МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \iff \begin{cases} y-6x=\sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90 \end{cases}$

Введем замену $a=x-1$, $b=y-6$, тогда система принимает вид:

$$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$$

Возведём обе части первого уравнения в квадрат, не забывая про положительность корня:

$$\begin{cases} b^2-12ab+36a^2=ab \\ b-6a\geqslant 0 \end{cases} \iff \begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0 \\ b-6a\geqslant 0 \end{cases}$$

$$D=169a^2-144a^2=25a^2=(5a)^2$$

$$b=\frac{13a\pm 5a}{2}=9a;\ 4a$$

Подставляем полученные значение в 1е уравнение системы, получаем:

$$\left[\begin{array}{l} 9a^2+81a^2=90 \\ 9a^2+16a^2=90 \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} a=\pm 1 \\ a=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right. \text{ Тогда: } \left[\begin{array}{l} b=\pm 9 \\ b=\pm\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$$

При этом пары $(a;b)=(-1;-9)$ и $\left(\frac{3\sqrt{10}}{5};\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$ не выполняют условие $b-6a\geqslant 0$

Подходящим a и b соответствуют x и y:

$$\begin{array}{l} x-1=1 \\ y-6=9 \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x=2 \\ y=15 \end{array} \quad \Bigg\| \quad \begin{array}{l} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{array} \Longrightarrow \begin{array}{l} x=\frac{5-3\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{array}$$

Ответ: $(2;15)$, $\left(\frac{5-3\sqrt{10}}{5};\frac{30-12\sqrt{10}}{5}\right)$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geqslant x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

Введём замену: $x^2-26x=t$

$|t|^{\log_5 12}+t \geqslant 13^{\log_5(-t)}$

Аргумент log должен быть >0, поэтому $t<0$ и модуль раскрывается с минусом

$(-t)^{\log_5 12}-13^{\log_5(-t)} \geqslant t$

По свойству логарифма: $13^{\log_5(-t)}=(-t)^{\log_5 13}$

$(-t)^{\log_5 12}-(-t)^{\log_5 13} \geqslant t$

Рассмотрим функцию $f(t)=(-t)^{\log_5 12}-(-t)^{\log_5 13}$

Функция определена при $t<0$. При этом $f(-1)=0$ и $f(-25)=-25$. Заметим также, что функция возрастающая на всем промежутке определения, поэтому при $t<-25$ неравенство не выполняется, т.к. $y=t$ – горизонтальная прямая, проходящая через точку $(t;0)$.

Значит $-25 \leqslant t<0$.

Обратная замена:

$$\begin{cases} x^2-26x<0 \\ x^2-26x \geqslant -25 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(x-26)<0 \\ (x-1)(x-25) \geqslant 0 \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x \in (0;26) \\ x \in (-\infty;1] \cup [25;+\infty) \end{cases}$$

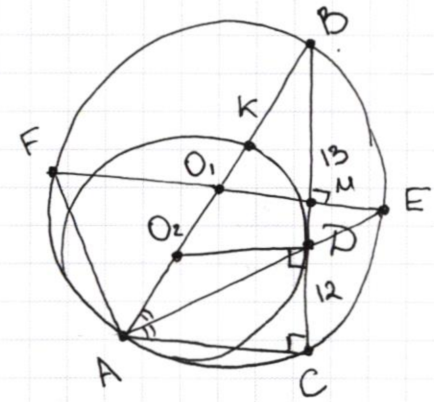
В пересечении система дает:

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



Т.к. Окружности касаются, то центр O_2 лежит на отрезке проведенном к касательной $\Longrightarrow$ O_1 и O_2 лежат на 1 прямой.

$\angle BCA = 90^\circ$ т.к. опирается на диаметр. $O_2D \perp BC$ (отрезок касательной)

$\Longrightarrow O_2D \parallel AC \Longrightarrow \triangle BO_2D \sim \triangle ABC$

Обозначим радиус маленькой ок-ти за r, большой – за R. Из подобия:

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25} \Longrightarrow R = \frac{25}{24} r$

по т. о касательной и секущей:

$BD^2 = BK \cdot AB$

$169 = 2R(2R - 2r) = 4R\left(R - \frac{24}{25}R\right) = \frac{4}{25}R^2$

$R = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{4}} = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$

$r = \frac{\cancel{24}^{12}}{\cancel{25}_{5}} \cdot \frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{2}} = \frac{156}{5}$

Тогда $AB = 2R = 65$. По т. Пифагора $\triangle ABC$: $AC = 60$

Т.к. $\frac{AC}{AB} = \frac{CD}{BD} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$ то AE – бис-са (по обратному св-ву)

Значит $\cup BE = \cup CE$ и т.к. $EF \perp BC$ то M – середина BC

$\Longrightarrow O_1M$ – средняя линия $\triangle ABC \Longrightarrow O_1$ и M лежат на EF и EF – диаметр

$AO_1 = O_1E = R \Longrightarrow \triangle AO_1E$ – р/б

~~$\angle AEF = \angle BAE = \angle CAE = \arcsin\frac{5}{12}$~~

по т. Пифагора $\triangle ACD$: $AD = 12\sqrt{26}$

по т. о пересекающихся хордах:

$BD \cdot CD = AD \cdot DE \implies DE = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$\angle AEF = \angle BAE = \angle CAE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$

Тогда $\sin(\angle AFE) = \sin(90 - \angle AEF) = \cos\angle AEF = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\angle AFE = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$

т.к. $\angle FAE$ лежит на диаметре, то он $= 90^\circ$

$S_{AEF} = \frac{1}{2} AE \cdot EF \cdot \sin\angle AEF = \frac{1}{2}(AD + DE) \cdot EF \cdot \sin\angle AEF =$

$= \frac{1}{2}\left(12\sqrt{26} + \frac{\sqrt{26}}{2}\right) \cdot 65 \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} = \frac{25 \cdot 65}{2} = \frac{1625}{2}$

Ответ: $R = \frac{65}{2}$; $r = \frac{156}{5}$; $\angle AFE = \arccos\frac{5}{\sqrt{26}}$; $S_{AEF} = \frac{1625}{2}$

6.

Рассмотрим функцию $f(x) = 18x^2 - 51x + 28$

$x_0 = \frac{51}{36}$ $\quad f(2) = -2 \quad f\left(\frac{2}{3}\right) = 2$

Это парабола с ветвями вверх все значения которой ниже 2

$g(x) = \frac{8 - 6x}{3x - 2}$ – гипербола с асимптотой $x = \frac{2}{3}$

$ax + b$ – прямая проходящая через точку $(b; 0)$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$\left[\begin{array}{l} b = \pm 9 \\ a = \pm 1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} b = \pm \frac{12\sqrt{10}}{5} \\ a = \pm \frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$ $y - 6 = \pm \frac{12\sqrt{10}}{5}$

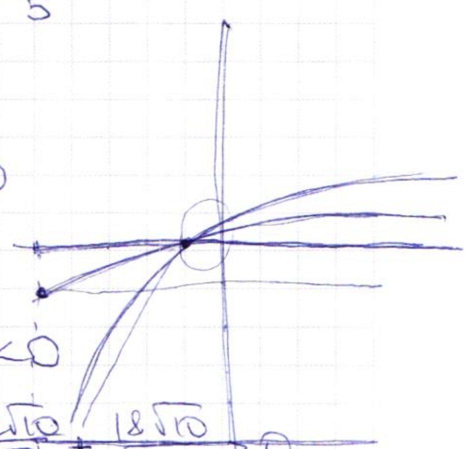
$\left[\begin{array}{l} y-6 = \pm 9 \\ x-1 = \pm 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 15; -3 \\ x = 2; 0 \end{array}\right.$

$y - 6x \geq 0$

$6 - 6a \geq 0$

$\frac{12\sqrt{10}}{5} - \frac{18\sqrt{10}}{5} < 0$

$-\frac{12\sqrt{10}}{5} + \frac{18\sqrt{10}}{5} > 0$



$15 - 12 = \sqrt{30 - 12 - 15 + 6} = 3$

$\cancel{9\cdot 225 +} \cancel{9\cdot 4} + 225 - \cancel{36} - 12\cdot 15 = 45 = 15\cdot 3$

$-3 - 0 =$

$\left[\begin{array}{l} y - 6 = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ x - 1 = -\frac{3\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$ $y = -\frac{12\sqrt{10}}{5} + \frac{30}{5} = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$

$x = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{5}$

$\frac{30-12\sqrt{10}}{5} - \frac{30-18\sqrt{10}}{5} = \sqrt{\frac{(30-12\sqrt{10})(5-3\sqrt{10})}{25}} - \frac{30-18\sqrt{10}}{5} - \frac{30-12\sqrt{10}}{5} + \cancel{\frac{30}{5}}$

$\Rightarrow \frac{6\sqrt{10}}{5} = \frac{(\cancel{150 - 60\sqrt{10} - 90\sqrt{10}} + 360)}{25} - \cancel{150} + \cancel{150\sqrt{10}} = \frac{360}{25} = \frac{6\sqrt{10}}{5}$

$|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

t

$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 t}$

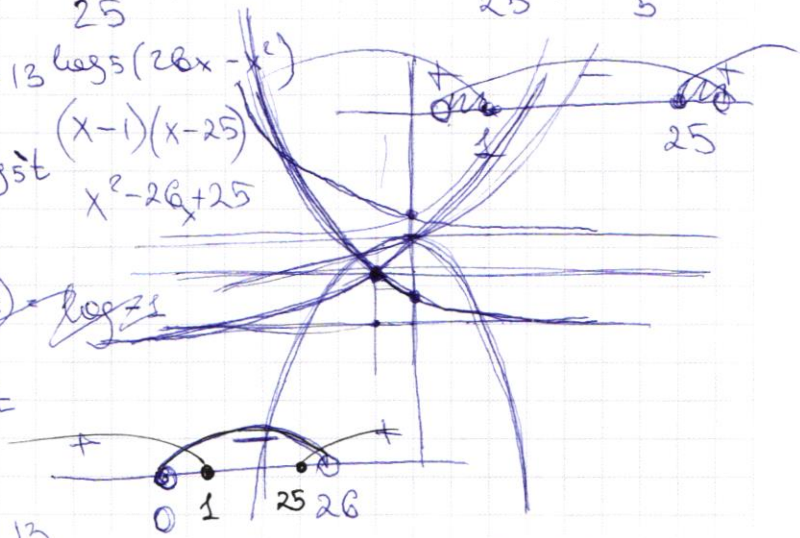
$(x-1)(x-25)$

$x^2 - 26x + 25$

x^2 $\quad -t > 0$

2^x $\quad t < 0$

$\log(-1\cdot t) = \log -1$



$|t|^{\log_5 12} \geq t + 13^{\log_5 -t}$

$|t|^{\log_5 12} - t \geq 13^{\log_5 (-t)} = 13$

$|t|^{\log_5 12} - |t|^{\log_5 13} \geq t$ $\quad x(x-26) < 0$ $\quad 13^{\log_5 -t} = 13^{\frac{\log_{13}(-t)}{\log_{13} 5}} = (-t)^{\log_5 13}$

$(x-1)(x-25) \geq 0$

$|t|^{\log_5 12} - t \geq 13 (-t)$

$12^{\log_5 (-t)} - 13^{\log_5 (-t)} \geq t$

$|t|^{\log_5 12} - |t|^{\log_5 13} \geq t$

$12 - 13 = -1$

$|t|^{\log_5 13} - |t|^{\log_5 12} \leq |t|$

$(-t)^{\log_5 12} - (-t)^{\log_5 13} \geq t^{-1}$

$\lim_{t \to \infty} \left((-t)^{\log_5 12} - (-t)^{\log_5 13}\right)$

0

$0 < t \leq 25$

$12^2 - 13^2 = 144 - 169 = -25$

$-25 \leq t < 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \cancel{\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\alpha+2\beta)+}\ \sin(2\alpha+2\beta)\overset{-\frac{1}{\sqrt{17}}}{}\cos 2\beta +$

$+\sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) =$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta + -\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17} - \sin 2\alpha$

$\sin 2(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha+(\alpha+2\beta)) = \sin\alpha\cos(\alpha+2\beta) + \sin(\alpha+2\beta)\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{\sin 2\alpha} \quad -2\sin^2(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -2\sin^2(2\alpha+2\beta)$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha + 2\sin^2(2\alpha+2\beta) = 0$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos(2\alpha+2\beta) + \sin^2(2\alpha+2\beta) = 0$

$\sin(2\alpha+2\beta)(\cos 2\beta + \sin(2\alpha+2\beta)) + \sin 2\beta \cos(2\alpha+2\beta) = 0$

$9x^2 - 18x + 9 + y^2 - 12y + 36 = 90$

$(3x-3)^2 + (y-6)^2 = 90$

$x(y-6) - (y-6) = (x-1)(y-6)$

$y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9(\underset{a}{x-1}) + (\underset{b}{y-6})^2 = 90$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ 9a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$

$D = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2 = (5a)^2$

$b = \frac{13a \pm 5a}{2} = 9a;\ 4a$

$9a^2 + 81a^2 = 90$

$a = \pm 1$ $\quad 9a^2 + 16a^2 = 90$ $\quad a = \pm\sqrt{\frac{90}{25}} = \pm\frac{3\sqrt{10}}{5}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$65 = 13\cdot 5$

65

325

390

$4225 \mid 845 \; 5$

$845 \mid 169\cdot 5$

$169\cdot 25 = 25\cdot 25 + x^2$

$144\cdot 25 = x^2$

$x = 60$

$\frac{12}{13} = \frac{60}{65}$

$3600 + 144 = 3744$

$3744 \mid 26$

$1872 \mid 2$

$936 \mid 3$

$312 \mid 3$

$104 \mid 2$

$52 \mid 2$

$26 \mid 2$

13

$= 6\sqrt{104}$

$= 12\sqrt{13}$

$12\sqrt{26}$

$\frac{25}{60} = \frac{5}{12}$

$25\cdot$

65

$\sqrt{25}$

$12\sqrt{26}\,x = 12\cdot 13$

1625

$x = \frac{13}{\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{2}$

$12\sqrt{26} + \frac{\sqrt{26}}{2} = \frac{25\sqrt{26}}{2}$

$\sin\alpha = \frac{12}{12\sqrt{26}} = \frac{\sqrt{26}}{26}$

$\sin = \frac{1}{\sqrt{26}}$ $\quad \cos =$

$1 - \frac{1}{26} = \frac{25}{26} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$ax + 6 \geq 3\sqrt{2}x -$

$\frac{51^2}{36\cdot 2} - \frac{51^2}{36} + 28 =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

8

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$-\frac{51^2}{2\cdot 36} + 28$

$f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$ $\quad f(6) = f(2) + f(3) = 0$

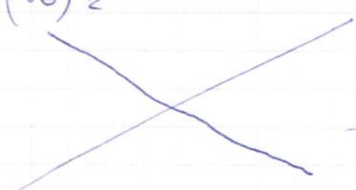
$f\left(\frac{2}{5}\right) = f(2) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

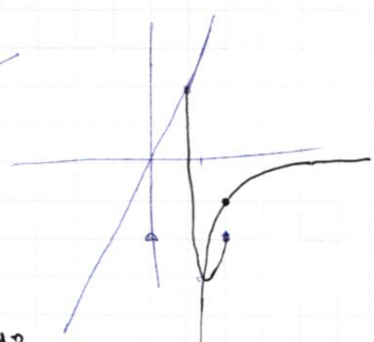
$f(7) = 1$ $\quad f(8) = 0$ $\quad f(9) = 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(10) =$

$f\left(\frac{1}{p}\right) = \left[\frac{1}{4p}\right]$





$ax + 6 \geq 18x^2 - 51x + 28$

$18x(x -$

$x = 2$ $\quad$ Пр $2 =$

$-153 + 162$

$\frac{8-12}{4} = -1$ $\quad \frac{51}{36}$

$8 -$ $\quad 34 + 28 =$

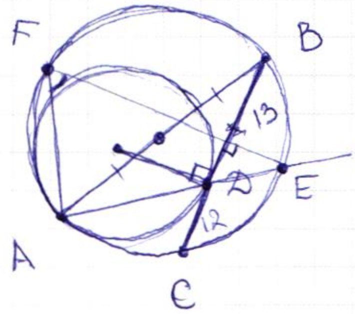
☐ черновик ☐ чистовик

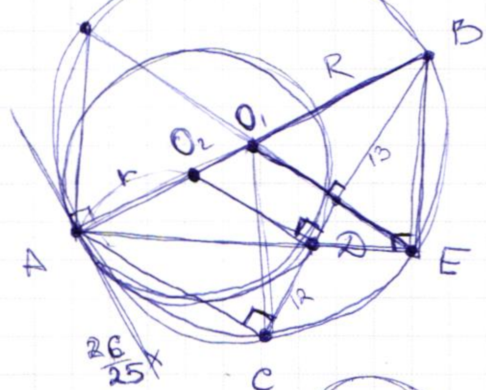
(Поставьте галочку в нужном поле)

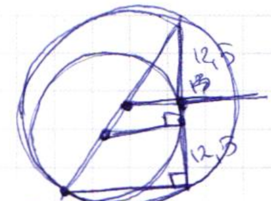
Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

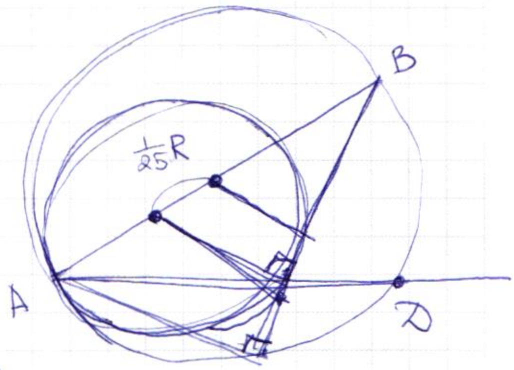
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА







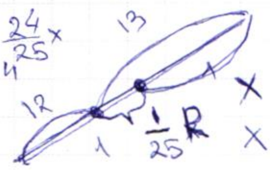
$CD \cdot BD = AD \cdot DE$



$\frac{r}{2R - \cancel{4r}} = \frac{12}{25}$

$25r = 24R$

$r = \frac{24}{25}R$



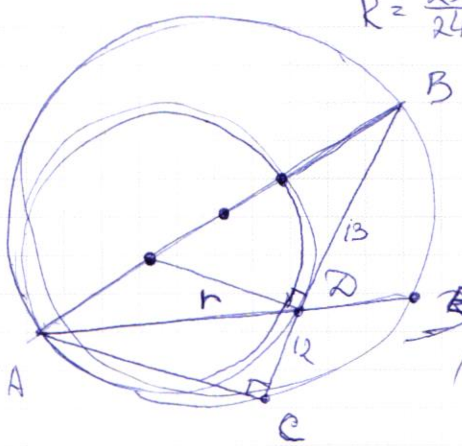
$x + x = 12y + 13y$

$R = \frac{25}{24}r$ $\quad 2x = 25y$

$x = 12{,}5y$

$\cancel{y = \frac{2x}{12}}$ $\quad y = \frac{2x}{25}$ $\quad \cancel{169}$ $\quad 169 \cdot 6$

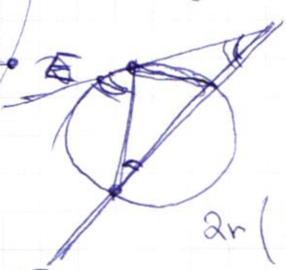
$169 \cdot 6 = 1014$



$\cancel{2R}$ $\cancel{2r}$ $\quad 2r(R - 2r) = 169$

$2r\left(\frac{50}{24}r - \frac{48}{24}r\right) = 169$

$2r \cdot \frac{1}{12}r = 169$ $\quad \frac{1}{6}r^2 = 169$



$2r(2R - 2r) = 4r(R - r) = 4r\left(\frac{1}{24}r\right)$

$\frac{r}{2R} = \frac{12}{25}$ $\quad 24R = 25r$

$\frac{1}{6}r^2 = 169$ $\quad 13 \; 12 \; 26$

$\frac{r}{AC} = \frac{13}{25}$ $\quad AC = \frac{25}{13}r$

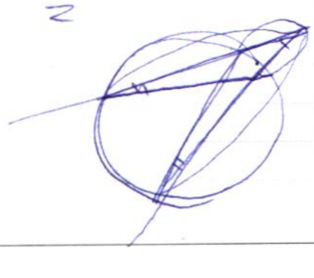
$r^2 =$ $\quad r = 13\sqrt{6}$

$R = \frac{25}{24} \cdot 13\sqrt{6} =$ $\quad r = \frac{24}{25}R$

$169 = (2R - 2r)\,2R = 4R(R - r)$

$=$

$4R \cdot \frac{1}{25}R = \frac{4}{25}R^2 = \frac{169}{\cancel{28}}$



$R^2 = \frac{169 \cdot 25}{4} = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА