МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

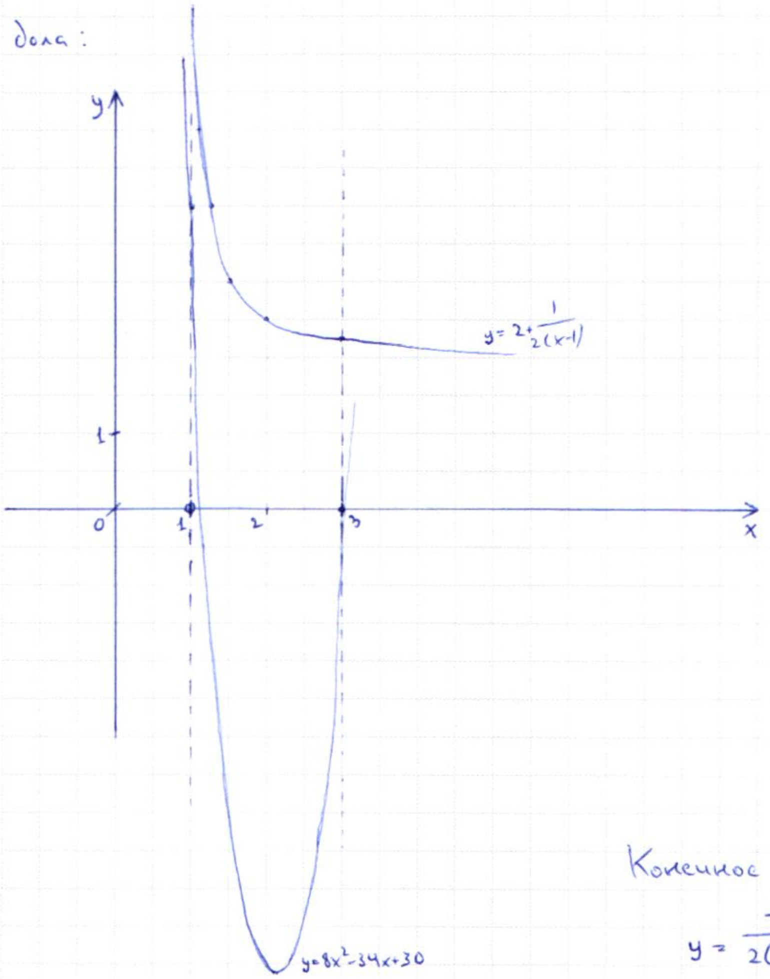
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30 \iff \begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b, \\ 8x^2-34x+30 \leqslant ax+b; \end{cases} \iff \begin{cases} 2+\frac{1}{2(x-1)} \geqslant ax+b, & (1) \\ 8x^2-34x+30 \leqslant ax+b; & (2) \end{cases}$$

Рассматриваем только промежуток $(1;3]$

Представим ~~у~~ неравенства графически – $2+\frac{1}{2(x-1)}$ – гипербола, $ax+b$ – прямая, $8x^2-34x+30$ – парабола:



Найдем производную $\left(2+\frac{1}{2(x-1)}\right)' =$

$$\frac{1}{2}\cdot\left((x-1)^{-1}\right)' = -\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-2} = \frac{-1}{2(x-1)^2}$$

Значит прямые, касающиеся $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$ будут иметь вид:

$$y = \frac{-x}{2(x'-1)^2}+b, \text{ где } x' \text{ – любые}$$

значения ~~в (1;3]~~, кроме 1.

Исходя из того, что ~~в точке x'~~ точка этой прямой с абсциссой x' будет лежать на графике $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$:

$$2+\frac{1}{2(x'-1)} = \frac{-x'}{2(x'-1)^2}+b \iff b = 2+\frac{1}{2(x'-1)}+\frac{x'}{2(x'-1)^2}.$$

Конечное уравнение прямых, касающихся $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$:

$$y = \frac{-x}{2(x'-1)^2}+2+\frac{1}{2(x'-1)}+\frac{x'}{2(x'-1)^2}.$$

Замечание: прямые, касающиеся $y=2+\frac{1}{2(x-1)}$, являются предельными для условия (1), все прямые выше касательных не будут подходить под условие (1).

Значение $y=8x^2-34x+30$ в точке 1 – $8-34+30=4$; в точке 3 – $72-102+30=0$; значит можно составить систему уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{-1}{2(x'-1)^2} + 2 + \dfrac{1}{2(x'-1)} + \dfrac{x'}{2(x'-1)^2} \geq 4 \\ \dfrac{-3}{2(x'-1)^2} + 2 + \dfrac{1}{2(x'-1)} + \dfrac{x'}{2(x'-1)^2} \geq 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} -1 + 4(x'-1)^2 + (x'-1) + x' \geq 8(x'-1)^2, \\ -3 + 4(x'-1)^2 + (x'-1) + x' \geq 0; \end{cases} \Longleftrightarrow$$

$$\begin{cases} -4x'^2 - 4 + 8x' + 2x' - 2 \geq 0, \\ 4x'^2 + 4 - 8x' - 4 + 2x' \geq 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4x'^2 - 10x' + 6 \leq 0, \\ 4x'^2 - 6x' \geq 0; \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x' \in [1; 1{,}5], \\ x' \in (-\infty; 0] \cup [1{,}5; +\infty); \end{cases} \Rightarrow$$

$x' = 1{,}5;$

Это значит, что существует лишь 1 касательная, удовлетворяющая условиям, а значит и одна прямая, т.к остальные прямые будут ниже или выше касательной, следовательно будут пересекать или $y = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$, или $y = 8x^2 - 34x + 30$.

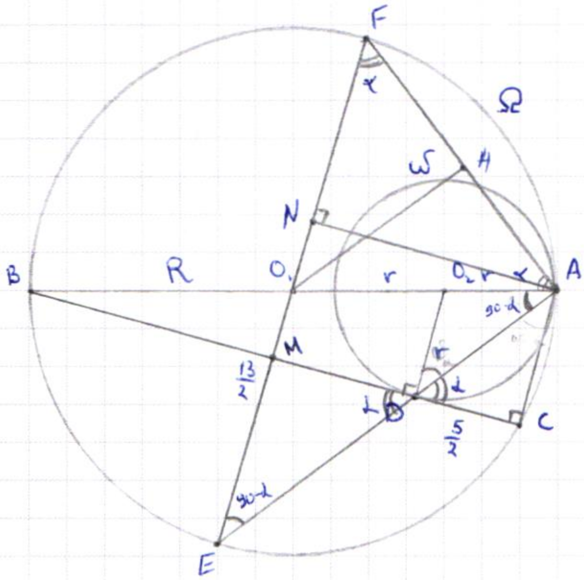
Уравнение касательной: $y = \dfrac{-x}{2 \cdot \frac{1}{4}} + 2 + \dfrac{1}{2 \cdot \frac{1}{2}} + \dfrac{\frac{3}{2}}{2 \cdot \frac{1}{4}} = -2x + 2 + 1 + 3 = -2x + 6 \Longleftrightarrow$

$a = -2;\ b = 6;$

Ответ: $(-2; 6)$;

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Пусть R - радиус большей окружности, r - радиус меньшей окружности

O_1 - центр большей окружности, O_2 - меньшей.

Т.к ~~O_2D~~ BC - касательная, то $\angle BDO_2 = 90°$

Т.к $\angle BCA$ лежит на диаметре, то $\angle BCA = 90°$,

значит $\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{BO_2}{BD} = \frac{BA}{BC} \Leftrightarrow$

$\frac{2R-r}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{9} \Leftrightarrow 18R - 9r = 13R \Leftrightarrow 5R = 9r$

По теореме Пифагора: $AC = \sqrt{4R^2 - 81}$

$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC \Rightarrow \frac{r}{\sqrt{4R^2-81}} = \frac{13}{18} \Leftrightarrow \frac{10R}{\sqrt{4R^2-81}} = 13 \Leftrightarrow \frac{100R^2}{4R^2-81} = 169 \Leftrightarrow$

$100R^2 = 169(4R^2 - 81)$

$169 \cdot 81 = 576R^2$

$169 \cdot 9 = 64 \cdot R^2 \Leftrightarrow R = \frac{13 \cdot 3}{8} = \frac{39}{8}$

$r = \frac{5R}{9} = \frac{5 \cdot 39}{8 \cdot 9} = \frac{5 \cdot 13}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24}$

Промежуточный ответ: r-маленькой окружности $= \frac{65}{24}$; R-большой окружности $= \frac{39}{8}$;

Докажем, что прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, проходит через O_1:

Пусть $\angle BDE = \angle ADC = \alpha$, тогда $\angle O_2DA = 90 - \alpha$; $\angle O_2DA = \angle O_2AD$, т.к $O_2D = O_2A = r \Rightarrow \angle O_2AD = 90 - \alpha$;

$\angle O_1EA = O_1AE$, т.к $O_1E = O_1A = R \Rightarrow \angle O_1EA = 90 - \alpha$; $\angle EHC = 180 - 90 + \alpha - \alpha = 90$, где H - точка пересечения EO_1 и BC. Значит, если прямая $EO_1 \perp BC$, то EF проходит через O_1.

$AC = \sqrt{4R^2 - 81} = \sqrt{4 \cdot \frac{39^2}{64} - 81} = \sqrt{\frac{39^2}{16} - 81} = \sqrt{\frac{39^2 - 81 \cdot 16}{16}} = \frac{\sqrt{39^2 - 81 \cdot 16}}{4}$

$\alpha = \mathrm{arctg}\left(\frac{2AC}{5}\right) = \mathrm{arctg}\left(\frac{\sqrt{39^2 - 81 \cdot 16}}{10}\right)$

$\angle AFE = 180 - 90 - \angle AEF = 90 - 90 + \alpha = \alpha$ ($\angle EAF = 90°$, т.к опирается на диаметр)

$\angle \overset{FE}{\cancel{AEF}} = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{39^2-81\cdot 16}}{10}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{15}{10}\right) = \operatorname{arctg}(1{,}5)$;

Промежуточный ответ: $\angle AFE = \operatorname{arctg}(1{,}5)$;

Проведем высоту O_1H в $\triangle O_1FA$, зная, что $\angle\alpha = \operatorname{arctg}(1{,}5)$, $\frac{O_1H}{FH} = 1{,}5$. Пусть $FH = 2x$, тогда $O_1H = 3x$. По т-ме Пифагора:

$4x^2 + 9x^2 = \frac{39^2}{8^2}$

$x^2 = \frac{39^2}{8^2\cdot 13}$

$x = \frac{39}{8}\cdot\sqrt{\frac{1}{13}}$,

Проведем высоту AN в $\triangle O_1FA$, тогда, зная, что $\angle\alpha = \operatorname{arctg}(1{,}5)$, $\frac{AN}{NF} = 1{,}5$. Пусть $NF = 2y$, тогда $AN = 3y$. По т-ме Пифагора: $4y^2 + 9y^2 = (FH\cdot 2)^2 = 13y^2 = 16x^2$

$y^2 = \frac{16x^2}{13} = \frac{16\cdot\frac{39^2}{8^2}\cdot\frac{1}{13}}{13} = \frac{16\cdot 39^2}{8^2\cdot 13^2} \Rightarrow y = \frac{4\cdot 39}{8\cdot 13} = \frac{3}{2} \Rightarrow AN = \frac{9}{2}$

$S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot AN = R\cdot\frac{9}{2} = \frac{39}{8}\cdot\frac{9}{2} = \frac{351}{16}$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \operatorname{arctg}(1{,}5)$; $S_{\triangle AEF} = \frac{351}{16}$;

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

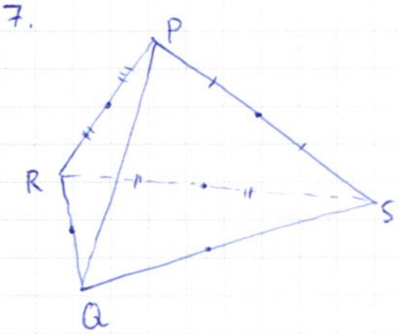
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

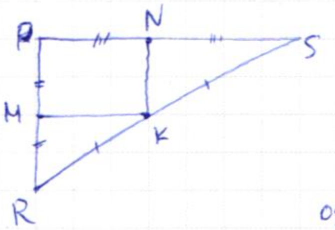
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7.



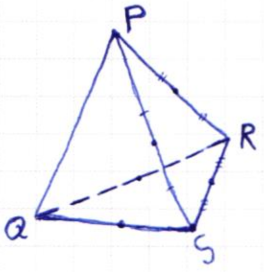
Рассмотрим $\triangle PSR$:



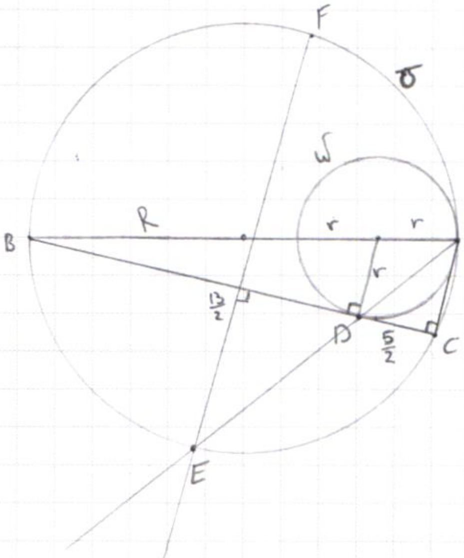
Пусть M, N, K - точки, середины сторон. Т.к они лежат на одной сфере с точкой P, то $MPNK$ - описанный четырехугольник, но при этом он еще и параллелограмм $\Rightarrow \angle RPS = 90°$. ~~$\angle MPN$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



2. $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$



$\frac{2R}{9}=\frac{2R-r}{\frac{13}{2}}$

$18R-9r=13R$

$5R=9r$

$\frac{r}{\frac{13}{2}}=\frac{\sqrt{(2R)^2-81}}{9}$

$\frac{10R}{13}=\sqrt{4R^2-81}$

$\frac{100R^2}{169}=4R^2-81$

$100R^2=676R^2-13689$

$13689=576R^2$

$627378=1152R^2$

$169 \times 4 = 676$

169×81: 169, 1352, 13689

1052×726: 6312, 2104, 27352

1152×24: 4608, 2304, 27648

$13689 \,|\, 576$: -1152, 2169, 2

6. $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$\begin{cases} \frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b, \\ 8x^2-34x+30 \leq ax+b; \end{cases}$

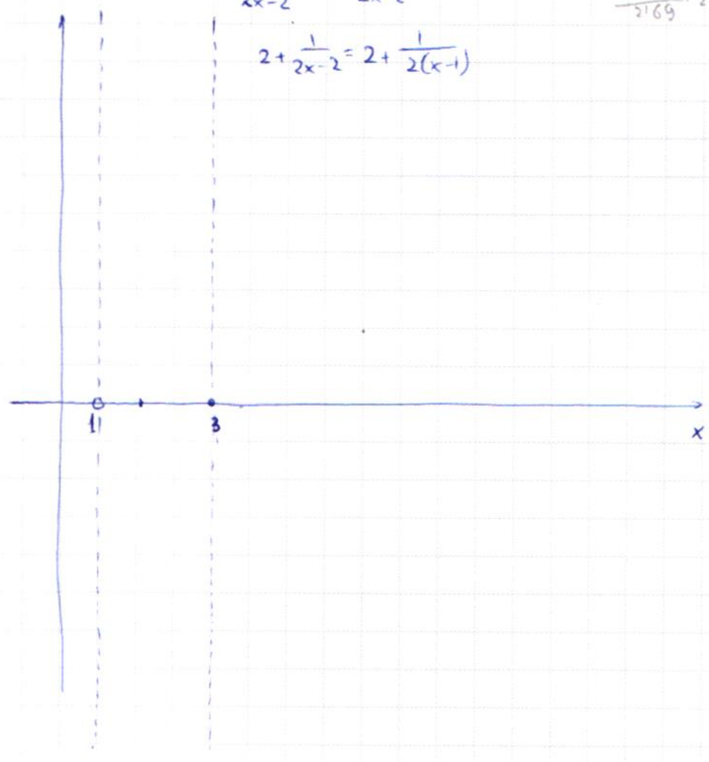
$(1;3]$

$\frac{4x-3}{2x-2}=\frac{4x-4+1}{2x-2}=$

$2+\frac{1}{2x-2}=2+\frac{1}{2(x-1)}$

$8x^2-34x+30$

$x_в=\frac{34}{16}=2\frac{1}{8}$



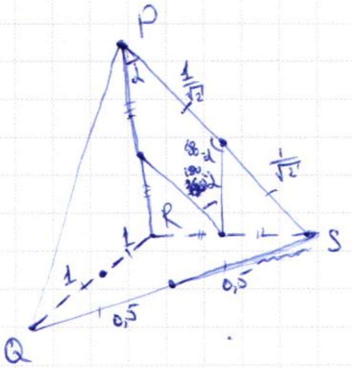
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

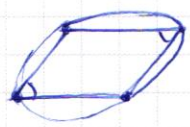
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

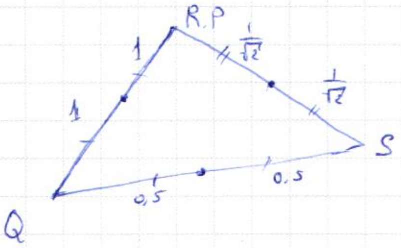
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

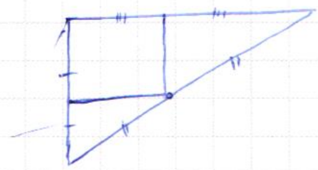
7.





$180-\alpha = 180-180+\alpha \Rightarrow \alpha = 90°$





1. $\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$ $\quad tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)\cdot\cos 2\beta + (\cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin 2\beta)\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta - \sin 2\alpha\cdot\sin^2 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta - \sin 2\alpha(\sin^2 2\beta - 1) = -\frac{8}{17}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\frac{-\cos 2\beta}{\sqrt{17}} + \frac{\cos 2\alpha\cdot \cancel{\sin 4\beta}}{\cancel{2}}$ ($\cos 2\beta\cdot\sin 2\beta$) $+ \sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\frac{-1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta)} = -\frac{8}{17} + \frac{1}{\sqrt{17}} = \frac{-8+\sqrt{17}}{17}$

$\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta + \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta = \frac{-8+\sqrt{17}}{17}$

$ctg 2\alpha\cdot tg 2\beta + 1 = \frac{-8+\sqrt{17}}{17(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta)}$

$\begin{array}{r} 8 \\ \times 39 \\ 39 \\ \hline 1521 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 2 \\ \times 39 \\ 39 \\ \hline 351 \\ 117 \\ \hline 1521 \end{array}$

$-\sin^2 2\beta + 1 =$
$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta$

$\sin^2 2\beta - 1 =$
$\sin^2 2\beta - \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta =$
$-\cos^2 2\beta$

$(40-1)^2 =$
$1600+1-80 =$
1521

$\begin{array}{r} \times 81 \\ 16 \\ \hline 486 \\ 81 \\ \hline 1296 \end{array}$

$R = \frac{39}{8}$

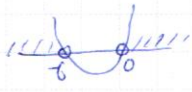
$r = \frac{65}{24}$

225

3. $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$ $\quad x^2+6x > 0$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}$



$x^2+6x = t$ $\quad t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

$\log_4 t \geq \log_4 (t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3})$

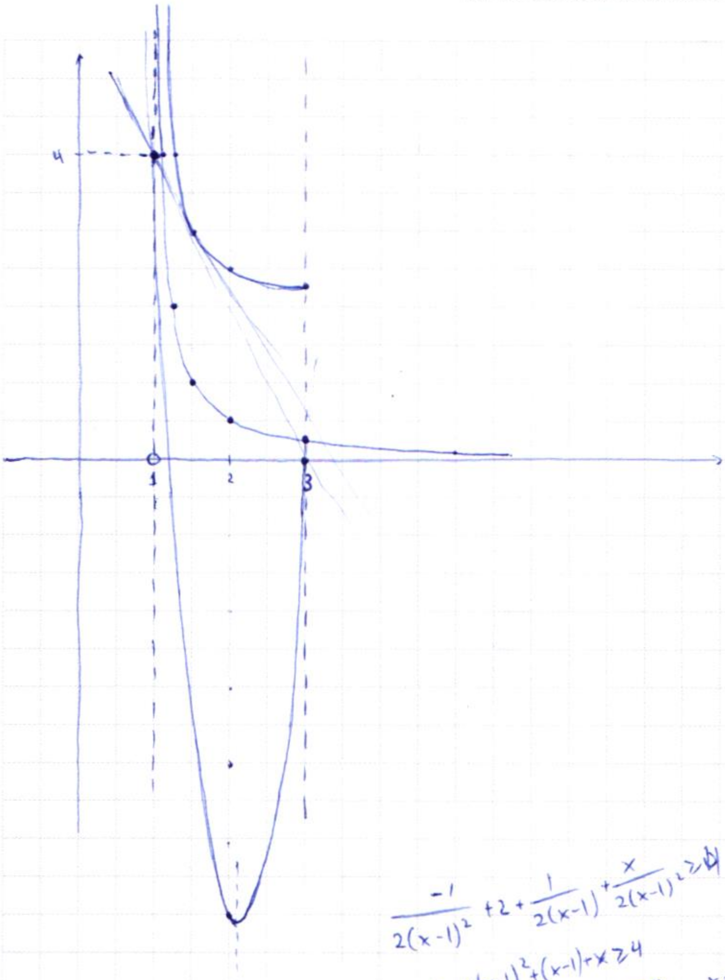
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$8\cdot4-68+30=32+30-68=62-68=-6$

$8\cdot9-102+30=0$

$x6=\frac{34}{16}=2\frac{1}{8}$

$y=ax+b$

$y(1)\geq4$

$y(3)\geq0$

$y\leq2+\frac{1}{2(x-1)}$

$A(1;4)$

$B(3;0)$

$y'=\ x+$

$4=a+b$

$0=3a+b$

$a=-2\quad b=6$

$y'=-2x+6$

$-2x+6=2+\frac{1}{2(x-1)}$

$(-2x+6)(x-1)=2(x-1)+\frac{1}{2}$

$-2x^2+2x+6x-6=2x-2+\frac{1}{2}$

$-x^2+x+3x-3=x-1+\frac{1}{4}$

$-x^2+3x-3+1-\frac{1}{4}=0$

$x^2-3x+3-1+\frac{1}{4}=0$

$x^2-3x+\frac{9}{4}=0$

$D=9-9=0$

$x=\frac{3}{2}$

$\frac{-1}{2(x-1)^2}+2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x}{2(x-1)^2}\geq4$

$1+4(x-1)^2+(x-1)+x\geq4$

$4x^2+4-8x+2x-1-1-4\geq0$

$4x^2-6x-2\geq0$

$D=36+32=68$

$x_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{68}}{8}$

$y=\frac{-x^1}{2(x-1)^2}+2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x}{2(x-1)^2}$

$-\frac{1}{2}x2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}$

$\frac{-3}{2(x-1)^2}+2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x}{2(x-1)^2}\geq0$

$-3+4(x-1)^2+(x-1)+x\geq0$

$4x^2+4-8x-3+2x-1\geq0$

$4x^2-6x\geq0$

$x(4x-6)\geq0$

0 1,5

$\left(2+\frac{1}{2(x-1)}\right)'=$

$\left(\frac{1}{2}\cdot(x-1)^{-1}\right)'=\frac{1}{2}\cdot\left((x-1)^{-1}\right)'=\frac{1}{2}\cdot-1\cdot(x-1)^{-2}=$

$y=\frac{-1}{2(x-1)^2}+b$

$\frac{-1}{2(x-1)^2}\Rightarrow k=(-\infty;-\frac{1}{8}]$

$x=\frac{3}{2}:\quad\frac{-1}{2\cdot\frac{1}{4}}=-2$

$\frac{-1}{2(2)^2}$

$\frac{-1}{8}$

$(-\infty;-2)$

$\frac{-1}{2}$

$2+\frac{1}{2(x-1)}=\frac{-x}{2(x-1)^2}+b$

$b=2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x}{2(x-1)^2}$

$\begin{cases}k\cdot1+b\geq4,\\k\cdot\frac{2}{3}+b\geq0;\end{cases}$

$(-\infty;-2)+b\geq4$

$(-\infty;-6)+b\geq0$

$\frac{-1}{2(x-1)^2}+2+\frac{1}{2(x-1)}+\frac{x}{2(x-1)^2}\geq4$

$-1+4(x-1)^2+(x-1)+x\geq8(x-1)^2$

$-1-4(x-1)^2+2x-1\geq0$

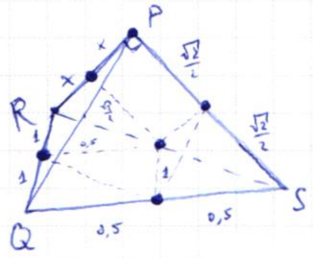
$-4x^2-4+8x+2x-2\geq0$

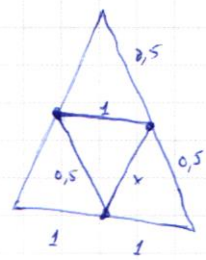
$-4x^2+10x-6\geq0$

$-2x^2+5x-3\geq0$

$D=25-24=1$

$x_{1,2}=\frac{-5\pm1}{-4}=1,5;\ 1$





$\frac{2R-r}{\frac{13}{2}} = \frac{2R}{9}$

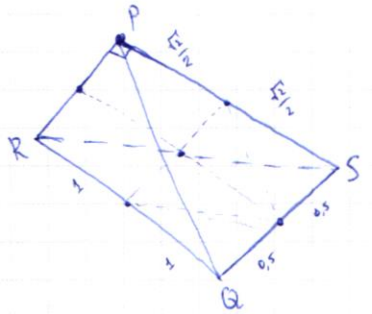
$18R-9r=13R$

$5R=9r$

$\frac{2(R-r)}{r} = \frac{13}{5}$

$10R-5r=13r$

$10R$



$x^2+6x \geq 0$

$x \in (-\infty;-6) \cup (0;+\infty)$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5}$

23

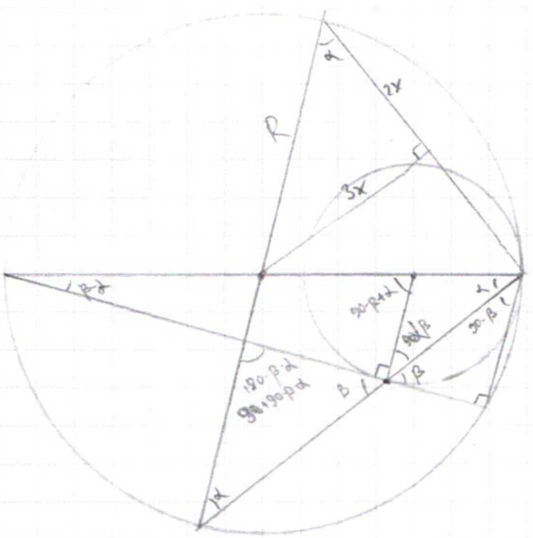
$\times\begin{array}{r}169\\4\end{array}$

676

$\log_1 \; t^{\log_4(1}$

576	2
288	2
144	2
72	2
36	2
18	2
9	3
3	3

576 | 9
54 | 64
36



$4x^2+9x^2=R^2$

8

$\times\begin{array}{r}39\\9\end{array}$

351

360

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)