МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2.

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases}$$

(2): $x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

(1) $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \\ x-2y\geqslant 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0 \; (*) \\ x\geqslant 2y \end{cases}$$

(*) $D=(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

Т.о.

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{5y-1+3y-3}{2} \\ x=\dfrac{5y-1-3y+3}{2} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} x=4y-2 \\ x=y+1 \end{array}\right.$$

Подставим $x = 4y - 2$ во второе уравнение системы

$$(4y-4)^2 + (3y-3)^2 = 25$$

$$25(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = 1$$

$$\left[\begin{array}{ll} y = 2 & (x = 6) \\ y = 0 & (x = -2) \end{array}\right.$$

Получим 2 решения $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Проверим, удовлетворяют ли данные решения условию $x \geqslant 2y$

$\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$ $6 \geqslant 4$ (верно)

$\begin{cases} x = -2 \\ y = 0 \end{cases}$ $-2 \geqslant 0$ (неверно)

Т.о. в ответ пойдёт ~~[illegible]~~ решение $\begin{cases} x = 6 \\ y = 2 \end{cases}$

Подставим $x = y + 1$ во второе уравнение системы

$$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = \frac{25}{10}$$

$$(y-1)^2 = \frac{5}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} y - 1 = \frac{\sqrt{10}}{2} \\ y - 1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right.$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{ll} y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2} & \left(x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} & \left(x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2}\right) \end{array}\right.$$

Получили 2 решения

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Проверим, удовлетворяют ли данные решения условию $x \geq 2y$

$$\begin{cases} x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \qquad 2+\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2+\sqrt{10}$$

$$\frac{\sqrt{10}}{2} \geq \sqrt{10} \text{ (неверно)}$$

$$\begin{cases} x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases} \qquad 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq 2-\sqrt{10}$$

$$-\frac{\sqrt{10}}{2} \geq -\sqrt{10}$$

$$\sqrt{10} \geq \frac{\sqrt{10}}{2} \text{ (верно)}$$

Т.о. в ответ пойдёт решение $\begin{cases} x = 2-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$, $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№3. $5^{-\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

ОДЗ: $x^2+18x>0$. Значит $|x^2+18x| = x^2+18x$

$5^{-\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x \geqslant 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$5^{-\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geqslant 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

Замена: $\log_{12}(x^2+18x) = t$

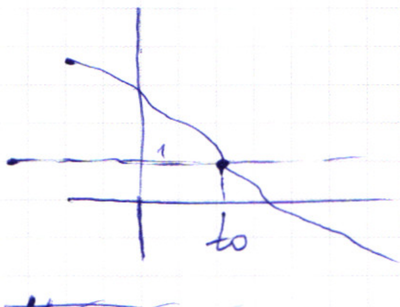
$5^{-t} + 12^{t} \geqslant 13^{t}$

Разделим обе части неравенства на $13^t > 0$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t \geqslant 1$.

$f(t) = \left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t$ — убывает на $D(t)$

Схематически изобразим график



t_0 — корень уравнения

$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t = 1$

~~Из рисунка видно, что решением~~

Функция $f(t)$ монотонна (убывает), а монотонная функция каждое своё значение принимает в единственной точке. Значит уравнение $f(t) = 1$ имеет не более одного корня

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t = 1$$

$t = 2 = t_0$ $\left(\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = \frac{25+144}{169} = \frac{169}{169} = 1 \right)$

Т.о. решением неравенства $f(t) \geq 1$

будет $t \leq t_0$

$t \leq 2$

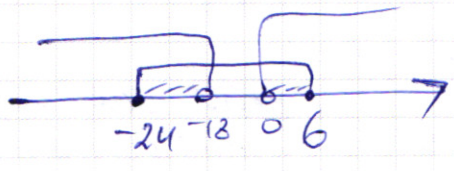
Обратная замена; $\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$\log_{12}(x^2+18x) \leq \log_{12} 144$

$$\begin{cases} x^2+18x \leq 144 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2+18x-144 \leq 0 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$$

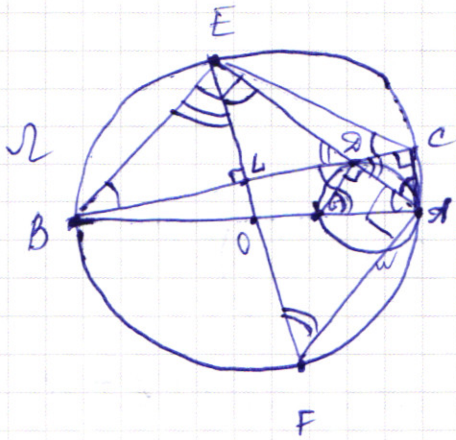
$$\begin{cases} (x+24)(x-6) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$$



$x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

№4



Дано:

Ω, ω - окружности

Ω и ω касаются в точке A внутренним образом

BC - хорда Ω

ω и BC касаются в D

$AD \cap \Omega = E$

$EF \perp BC$

$F \in \Omega$

Найти: $r_1, r_2, \angle AFE, S_{AEF}$, если $CD = 8$, $BD = 17$

Решение:

1. Пусть $AB \cap \omega = G$, тогда AG - диаметр ω $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle ADG = 90^\circ$ (как вписанный и опирающийся на диаметр). Аналогично, $\angle BCA = 90^\circ$ (для окр-ти Ω)

2. BC - касательная к ω $\Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BDG = \angle DAG = \alpha$ (угол между хордой и касательной равен вписанному углу, опирающемуся на эту хорду)
$\angle CDA = \angle DGA = \beta$

3. В $\triangle ADG$: $\angle ADG = 90^\circ$, $\angle DGA = \beta$, $\angle DAG = \alpha$
В $\triangle DCA$: $\angle DCA = 90^\circ$, $\angle CDA = \beta$
$\Rightarrow \angle CAD = \alpha$

Т.о. $\angle EAB = \angle EAC = \alpha \Rightarrow \overset{\frown}{BE} = \overset{\frown}{EC} \Rightarrow$
$\Rightarrow BE = EC \Rightarrow \triangle BEC$ - р/б

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4. $\angle BEA = 90^0$ (т.к. опирается на диаметр) и пусть $BC \cap EF = L$
Т.к. $\triangle BEC$ – р/б и EL – высота, опущенная на основание, то EL – медиана $\Rightarrow BL = LC = \frac{BD+CD}{2} = \frac{17+8}{2} = \frac{25}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow LD = LC - CD = \frac{25}{2} - 8 = \frac{25-16}{2} = \frac{9}{2}$
Т.о. $\triangle BED$ – прямоугольный, EL – высота $\Rightarrow$
$\Rightarrow EL^2 = BL \cdot LD = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2} \Rightarrow EL = \frac{15}{2} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ по т. Пифагора $ED = \sqrt{EL^2 + LD^2} = \frac{\sqrt{225+81}}{2} = \frac{\sqrt{306}}{2} = \frac{3\sqrt{34}}{2}$
$\angle EDL = \angle CDA = \beta$ (как вертикальные) $\Rightarrow$
$\Rightarrow \cos\beta = \frac{LD}{ED} = \frac{\cancel{9} \cdot 2}{2 \cdot \cancel{3}\sqrt{34}} = \frac{3\sqrt{34}}{34} = \frac{CD}{AD} \Rightarrow AD = \frac{CD \cdot \sqrt{34}}{3} = \frac{8\sqrt{34}}{3}$
$\sin\beta = \frac{AD}{AF} = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1 - \frac{9}{34}} = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow AF = \frac{5AD}{\sqrt{34}} = \frac{8 \cdot \sqrt{34} \cdot 5}{3 \cdot \sqrt{34}} =$
$= \frac{40}{3} = 2r_2 \Rightarrow r_2 = \frac{20}{3}$.

~~5. BD касательная к W $\Rightarrow$ по свойству отрезка касательной: $BD^2 = BG \cdot BA = (AB - AF) \cdot AB = 17^2$~~
~~$AB^2 - \frac{40}{3}AB - 289 = 0 \Leftrightarrow 3AB^2 - 40AB - 867 = 0$~~
~~$\frac{D}{4} = 400 + 3 \cdot 867 = 3001$~~
~~$AB = \frac{20+\sqrt{3001}}{3} = 2r_1 \Rightarrow r_1 = \frac{20+\sqrt{3001}}{6}$~~

5. $\angle AFE = \angle EBA$ (как вписанные и опирающиеся на одну и ту же дугу). $\angle EBA = 90^0 - \angle EAB$ (из $\triangle AEB$) $= 90^0 - \alpha = \beta$
$\sin\beta = \frac{5}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34} \Rightarrow \beta = \angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$ $\left(\sin\angle AFE = \frac{5\sqrt{34}}{34}\right)$

6. В $\triangle ELD$: $\left.\begin{array}{l}\angle ELD = 90^0 \\ \angle EDL = \beta\end{array}\right\} \Rightarrow \angle DEL = \alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

В $\triangle EAF$: $\angle AEF = \alpha$, $\angle AFE = \beta \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ \Rightarrow$

$\Rightarrow EF =$ диаметр.

7. По свойству ~~секущих~~ хорд для ~~секущих~~ хорд BC, EF:

$$BL \cdot LC = EL \cdot LF \Rightarrow LF = \frac{BL \cdot LC}{EL} = \frac{25^2 \cdot 2}{2^2 \cdot 15} = \frac{25 \cdot \cancel{25} \cdot \cancel{2}}{2 \cdot \cancel{2} \cdot \cancel{15}} = \frac{125}{6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow EF = EL + LF = \frac{15}{2} + \frac{125}{6} = \frac{75+125}{6} = \frac{200}{6} = \frac{100}{3} = 2r_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r_1 = \frac{50}{3}$$

8. В $\triangle EAF$: $\cos\beta = \frac{AF}{EF} \Rightarrow AF = EF \cdot \cos\beta = \frac{100}{3} \cdot \frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{100}{\sqrt{34}}$

$$S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{100}{3} \cdot \frac{100}{\sqrt{34}} \cdot \frac{5\sqrt{34}}{34} = \frac{12500}{51}$$

Ответ: $r_1 = \frac{50}{3}$; $r_2 = \frac{20}{3}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{5\sqrt{34}}{34}$; $S_{AEF} = \frac{12500}{51}$

№5.

$f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$, $f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$, $f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1$; $f(6) = f(2) + f(3) = 0$; $f(7) = [\frac{7}{4}] = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0$; $f(9) = f(3) + f(3) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2$; $f(12) = f(3) + f(4) = 0$; $f(13) = [\frac{13}{4}] = 3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(3) + f(5) = 1$; $f(16) = f(4) + f(4) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4$; $f(18) = f(2) + f(9) = 0$; $f(19) = [\frac{19}{4}] = 4$;

$f(20) = f(4) + f(5) = 1$; $f(21) = f(3) + f(7) = 1$; $f(22) =$

$= f(2) + f(11) = 2$, $f(23) = [\frac{23}{4}] = 5$, $f(24) = f(2) + f(12) = 0$

$f(2 \cdot \frac{1}{2}) = f(2) + f(\frac{1}{2}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$; $f(6 \cdot \frac{1}{3}) = f(6) + f(\frac{1}{3}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{3}) = 0$; $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2}) = 0$; $f(10 \cdot \frac{1}{5}) = f(10) + f(\frac{1}{5}) =$

$= 0 \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1$; $f(\frac{1}{6}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{3}) = 0$

$f(\frac{14}{7}) = f(14) + f(\frac{1}{7}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{7}) = -1$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\frac{1}{8}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{4}) = 0$; $f(\frac{1}{9}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{3}) = 0$

$f(\frac{1}{10}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{5}) = -1$; $f(\frac{22}{11}) = f(22) + f(\frac{1}{11}) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(\frac{1}{11}) = -2$; $f(\frac{1}{12}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(\frac{26}{13}) = f(2) + f(13) + f(\frac{1}{13}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{13}) = -3$

$f(\frac{1}{14}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{7}) = -1$; $f(\frac{1}{15}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{5}) =$

$= -1$; $f(\frac{1}{16}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{4}) = 0$; $f(\frac{34}{17}) = f(2) + f(17) + f(\frac{1}{17}) =$

$= 0 \Rightarrow f(\frac{1}{17}) = -4$; $f(\frac{1}{18}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{9}) = 0$

$f(\frac{38}{19}) = f(2) + f(19) + f(\frac{1}{19}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{19}) = -4$

$f(\frac{1}{20}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{5}) = -1$; $f(\frac{1}{21}) = f(\frac{1}{3}) + f(\frac{1}{7}) = -1$

$f(\frac{1}{22}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{1}{11}) = -2$; $f(\frac{46}{23}) = f(2) + f(23) + f(\frac{1}{23}) =$

$= 0 \Rightarrow f(\frac{1}{23}) = -5$; $f(\frac{1}{24}) = f(\frac{1}{4}) + f(\frac{1}{6}) = 0$

Т.о. $f(\frac{1}{5}) = -1$ $\quad f(\frac{1}{19}) = -4$

$f(\frac{1}{7}) = -1$ $\quad f(\frac{1}{20}) = -1$

$f(\frac{1}{10}) = -1$ $\quad f(\frac{1}{21}) = -1$

$f(\frac{1}{11}) = -2$ $\quad f(\frac{1}{22}) = -2$

$f(\frac{1}{13}) = -3$ $\quad f(\frac{1}{23}) = -5$

$f(\frac{1}{14}) = -1$

$f(\frac{1}{15}) = -1$

$f(\frac{1}{17}) = -4$

$f(\frac{x}{y}) < 0$; $f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(x)=0$	11 раз	$f(\frac{1}{y})=0$	10 раз
$f(x)=1$	7 раз	$f(\frac{1}{y})=-1$	7 раз
$f(x)=2$	2 раза	$f(\frac{1}{y})=-2$	2 раза
$f(x)=3$	1 раз	$f(\frac{1}{y})=-3$	1 раз
$f(x)=4$	2 раза	$f(\frac{1}{y})=-4$	2 раза
$f(x)=5$	1 раз	$f(\frac{1}{y})=-5$	1 раз

Посчитаем количество пар $(x;y)$, когда

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$11\cdot(7+2+1+2+1) + 7\cdot(2+1+2+1) + 2\cdot(1+2+1) +$

$+ 1\cdot(2+1) + 2\cdot 1 + 1\cdot 0 =$

$= 11\cdot 13 + 7\cdot 6 + 2\cdot 4 + 3 + 2 + 0 = 143+42+8+5 =$

$= 143 + 55 = 198$

Ответ: 198.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+$
$+\sin 2\alpha=\sin 2\alpha\,(\cos 4\beta+1)+\cos 2\alpha\sin 4\beta=$
$=\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta=$
$=2\cos 2\beta\,(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)=2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=$
$=-\frac{4}{5}\Rightarrow\cos 2\beta=\frac{-4}{10\sin(2\alpha+2\beta)}=\frac{-2\sqrt{5}}{5\cdot(-1)}=\frac{2}{\sqrt{5}}\Rightarrow$

$\Rightarrow\sin 2\beta=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 4\beta=\pm\frac{2}{5}=2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta$ $\qquad\cos 4\beta=\frac{4}{5}-\frac{1}{5}=\frac{3}{5}=\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta$

I) $\sin 4\beta=\frac{2}{5}$

$\frac{3}{5}\sin 2\alpha+\frac{2}{5}\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$8\sin 2\alpha+2\cos 2\alpha=-4$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-2\Rightarrow\cos 2\alpha+1=-1-4\sin 2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{2\cos\alpha\sin\alpha}{2\cos^2\alpha}=\frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+1}$

$4\sin 2\alpha+1-\sin^2 2\alpha=-2$

$\sin^2 2\alpha-4\sin 2\alpha-3=0$

$\sin 2\alpha=2\pm\sqrt{7}$

$2+\sqrt{7}>1\Rightarrow\sin 2\alpha=2-\sqrt{7}$ $\qquad\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin 2\alpha}{-1-4\sin 2\alpha}=$

$-1<2-\sqrt{7}<1$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$= \dfrac{2-\sqrt{7}}{-1-8+4\sqrt{7}} = \dfrac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{7}-9}$

2) $\sin 4\beta = -\dfrac{2}{5}$

$\dfrac{3}{5}\sin 2\alpha - \dfrac{2}{5}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\dfrac{4}{5}$

$8\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -4$

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -2 \quad \Rightarrow \cos 2\alpha + 1 = 4\sin 2\alpha + 3$

$4\sin 2\alpha + \sin^2 2\alpha - 1 + 2 = 0$

$\sin^2 2\alpha + 4\sin 2\alpha + 1 = 0$

$\sin 2\alpha = -2 \pm \sqrt{3}$

$-2-\sqrt{3} < -1$

$-1 < -2+\sqrt{3} < 1 \Rightarrow \sin 2\alpha = -2+\sqrt{3}$

$tg\alpha = \dfrac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1} = \dfrac{\sin 2\alpha}{4\sin 2\alpha + 3} = \dfrac{\sqrt{3}-2}{4\sqrt{3}-5}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$

~~$\dfrac{2}{\sqrt{5}}\sin 2\alpha + \dfrac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha = -\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ $\left(\sin 2\beta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$~~

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

Ответ: $\dfrac{2-\sqrt{7}}{4\sqrt{7}-9}$, $\dfrac{\sqrt{3}-2}{4\sqrt{3}-5}$, —

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha (1+\cos 4\beta) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta =$

$= \sin 2\alpha \cdot \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta =$

$= \cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta) =$

$= \cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta) + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta(\cos 2\alpha \sin 2\beta - \frac{1}{\sqrt5}) = -\frac{4}{5}$

№2. $x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-\overset{3y\cdot 2}{18y} = 12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9 = 25$

$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$

$x^2-4x+9y^2-18y-12=0$

$\frac{D}{4} = 4-9y^2+18y+12 = -9y^2+18y+16 = -(9y^2-18y-16) =$

$= 25-(3y-3)^2$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+x+4y^2+2y-2=0$

$x^2-x(5y-1)+4y^2+2y-2=0$

$(5y-1)^2-4(4y^2+2y-2)$

$25y^2-10y+1-16y^2-8y+8 =$

$= 9y^2-18y+9 =$

$= (3y-3)^2 = D$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$x = \frac{5y-1+3y-3}{2} = \frac{8y-4}{2} = 4y-2 \ (1)$$

$$\boxed{x \geqslant 2y}\ !$$

$$x = \frac{5y-1-3y+3}{2} = \frac{2y+2}{2} = y+1$$

$$(x-2)^2 + (3y-3)^2 = 25$$

$$(4y-4)^2 + (3y-3)^2 = 25$$

$$16(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$6 \geqslant 4$ +

$$(y-1)^2 = 1$$

$y-1=1$ $\boxed{y=2 \quad x=6}$

$y-1=-1$ $y=0$ $x=-2$

$-2 \geqslant 0$ $\ominus$

$$(y-1)^2 + 9(y-1)^2 = 25$$

$$10(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = \frac{5}{2}$$

$\ominus$

$\frac{2+\sqrt{10}}{2} \geqslant 2+\sqrt{10}$

$y-1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$ $y = 1+\frac{\sqrt{10}}{2}$ $x = 2+\frac{\sqrt{10}}{2}$

$y-1 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$ $\boxed{y = 1-\frac{\sqrt{10}}{2} \quad x = \frac{2-\sqrt{10}}{2}}$

$$\frac{2-\sqrt{10}}{2} \geqslant 2-\sqrt{10}$$

$\sqrt{10} \geqslant \frac{\sqrt{10}}{2}$ $\oplus$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}-18x$$

$x^2+18x>0$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x-13^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 0$$

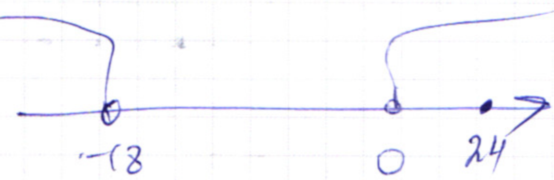
$$5^{\log_{12}t}+t-13^{\log_{12}t} \geq 0 \quad , t>0$$

$$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13}=f(t) \qquad (a^x)'=a^x \cdot \ln a$$

$$f'(t)=\log_{12}5 \cdot t^{\log_{12}5-1}+1-\log_{12}13 \cdot t^{\log_{12}13-1} \quad t^n=\cancel{(n-1)t}\ nt^{n-1}$$

$$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}13}-t^{\log_{12}5} \leq t$$



$$5^{\log_{12}t}+\cancel{t}^{\log_{12}12} \geq 13^{\log_{12}t}$$

$$5^y+12^y \geq 13^y$$

$$\frac{5^y}{13^y}+\frac{12^y}{13^y}=1$$

144
25
169

$y=2=\log_{12}t \Rightarrow t=144=x^2+18x$

12·12

$x^2+18x-144=0$

144
81
225

$(x+6)(x-24)$

$-18+15=-3$

$-18-15=-4$

$-9+15=6$

$-9-15=-24$

$x=6$

$x=24$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

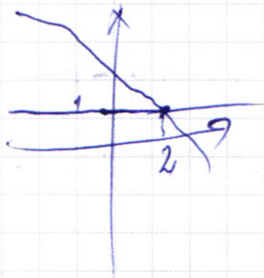
$5^{\log_{12} t} + 12^{\log_{12} t} \geq 13^{\log_{12} t}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\log_{12} t} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\log_{12} t} \geq 1$

$-\infty;$ $\frac{25}{2} \cdot \frac{\cancel{25}}{\cancel{2}} = \frac{\cancel{15}}{\cancel{2}} \cdot x$ $x^2+18x \leq$

$x = \frac{125}{6} + \frac{45}{6} = \frac{170}{6}$ $\log_{12}(x^2+18x)$

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2+18x-13 \geq 0$



$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + 12^{\log_{12}(x^2+18x)} \geq 13^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$\left(\frac{5}{13}\right)^t + \left(\frac{12}{13}\right)^t \geq 1$

t_0-корень $t_0 = 2$ $t \leq 2$

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$

$\log_{12}(x^2+18x) - \log_{12} 144 \leq 0$

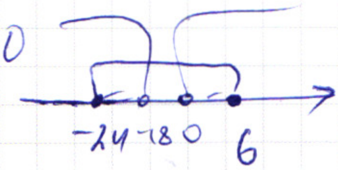
$(x^2+18x-144)(12-1)$

$x^2+18x \leq 144$

$x^2+18x \leq 144$

$\begin{cases} x^2+18x-144 \leq 0 \\ x^2+18x > 0 \end{cases}$

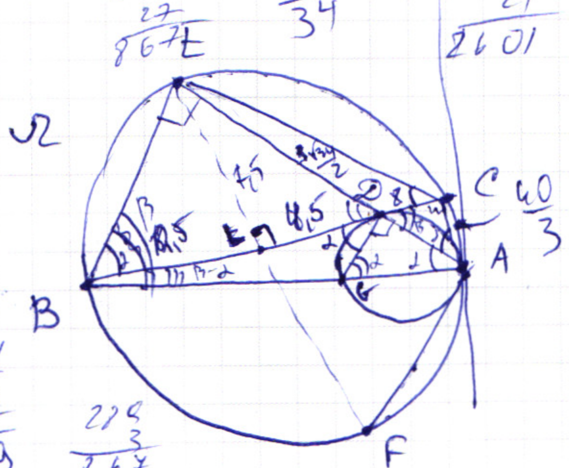
$\begin{cases} (x-6)(x+24) \leq 0 \\ x(x+18) > 0 \end{cases}$



$\frac{9}{2}$ $\boxed{x \in [-24; -18) \cup [0; 6]}$

№4. $\begin{array}{r} 400 \\ 240 \\ 27 \\ \hline 867 \end{array}$ $\begin{array}{r} 25 \\ 9 \\ \hline 34 \end{array}$ $\begin{array}{r} 2400 \\ 180 \\ 21 \\ \hline 2601 \end{array}$

$\begin{array}{r} 59 \\ 59 \\ \hline 531 \\ 295 \\ \hline 481 \end{array}$



$CD = 8$ r_1 r_2

$BD = 12$ $\angle AFE$

S_{AEF}

$\frac{17}{2} = 8,5$

$\triangle ADG \sim \triangle ACD$

$\frac{AD}{AC} = \frac{DG}{CD} = \frac{AG}{AD}$ $AD^2 = AC \cdot AG$

$\begin{array}{r} 17 \\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$ $\begin{array}{r} 289 \\ 3 \\ \hline 867 \\ 3 \\ \hline 2601 \end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$BD^2 = BF \cdot AB = (AB - AF) \cdot AB$

$EL^2 = 12{,}5 \cdot 4{,}5 = \frac{25}{2} \cdot \frac{9}{2}$

$EL = \frac{15}{2} = 7{,}5 = LF$

$EC = \frac{15}{2} ; \frac{9}{2}$ (3·5, 3·3)

$\frac{DG}{\cos\alpha} =$

$\frac{12x+41}{4x+3} = ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$

$\frac{12x+9+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$

$\frac{15}{2} + \frac{9}{2} \qquad \frac{3\sqrt{34}}{2}$

$tg\beta = \frac{\cancel{15}^{5} \cdot 7}{2 \cdot \cancel{9}_{3}} = \frac{5}{3}$

$\frac{AD}{AF} = \sin\beta$

$\frac{4 \cdot 6}{3} ; \frac{4 \cdot 10}{3}$; $\frac{2 \cdot 4}{3} ; \frac{40}{3}$

$\frac{\cancel{15}^{5} \cdot \cancel{7}}{2 \cdot \cancel{3} \cdot \sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{34}$

13, 13, 13

$f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) =$

$f(x) + f(\frac{1}{y}) < 0$

$f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(2) = f(1) + f(2)$

$f(4) = f(2) + f(2)$

$f(\frac{1}{2}) = f(1) + f(\frac{1}{2})$

$f(2) = 0$
$f(3) = 0$
$f(5) = 1$
$f(7) = 1$
$f(11) = 2$
$f(13) = 3$
$f(17) = 4$
$f(19) = 4$
$f(23) = 5$
$f(4) = 0$
$f(6) = 0$
$f(8) = 0$
$f(9) = 0$
$f(10) = 1$

$-(8x^2 + 30x + 17)$

$225 - 8 \cdot 17 = 225 - 136 = 89$

$225 + 81 = 306$

$34 \cdot 9$

$f(4 \cdot \frac{1}{2}) = f(4) + f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(10 \cdot \frac{1}{2}) =$

$f(9 \cdot \frac{1}{3}) = 0 + f(\frac{1}{3}) = 0$

$f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(10 \cdot \frac{1}{5}) = 0 = 1 + f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(\frac{1}{6}) = 0$ $\quad f(\frac{1}{7}) = -1$

$f(\frac{14}{7}) = f(14) + f(\frac{1}{7}) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha =$

$= \sin 2\alpha(\overset{2\cos^2 2\beta - 1}{\cos 4\beta} + 1) + \cos 2\alpha \sin 4\beta =$

$= 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta +$

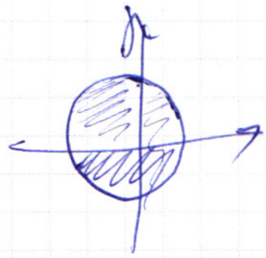
$+ 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) =$

$= 2\cos 2\beta \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt5} \cdot 2\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{\overset{2}{4}}{5} \cdot \frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

4



$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha}$