МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

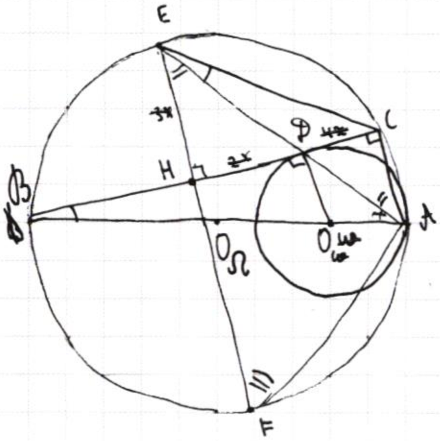
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4

$BD = \frac{13}{2}$ $DC = \frac{5}{2}$



$\triangle ABC \sim \triangle BDO_\omega$ по 2м углам $k = \frac{18}{13}$

CBA, $\angle ADO_\omega = 90° = \angle ACB$ (опирается на диаметр)

по теореме Пифагора $AO_\Omega = R$

$BD^2 + DO_\omega^2 = BO_\omega^2$

$(AO_\omega + O_\omega B)^2 = AC^2 + BD^2$

$DO_\omega = r = AO_\omega$ $BO_\omega = \sqrt{r^2 + \frac{169}{4}}$

$AC = \frac{18}{13}r$ (из подобия) $AB = \sqrt{\frac{324}{4} + \frac{324r^2}{4\cdot169}} = BO_\omega + r = \sqrt{r^2 + \frac{169}{4}} + r =$

$= \sqrt{\frac{324\cdot169 + 4\cdot324\cdot r^2}{4\cdot169}} = \frac{18}{\cancel{26}}\ \cancel{\frac{9\sqrt{r^2+169}}{13}} = \sqrt{\frac{324(169+4r^2)}{169\cdot4}} = \frac{18}{13}\sqrt{r^2 + \frac{169}{4}}$

$\frac{5}{13}\sqrt{r^2 + \frac{169}{4}} = r \Rightarrow \frac{25r^2 + 25\cdot169\cdot0{,}25}{169} = r^2 \Rightarrow \frac{144}{169}r^2 = \frac{25\cdot0{,}25\cdot169}{169} = \frac{25}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{12r}{13} = \frac{5}{2} \Rightarrow r = \frac{5\cdot13}{24} = \frac{65}{24}$ $\frac{AB}{2} = R = \frac{\sqrt{\frac{169\cdot25}{576} + \frac{169\cdot12^2}{4\cdot12^2}} + \frac{65}{24}}{2} = \frac{\sqrt{\frac{169(25+144)}{576}} + \frac{65}{24}}{2}$

$R = \frac{\frac{169}{24} + \frac{65}{24}}{2} = \frac{234}{48} = \frac{117}{24}$ $r = \frac{65}{24}$

~~$\angle AFE = \angle CAE$ (опираются на $\cup EC$)~~

~~$\cos(\angle CAE) = \frac{CA}{DA}$~~ $tg(\angle CAE) = \frac{CD}{CA} = \cancel{\frac{5\cdot13\cdot24}{2\cdot18\cdot65}} = \cancel{\frac{5}{2}\cdot\frac{13r}{18}} = \cancel{\frac{2}{3}}$

$\angle AFE = arctg\left(\frac{2}{3}\right)$

~~$\angle FEA + \angle EDB = 90° = \angle CAD + \angle CDA$ ($\angle EDB = \angle CDA$) $\Rightarrow \angle AEF = \angle CAE = \angle AFE$~~

~~$S_{\triangle AFE} = FE^2\, tg(\angle AFE)\cdot 0{,}5$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~27~~ −0

~~3~~ −0

~~4~~ 3 0

1 ~~5~~ 1

~~6~~ 4 0

~~7~~ 2 1

~~8~~ 5 0

~~9~~ 6 0

~~10~~ 3 1

2 ~~11~~ 2

~~12~~ 7 0

3 13 3

~~14~~ 4 1

~~15~~ 5 1

~~16~~ 8 0

3 17 3

~~18~~ 9 0

4 19 - 4

~~20~~ 20 1

~~21~~ 6 1

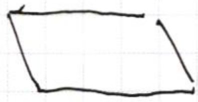
2 ~~22~~ - 2

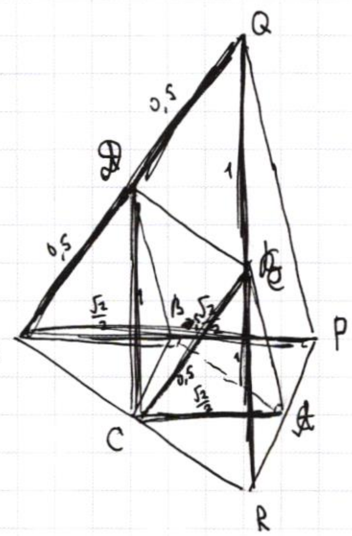
5 ~~23~~ 5

~~24~~ 10 0

~~25~~ 4 2

3 ~~26~~ 3





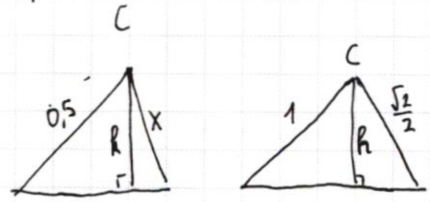
$\frac{1}{2} - h^2 + 1 - h^2$

$\frac{1}{4} - h^2 + x^2 - h^2$

$1,5 =$

$0,5^2 - h^2 = x$

0,5



$1,5 = \frac{1}{4} + x^2$

$1 - h^2 =$

$x^2 = 1,25$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$\angle AEF = \angle CAE \qquad tg\angle CAE = \frac{CD}{CA} = \frac{2}{3}$

(Дополняют равные углы $\angle ADC$ и $\angle EDB$ до $90°$)

$\angle AFE = \angle CBA + \angle CAE \quad (\frown AE = \frown EC + \frown CA) \qquad \angle CBA = \alpha \quad \angle CAE = \beta$

~~расмо~~ $tg(AFE) = tg(\angle CBA + \angle CAE) = \frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$tg\beta = \frac{2}{3} \qquad tg\alpha = \frac{CA}{BC} = \frac{\frac{18}{13}\cdot\frac{65}{24}}{\frac{18}{2}} = \frac{5}{12}$

$tg(AFE) = \frac{\frac{5}{12} + \frac{8}{12}}{1 - \frac{10}{36}} = \frac{13\cdot 36}{12\cdot 26} = \frac{3}{2} \qquad \angle AFE = arctg\left(\frac{3}{2}\right)$

~~BAA~~ ~~$H = EF \cap BC$~~ $EH = 6x$ ~~используя значения~~

трапеция $ECAF$ вписанная $((CA \parallel EF)) \Rightarrow$ равнобокая $(EC = AF)$

$\Rightarrow \angle CEH = \angle AFE$ ~~используя значение тангенсов tg(~~

$\angle CEA = CBA$

из $tg(EFA) = tg(HEC) = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{CH}{EH} = \frac{3}{2} \qquad EH = 6x \quad CH = 9x$

из $tg(\beta) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{HD}{EH} = \frac{2}{3} \Rightarrow HD = 4x \qquad DC = 9x - 4x = 5x$

$\frac{3}{2} = \frac{AC}{DC} = \frac{EH}{HD} \Rightarrow \frac{AC}{5x} = \frac{3}{2} \Rightarrow AC = 7{,}5x \Rightarrow x = \frac{2AC}{15} = \frac{2\cdot 15}{15\cdot 4} = \frac{1}{2}$

$EH = 3;\ HC = 4{,}5 \qquad EF = EH\cdot 2 + CA$ (из равнобедр. трапеции)

$EF = \frac{15}{4} + 6 = 9{,}75$

$S_{AFE} = \frac{EF\cdot HC}{2} = \frac{9\cdot 39}{2\cdot 2\cdot 4} = \frac{351}{16}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 5

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(2)=0 \quad f(3)=0 \quad f(5)=1 \quad f(7)=1$

~~если число есть в разложении~~

$\cancel{f(x) =}$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1 \qquad f(2) = f\left(10 \cdot \frac{1}{5}\right) = f(10) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 1 - f\left(\frac{1}{5}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f\left(5 \cdot \frac{1}{5}\right) = f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 0 \qquad f(1) = 0$

$f\left(2x \cdot \frac{1}{x}\right) = 0 \Rightarrow f(2x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$ ~~если $x \in \mathbb{N}$ то $f(2x) = f(x)$~~

$f(2x) = f(x) = -f\left(\frac{1}{x}\right)$

$f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0 \Rightarrow f(x) > f(y)$

x	$f(x)$
3	0
4	0
9	0

x	$f(x)$
10	1
15	1
20	1
14	1
21	1
22	2
26	3

x	$f(x)$
2	0
3	0
5	1
7	1
11	2
13	3
17	4
19	4
23	5

если в разложении x на простые множители встречаются только двойки и тройки, то $f(x) = 0$ для остальных $x \in [3; 27]$

$f(x)$ равно сумме $f(p_i)$ где p_i его простые множители, таких чисел всего

для 10 чисел из $x \in [3; 27]$ $f(x) = 0$

для 7 чисел $f(x) = 1$

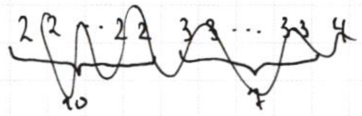
для 3 чисел $f(x) = 2$

для 2 чисел $f(x) = 3$

для 2 чисел $f(x) = 4$

для 1 числа $f(x) = 5$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



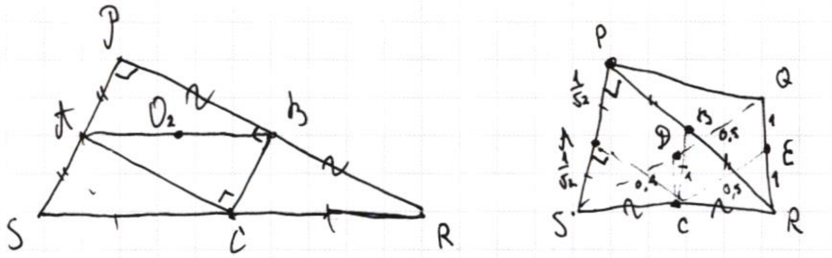
№5

0000000000111111222334 45

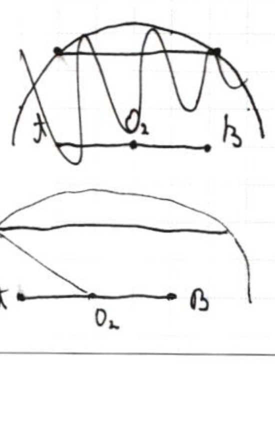
кол-во пар таких, что $f(x/y)<0$ и $f(x)=0$ — $10\cdot15$;
таких, что $f(x)=1$ — $7\cdot8$; таких, что $f(x)=2$ — $3\cdot5$;
таких, что $f(x)=3$ — $2\cdot3$; остальных 2

Суммарное кол-во пар равно $150+56+15+6+2=206+23=229$

№7



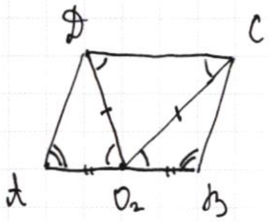
ACBP
~~PABCA~~ - параллелограм (по свойствам ср. линий), вписанный в окружность (сечение сферы) => ~~это прям~~ ACBP-прямоуг.
и перпендикуляр из O(центра сферы) падает в ~~середину~~ центр пр-ка ACBP - середину AB - O_2
по свойствам средних линий ~~E и D~~ $ED \parallel (ABC)$ пл.
E и D ∈ сфере => они равноудалены от O, $DE\parallel(ABC)$ =>
E и D равноудалены от середины AB - O_2
$SR\parallel AB\parallel DE$ => обр. плоскость (ABD) => ABED ~~трапеция~~ ~~(равнобокая по св-ву ср. линий)~~
$AB\parallel DE$ и $AB=DE$ по св-ву ср. линий



D и E равноудалены от середины AB
⇓
ABDE - параллелограм
~~ABDE прямоугольник~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 7



$O_2D = O_2C \Rightarrow \angle CDO_2 = \angle DCO_2$ из $DC \parallel AB \Rightarrow \angle DO_2A = \angle O_2DC$

аналогично $\angle CO_2B = \angle DCO_2 = \angle O_2DC = \angle DO_2A$

$\triangle AO_2D$ и BO_2C равны по 2-м ст-нам и углу $\Rightarrow$

$\Rightarrow \angle DAB = \angle CBA$, $\angle ABC = \cancel{\angle DAB} + 180° - \angle DAB \Rightarrow \angle CBA = 90° = \angle BAC \Rightarrow$

$ABCD$ ~~параллелограм~~ прямогугольник

Рассмотрим плоскости $CB\cancel{D}E$ и CAD

$AD = BE$ как диагонали прямоугольника

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

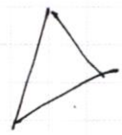
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

00001

~~А~~	~~Б~~	~~В~~	~~Г~~	~~Д~~	Е	Ё	Ж
З	И	К	Л	М	Н	О	П
Р	С	Т	У	Ф	Х	Ц	Ч
Ш	Щ	Ъ	Ы	Ь	Э	Ю	Я



$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\log_3(4)^{\log_4(5)}$

15

5	7
10	14
15	21
20	
25	

$f(5) = 1$

7

10

f 11

12

$\mathbb{R}_+$

$f(10 \cdot \frac{1}{5}) = 0 = 1 - 1$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(\frac{1}{5}) = -1$

$f\,2 \cdot 3 = 0 + 0$

$f(5 \cdot \frac{1}{5}) =$

$f(1) = 1$

$f(6) = 0$

$f($ 1, 3, 4, 6, 8, 9

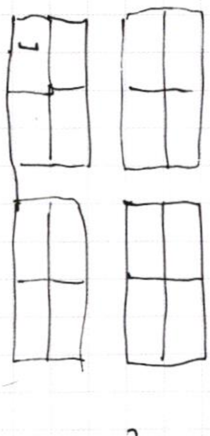
$f(x \cdot \frac{1}{y})$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$3 \cdot 3 \cdot 3$

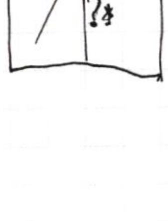
24



$f\,9.$

$f(18 \cdot \frac{1}{9}) = 0$

f



11	3	12
	4	16
22	6	18
	9	24
26	8	27

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$x(x+6)$

$3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}$

$3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4$

$3y - 2x \geq 0$

$9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$x >$

$-15xy \quad 4x^2 + 2x - 6xy \quad 9y^2 + 3y - 9xy$

$2x = a$

$3y = b$

$3y \cdot 2x$

$\cancel{A}$ =

9 6

$6xy \quad \log_2(8 \cdot 4) =$ 32

$\cancel{2(2x^2 + x -}$

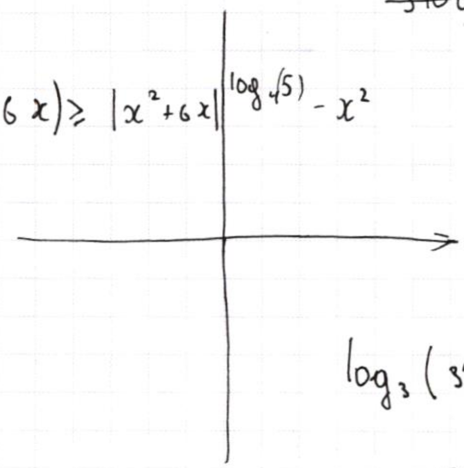
$b^2 + a^2 + a + b - 2ab = \frac{ab}{2} - 2$

$\log(ab) =$

$\cancel{3\log(}$

$\left(3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x\right) \geq |x^2+6x|^{\log_4(5)} - x^2$

$3^{\log_4(a)} \geq |a|^{\log_4(5)} - a$



$\log_3(3) \geq \log_4(a)$

$3\left(y^2 - \frac{4}{3}y + \frac{1}{3}\right)$

$\log_3\left(3^{\log_4}(x^2 + 6x)\right)$

$3(x^2 - 2x + 1)$

$9 \geq 5 - 4 = 1$

$\sqrt{\frac{324 r^2}{169} + 324}$

$\sqrt{3} \geq 4\sqrt{5} - 2$

$3y^2$

$9 \geq$

$\sqrt{\frac{324 r^2 + 324 \cdot 169}{169}} = \frac{18(\sqrt{169 + r^2})}{13}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

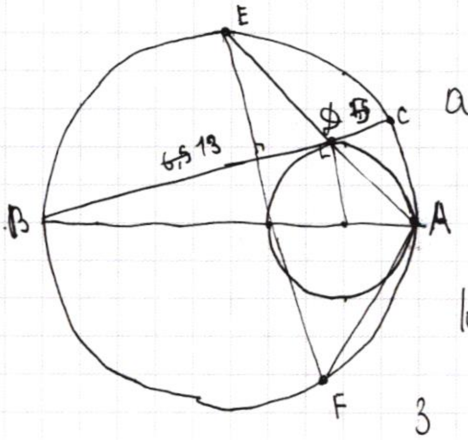
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

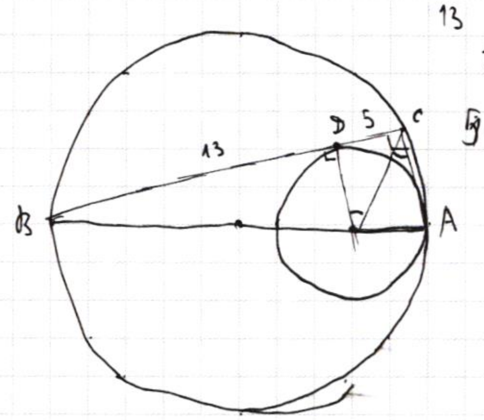
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CA = \frac{r\,18}{13} = \frac{65\cdot 18}{24\cdot 13}\frac{18}{13}$ $\frac{5\cdot 3}{4}$

144
4
576
24
24

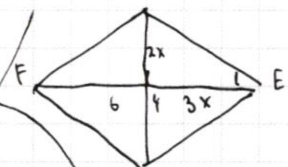


$\log_5(4)^{\log_4 5)}$

3

$\frac{324}{4} + \frac{18}{13}r^2$

$3^{\log_4(a)+1} \geq 5a^{\log_4(5)} - 4a$

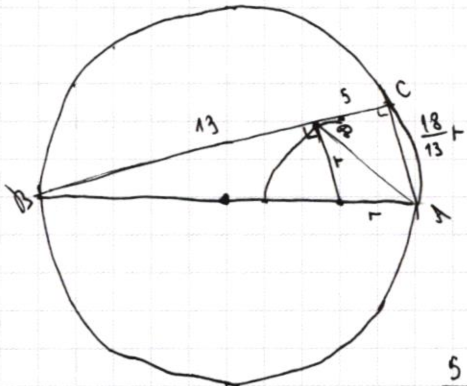


16

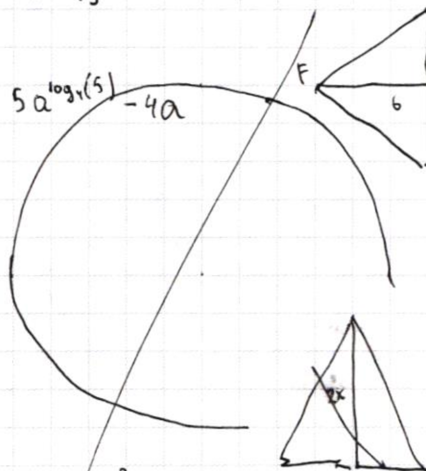
$\sqrt{169+r^2} + r = \frac{18\sqrt{169+r^2}}{13}$

$tg(\alpha+\beta) =$

360
351



$= \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$



$\frac{2}{3}$

$FE \cdot FE \cdot tg$

$\frac{\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta}$

$\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha\, tg\beta}$

$r = \frac{5\sqrt{169+r^2}}{13}$

$324\cdot 169 + 324$

$324(169+1)$

170

$\frac{18^2 r^2}{13^2} + 18^2 = \frac{18^2 (13^2+1)}{13^2}$

18
18
64

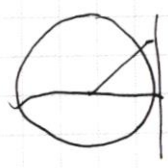
$\frac{9\sqrt{169+r^2}}{13}$

$\sqrt{324 + \frac{324}{169}}$

$(20-2)^2$ $400+4 - 80$

324

$r^2 = \frac{25(r^2+169)}{169}$



$\frac{18\sqrt{170}}{13}$

169

$\frac{144 r^2}{169} = 25.$

$a^{\log_4(5)}$

$r \frac{9\sqrt{170}}{13} = R$

$r^2 =$

4a

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\log_5\left(a^{\log_4(5)}\right)$$

$$\log_5(a)\log_4(5)$$

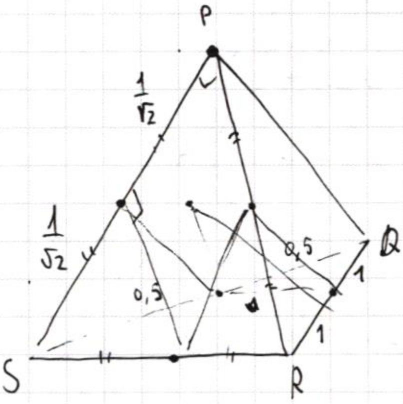
$$3^{\log_4(a)} + a \geq |a|^{\log_4(5)}$$

$$a^{\log_4(5)} \cancel{+a} \; \cancel{5^{\log.}}$$

$$4^{\log_4(a)}$$

$$3^{\log_4(a)} + 4^{\log_4(a)} - a^{\log_4(5)} \geq 0$$

$$\cancel{3}^{\log_4(a)} \qquad 3+4-5$$



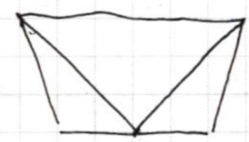
$$f(35) = 2$$

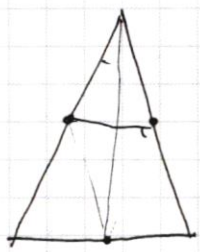
12 3 4 5 6 7 8 9

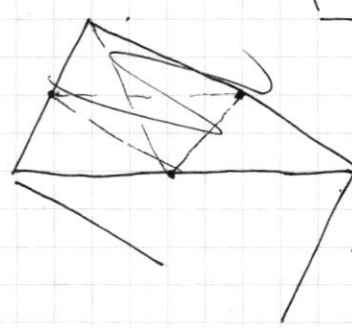
$$f(35\,\tfrac{1}{?}$$

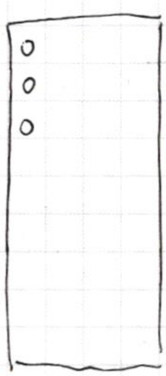
$$f\left(\frac{1}{x}\right)$$

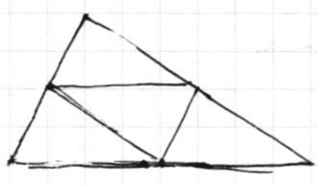
$$f\; 2x \cdot \frac{1}{x}$$

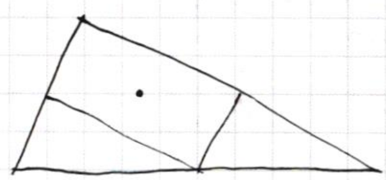


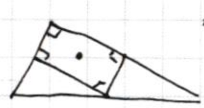


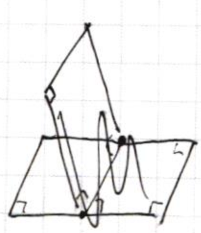


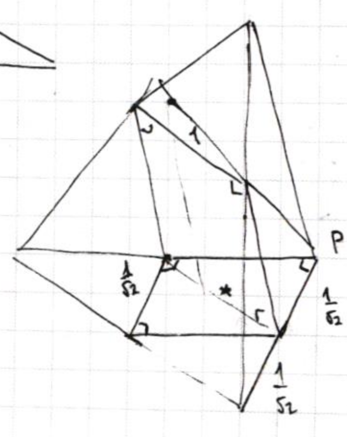












☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)