\frac{5}{12}}$

$1 = \frac{t^{\log 13}}{t}$

$(\log_5 t > 0$, так как $t > 1)$

$\frac{\log_{12} t}{\log_5 t} \geq 1 + \frac{\log_5(t^{\log_{12} 13} - 1)}{\log_5 t}$

$t = t^{\log_{12} 13} - 1 + \log_{12} 5$

$\log_t 5 \cdot \log_{12} t - 1 \geq \frac{\log_5(t^{\log_{12} 13} - 1)}{\log_5 t}$

$x = \log\frac{13}{12} x - \log_{12} 5 x$

$\log_{12}\frac{5}{12} \geq \frac{\log_5(t^{\log_{12} 13} - 1)}{\log_5 t}$

$0 = x(\log_{12}\frac{13}{12} - lo$

$\to \log_{12} t \cdot \log_{12} 5 \geq \log_{12}(t^{\log_{12} 13} - t) = \log_{12} t + \log_{12}(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$\log_{12} t \cdot \log_{12}\frac{5}{12} \geq \log_{12}(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1)$

$g(x) = \log_{12} x \cdot \log_{12}\frac{5}{12} \downarrow$ на ~~всей~~ ОДЗ. $(x > 1)$

$h(x) = \log_{12}(t^{\log_{12}\frac{13}{12}} - 1) \uparrow$ на ~~всей ОДЗ~~ $x > 1$

В силу монотонности и не периодичности

$g(x) = h(x)$ не больше одного корня. $(x > 1)$

Но $g(x) < 0$ на $x > 1$ $\Rightarrow$ корней нет и $h(x) > g(x)$

$h(x) > 0$ на $x > 1$ $\quad (h(12) > g(12)$ - хотя бы одно значение.

~~черновик~~ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)