МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\cos\varphi = \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх. $\geqslant 3$

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

2 балла

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$f(x) = \frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3 = g(x)$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}$$

$$2\sin\left(\frac{4\beta+4\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right)=-\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{1}{5} \iff -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta)=-\frac{1}{5}$$

$$\sin(2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5} \Longleftarrow \cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}$$

$$2\alpha+2\beta=\varphi$$

$$\sin(\varphi+2\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}$$

$$\sin\varphi\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos\varphi+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}$$

$$\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}-\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt5}-\sin(2\beta)\cdot\cos\varphi$$

$$\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}-\sin(2\beta)\cdot\cos\varphi=-\left(\frac{1}{5}+\sin(2\beta)\cos\varphi\right)$$

$$\sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}=\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$$

$$\cos\varphi=\pm\frac{2}{\sqrt5}$$

Получаем 4 случая:

1) $\sin(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha)=-\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)=-1$

2) $\sin(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha)=-\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)=-\left(-\frac{3}{5}\right)=\frac{3}{5}$

3) $\sin(2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha)=-\left(\frac{1}{5}-\frac{4}{5}\right)=\frac{3}{5}$

4) $\sin(2\beta)=-\frac{2}{\sqrt5}$, $\cos\varphi=-\frac{2}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha)=-\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)=-1$

$\sin(2\alpha)=-1$ $\qquad\qquad$ $\sin(2\alpha)=\frac{3}{5}$

$$\sin(2\alpha)=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$(1+\operatorname{tg}^2\alpha)\cdot\sin(2\alpha)=2\operatorname{tg}\alpha$$

$-\operatorname{tg}^2\alpha-1-2\operatorname{tg}\alpha=0$ $\qquad\qquad$ $\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha=0$

$\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha+1=0$ $\qquad\qquad$ $3\operatorname{tg}^2\alpha-10\operatorname{tg}\alpha+3=0$

$(tg\alpha + 1)^2 = 0$

$tg\alpha = -1$

$3tg^2\alpha - 10tg\alpha + 3 = 0$

$D' = 25 - 9 = 4^2$

$tg\alpha = \frac{5 \pm 4}{3}$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $tg\alpha = 3$; $tg\alpha = \frac{1}{3}$.

№2.

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \begin{cases} x - 12y \geq 0 \iff x \geq 12y \quad (*) \\ x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6 \quad (1) \end{cases} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y - 45 = 0 \quad (2) \end{array}\right.$$

Решим (1) ур-ние относительно x:

$x^2 + (1 - 26y)x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = 1 - 52y + 676y^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) =$

$= 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 =$

$= 25 - 100y + 100y^2 = (10y - 5)^2$

т.к. знак $\pm$ то все случаи учитыв.

$x = \frac{-1 + 26y \pm \sqrt{(10y-5)^2}}{2} = \frac{-1 + 26y \pm |10y - 5|}{2} =$

$= \frac{-1 + 26y \pm (10y - 5)}{2}$

$\left[\begin{array}{l} x = 18y - 3 \\ x = 8y + 2 \end{array}\right.$

Подставим получившиеся значения во (2).

$x = 18y - 3$

$(18y - 3)^2 + 36y^2 - 12(18y - 3) - 36y - 45 = 0$

$360y^2 - 360y = 0$

$y(y - 1) = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$ $\begin{cases} y = 1 \\ x = 15 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x = 8y + 2$

$(8y+2)^2 + 36y^2 - 12(8y+2) - 36y - 45 = 0$

$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y - 45 = 0$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$20y^2 - 20y - 13 = 0$

$D' = 360 = 6^2 \cdot 10 \quad \Rightarrow \quad y = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{20} = \frac{5 \pm 3\sqrt{10}}{10}$

$\begin{cases} y = \frac{5+3\sqrt{10}}{10} \\ x = \frac{8(5+3\sqrt{10})}{10} + 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = \frac{5-3\sqrt{10}}{10} \\ x = \frac{8(5-3\sqrt{10})}{10} + 2 \end{cases}$

Осталось проверить условие (*) для всех корней.

1) $(-3; 0)$ – не подх.

2) $(15; 1)$ $\quad 15 \geq 12$ – подх.

3) $\frac{8(5+3\sqrt{10})}{10} + 2 \geq \frac{12(5+3\sqrt{10})}{10}$

$\frac{40 + 24\sqrt{10} + 20}{10} \geq \frac{60 + 36\sqrt{10}}{10}$

$\frac{24\sqrt{10}}{10} \geq \frac{36\sqrt{10}}{10}$ – не верно $\Rightarrow$ эти корни не подходят.

4) $\frac{8(5-3\sqrt{10})}{10} + 2 \geq \frac{12(5-3\sqrt{10})}{10}$

$\frac{60 - 24\sqrt{10}}{10} \geq \frac{60 - 36\sqrt{10}}{10}$

$24\sqrt{10} \leq 36\sqrt{10}$ – верно.

Ответ: $(15; 1)$, $\left(\frac{60 - 24\sqrt{10}}{10}; \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}\right)$.

№3.

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

$$10x - x^2 + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

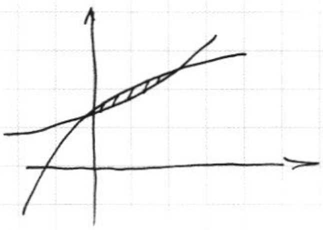
$$t = 10x - x^2$$

$$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

т.к. $\log_3 t \Rightarrow t > 0$

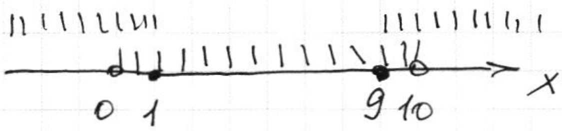
$$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$$

Т.к. одна ф-ция выпукла в одну сторону, а другая в другую, то будет лишь 1 промежуток удовлетворяющий нер-ву.



Очевидно, что рав-во достигается при $t = 9$, а при меньших t оно верно. $\Rightarrow t \in (0; 9]$.

$$\begin{cases} t > 0 \\ t \leq 9 \end{cases}; \quad \begin{cases} -x^2 + 10x > 0 \\ -x^2 + 10x - 9 \leq 0 \end{cases}; \quad \begin{cases} x^2 - 10x < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

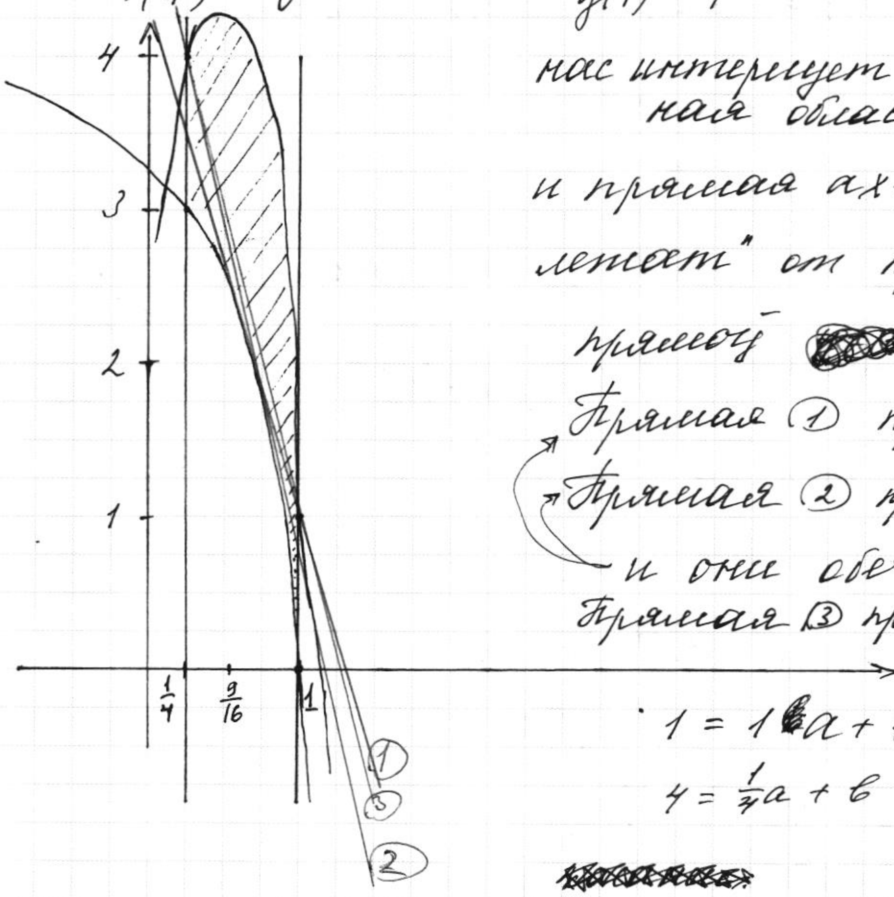
№ 6.

$f(x) = \dfrac{16x-16}{4x-5} = 4 + \dfrac{4}{4x-5}$ (Для $f(x)$ асимптоты: $y=4$, $x=\frac{5}{4}$.)

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$ ($x_в = \frac{9}{16}$; $y_в = \frac{57}{8}$)

$f(\frac{1}{4}) = 3$ $\quad g(\frac{1}{4}) = 4$

$f(1) = 0$ $\quad g(1) = 1$



нас интересует только закрашенная область.

и прямая $ax+b$ "должна лежать" от прямой (1) до прямой (2).

Прямая (1) проходит через т-ку $(1;1)$.

Прямая (2) прох. через т-ку $(\frac{1}{4};4)$.

и они обе касаются $f(x)$

Прямая (3) проходит через обе т-ки.

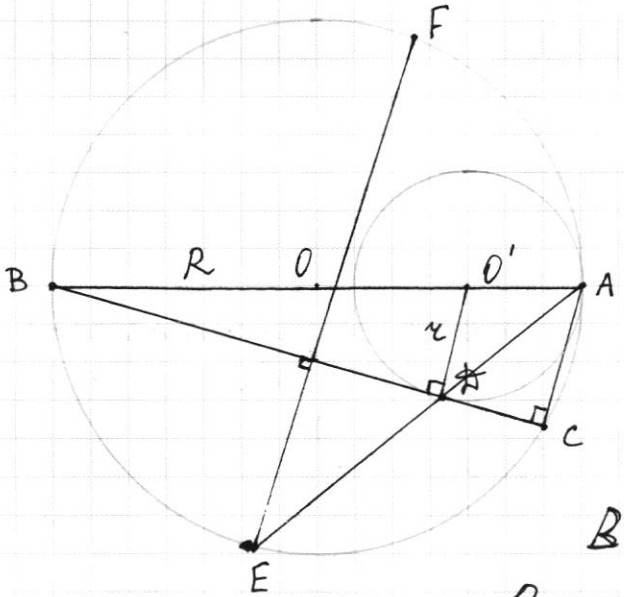
$1 = 1a + b \leftarrow (1)$ $\quad 1 = a + b$

$4 = \frac{1}{4}a + b \leftarrow (2)$ $\quad 16 = a + 4b$

(3) $\begin{cases} 1 = a + b \\ 16 = a + 4b \end{cases}$ $\begin{cases} b = 5 \\ a = -4 \end{cases}$

Ответ: $a = -4$, $b = 5$

№ 4.



$DC = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

R, r - радиусы большой окр. и маленькой, соответственно.

$O'D \perp BC$, т.к. BC касательная к маленькой окр.

$AC \perp BC$, т.к. AB - диаметр

$BO' = 2R - r$ $BA = 2R$

т. Пифагора для $\Delta BDO'$ и ΔBCA

$$\begin{cases} \left(\frac{17}{2}\right)^2 = r^2 + (2R-r)^2 \\ 11^2 = (2R)^2 + AC^2 \end{cases}$$

Из подобия $\Delta BDO'$ и ΔBCA ($\angle ABC$ - общ. и два по $90°$)

$\frac{BD}{BC} = \frac{r}{AC}$ $AC = r \cdot 11 \cdot \frac{2}{17} = \frac{2}{11 \cdot 17} \cdot r$

$$\begin{cases} \frac{289}{4} = r^2 + 4R^2 - 4rR + r^2 & (1) \\ 121 = 4R^2 + \frac{4}{11^2 \cdot 17^2} \cdot r^2 & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 289 = 4r^2 + 16R^2 - 16rR + 4r^2 & (1) \\ 11^3 \cdot 17^2 = 4 \cdot 11^2 \cdot 17^2 R^2 + 4r^2 & /\cdot 2 \end{cases}$$

~~$289 = 8r^2 + 16R^2 - 16rR$ (1)~~

~~$2 \cdot 11^3 \cdot 17^2 = 8 \cdot 11^2 \cdot 17^2 R^2 + 8r^2$~~

Из подобия Δов $R = \frac{11}{17} r \Rightarrow r = \frac{17}{11} R$

$289 = 4 \cdot \frac{289}{121} R^2 + 16R^2 - 16 \cdot \frac{17}{11} R^2 + 4\left(\frac{17}{11}\right)^2 R^2$

$289 = R^2 \left(\frac{4 \cdot 289}{121} + 16 - \frac{16 \cdot 17}{11} + \frac{4 \cdot 17^2}{11^2} \right)$

$R^2 = \frac{4}{121} + \frac{16}{17^2} - \frac{16}{11 \cdot 17} + \frac{4}{11^2} = \frac{2 \cdot 4}{11^2} + 16\left(\frac{11-17}{11 \cdot 17^2} \right) = \frac{8}{121} - \frac{16 \cdot 6}{11 \cdot 17^2}$

$= 8 \cdot 289 -$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-12y>0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \quad |\cdot 3 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \quad |\cdot 2 \end{cases}$$

$+\{\ \cancel{3x^2-72xy+432y^2=6}$

$$\begin{array}{r} \times 144 \\ 4 \\ \hline 576 \end{array} \quad \begin{array}{r} +144 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 24 \\ 3 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 36 \\ 2 \\ \hline 72 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 144 \\ 3 \\ \hline 432 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 26 \\ 2 \\ \hline 52 \end{array} \quad \begin{array}{r} \times 26 \\ 26 \\ \hline 156 \\ +52 \\ \hline 676 \end{array}$$

№2 $\cancel{x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0}$

(1)

$$\begin{cases} x-12y\geq 0 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \\ x^2+36y^2-12x-36y-45=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2-26xy+144y^2+12y+x-6=0 \quad (1) \\ x^2-12x+36+(6y)^2-36y+9-45-45=0 \quad (2) \end{cases}$$

(1) $x^2+(1-26y)x+144y^2+12y-6=0$

$D=1-52y+676y^2-4(144y^2+12y-6)=$
$=1-52y+676-576y^2-48y+24=$
$=25-100y+100y^2=(10y-5)^2$

$x=\dfrac{-1+26y\pm\sqrt{(10y-5)^2}}{2}$ ← т.к. знак ±, то будут рассмотрены оба варианта

$$\left[\begin{array}{l} x=\dfrac{-1+26y+10y-5}{2}=\dfrac{36y-6}{2}=18y-3 \\ x=\dfrac{-1+26y-10y+5}{2}=\dfrac{16y+4}{2}=8y+2 \end{array}\right.$$

(1) $\Leftrightarrow (x-18y+3)(x-8y-2)=0$

$x-18y+3=0$ // $x-8y-2=0$
$18y=x+3$ $\quad 8y=x-2$ $\quad x=8y+2$

$y=\dfrac{x}{18}+\dfrac{1}{6}$

$x=18y-3$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cos(2\beta) = \cos^2\beta - \sin^2\beta = \cos^2\beta - (1-\cos^2\beta) = 2\cos^2\beta - 1$

$\cos(4\beta) = \cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta) = \cancel{2\cos^2\beta}\, 2\cos^2(2\beta) - 1 =$

$= 2(2\cos^2\beta - 1) - 1 = 4\cos^2\beta - 3.$

$\sin(4\beta) = 2\sin(2\beta)\cos$

$$\sin(2\alpha) = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha + \sin^2\alpha} = \frac{2\,tg\,\alpha}{1 + tg^2\alpha}$$

$$(1 + tg^2\alpha)\cdot \sin(2\alpha) = 2\,tg\,\alpha$$

$$\begin{array}{r} 18 \\ \times\ 18 \\ \hline 144 \\ +\ 18 \\ \hline 324 \end{array}$$

(2) $x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$D = 144 - 4(36y^2 - 36y - 45) =$

$= 144 - (2\cdot 6y)^2 + 4\cdot 36y + 4\cdot 45 =$

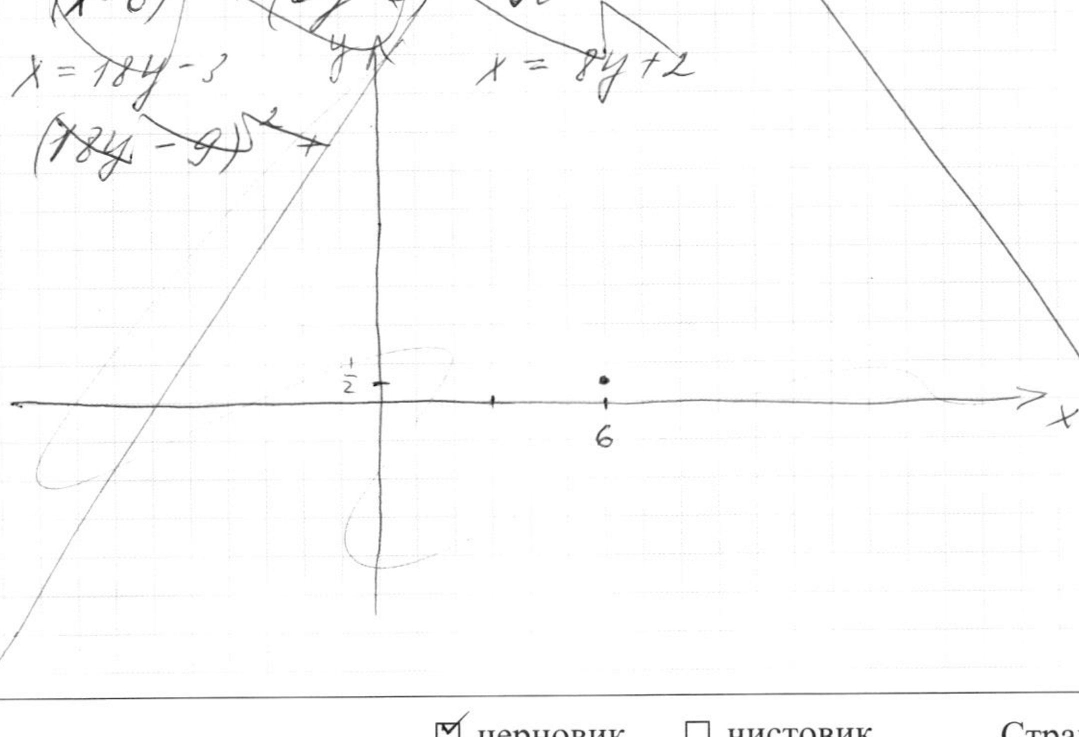
$= -(12y)^2 + 2\cdot 2\cdot 36y + 18^2$

$$\begin{array}{r} 45 \\ \times\ 4 \\ \hline 180 \\ +\ 144 \\ \hline 324 \\ \shortparallel \\ 18^2 \end{array}$$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$x = 18y - 3 \qquad x = 8y + 2$

$(18y - 9)^2 +$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\sin(2\alpha)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cos\beta(2\cos^2\alpha-1) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin\alpha\cos\alpha(4\cos^2\beta-3)+ \end{cases}$$

$$\boxed{\sin(2\alpha) = \frac{2\,tg\,\alpha}{1+tg^2\alpha}}$$

$$\begin{cases} \sin(\overset{\varphi}{2\alpha+2\beta}) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(\overset{\varphi}{(2\alpha+2\beta)}+2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

~~$\sin\varphi\cos(2\beta)+\cos\varphi\sin(2\beta)+\sin(2\alpha) =$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} \sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}-\sin(2\alpha)-\cos(\varphi)\cdot\sin(2\beta) \\ \cos(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}+\sqrt5\sin(2\alpha)+\sqrt5\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin(2\beta) \end{cases}$$

$\sin(2\alpha)\left(\frac{2}{\sqrt5}+\sqrt5\sin(2\alpha)+\sqrt5\cos\varphi\cdot\sin(2\beta)\right)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sqrt5\sin(2\alpha)\left(\frac{2}{\sqrt5}+\sqrt5\sin(2\alpha)+\sqrt5\cos\varphi\cdot\sin(2\beta)\right)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -1$

$2\sin(2\alpha)+5\sin^2(2\alpha)+5\sin(2\alpha)\cos\varphi\sin(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -1$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

№2 (2)

$x = 18y - 3$

$(18y-3)^2 + 36y^2 - 12(18y-3) - 36y - 45 = 0$

$324y^2 - 108y + 9 + 36y^2 - 216y + 36 - 36y - 45 = 0$

$360y^2 - 360y = 0$

$y(y-1) = 0$

$\begin{cases} y = 0 \\ x = -3 \end{cases}$

~~x≥12y~~

$-3 \geq 0$

$\Rightarrow$ не подх.

$y - 1 = 0$

$\begin{cases} y = 1 \\ x = 15 \end{cases} \Rightarrow$ подх.

$15 \geq 12$

$x - 12y \geq 0$

$x \geq 12y$

$x = 8y + 2$

$(8y+2)^2 + 36y^2 - 12(8y+2) - 36y - 45 = 0$

$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y - 45 = 0$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$20y^2 - 20y - 13 = 0$

$D' = 100 + 260 = 360 = 6^2 \cdot 10$

$D = 400 + \cancel{400} \cdot 13 =$

$= 400 + 1300 =$

$= \cancel{1000}\ 1700$

$y = \frac{10 \pm 6\sqrt{10}}{20} = \frac{5 \pm 3\sqrt{10}}{10}$

$\begin{cases} y = \frac{5+3\sqrt{10}}{10} \\ x = \frac{8(5+3\sqrt{10})}{10} + 2 \end{cases}$

$\begin{cases} y = \frac{5-3\sqrt{10}}{10} \\ x = \frac{8(5-3\sqrt{10})}{10} + 2 \end{cases}$

$\frac{8(5+3\sqrt{10})}{10} + 2 \geq \frac{5+3\sqrt{10}}{10}$

$\frac{8(5+3\sqrt{10})}{10} \geq \frac{5+3\sqrt{10}-20}{10}$

$40 + 24\sqrt{10} \geq -15 + 3\sqrt{10}$

верно

$\frac{8(5-3\sqrt{10})}{10} \geq \frac{5-3\sqrt{10}-20}{10}$

$40 - 24\sqrt{10} \geq -15 - 3\sqrt{10}$

$65 - 24\sqrt{10} \geq -3\sqrt{10}$

$65 - 21\sqrt{10} \geq 0$

$65 \geq 21\sqrt{10}$

$4225 \geq 4410$

$\Rightarrow$ не подх.

$18 \times 3 = 54$; $54 \times 2 = 108$; 18×12: $36 + 18$ → 216; $324 + 36 = 360$; $216 + 108 = 324$; $324 + 36 = 360$; $16 \times 2 = 32$; $12 \times 8 = 96$; $65 : 5 = 13$; $13 \times 20 = 260$; 4410; 65×65: $325 + 390$ → 4225

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№3 (1)

$10x + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + |10x - x^2|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t = 10x - x^2$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t > 0$, т.к.

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\log_a b \cdot \log_b a = 1$

$\log_b a = \dfrac{1}{\log_a b}$

$\boxed{t = 3}$

$3 + 4 \geq 5$ верно.

$\boxed{t = 1}$

$1 + 1 \geq 5^0 = 1$ верно.

$2 \geq 1$

$\boxed{t = 9}$

$9 + 3^{2\log_3 4} \geq 5^{\log_3 9 = 2}$

$9 + 16 \geq 25$

$25 \geq 25$

$\boxed{t = 27}$

$27 + 4^3 \geq 125$

$91 \geq 125$

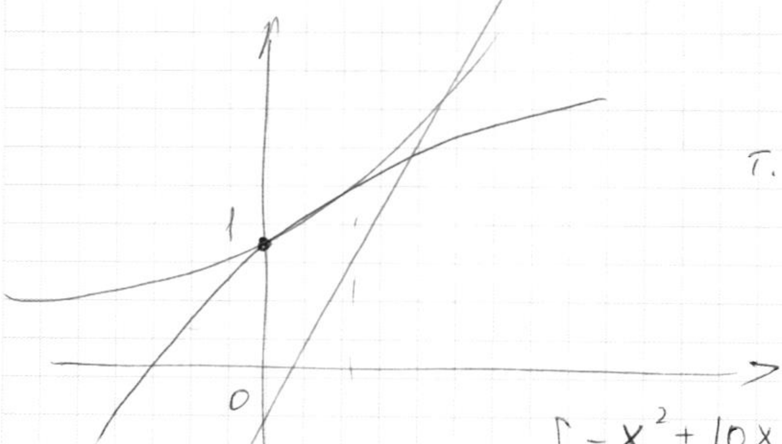
$\boxed{t = \frac{1}{3}}$

$\frac{1}{3} + 3^{\log_3 4^{-1}} \geq 5^{-\log_3 3}$

$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \geq \frac{1}{5}$ $\quad \frac{4+3}{12} \geq \frac{1}{5}$ $\quad \frac{7}{12} \geq \frac{1}{5}$

$35 \geq 12$.

$\begin{array}{r} \times\, 16 \\ 4 \\ \hline 64 \\ +\, 27 \\ \hline 91 \end{array}$



т.к. ф-ции выпуклы в разные стороны $\Rightarrow t \in [0; 9]$.

$\begin{cases} -x^2 + 10x > 0 \\ -x^2 + 10x \leq 9 \end{cases}$; $\begin{cases} x^2 - 10x < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 1 \\ x = 9 \end{cases}$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~$\cos\varphi = \frac{2}{\sqrt5}$~~ ~~$\cos\varphi = -\frac{2}{\sqrt5}$~~

~~$5\sin^2(2\alpha) + 2\sin(2\alpha) + \sqrt5\sin(2\alpha)\cdot\frac{2}{\sqrt5}\sin(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -1$~~

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha+2\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

① $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$ $\qquad$ $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$ $\qquad$ $-\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta) - \sin(2\beta)\frac{2}{\sqrt5} + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$-\sqrt5\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot 2\sqrt5 + 5\sin(2\alpha) = -2$ $\qquad$ $-\sqrt5\cos(2\beta) - 2\sqrt5\sin(2\beta) + 5\sin(2\alpha) = -2$

~~$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha)$~~

$\cos(2\beta) = \frac{2 + 2\sqrt5\sin(2\beta) + 5\sin(2\alpha)}{\sqrt5}$

$= \sqrt{1-\sin^2(2\alpha)}$

~~$\sin(2\alpha)\cdot\left(\frac{2+2\sqrt5\sin(2\beta)+5\sin(2\alpha)}{\sqrt5}\right) + \sin(2\beta)\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt5}$~~

$\frac{2}{\sqrt5}\sin(2\alpha) + 10\sin(2\alpha)\sin(2\beta)$

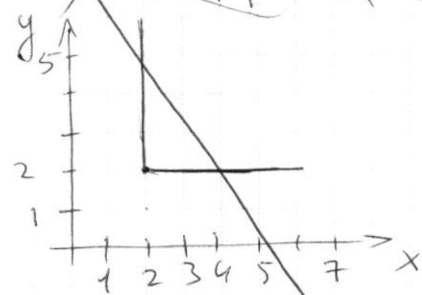
$f(ab) = f(a) + f(b)$

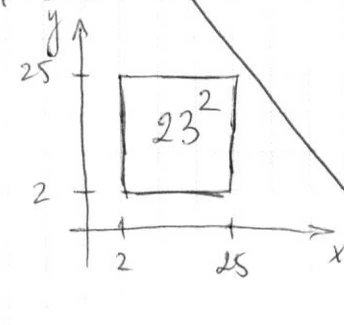
$f(0) = 2f(0)$

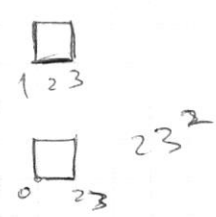
$f(0) = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$ $\qquad$ $f(5) = 1$

$f(3) = 0$ $\qquad$ $f(7) = 1$





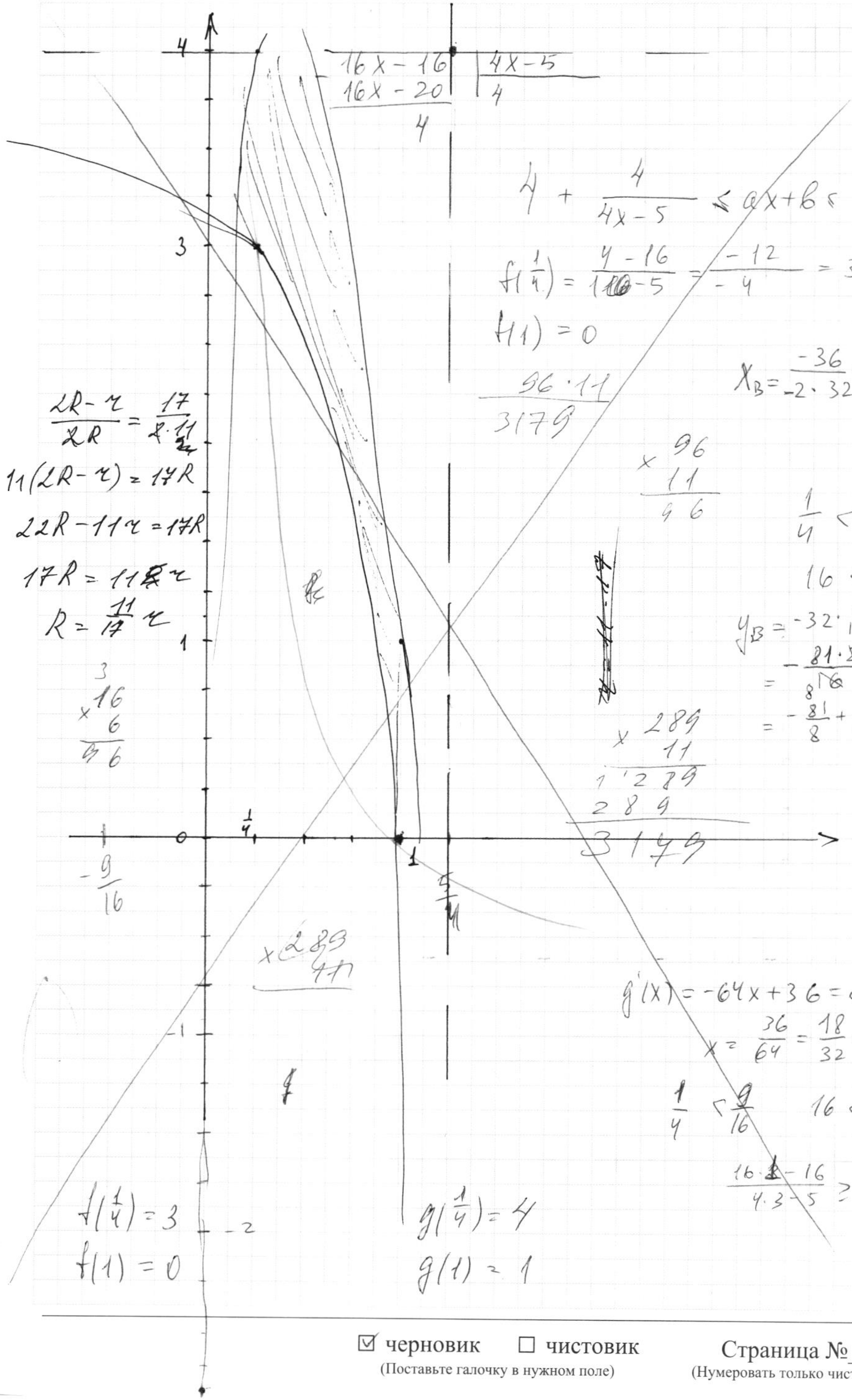


☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$$\begin{array}{r|l} 16x-16 & 4x-5 \\ 16x-20 & 4 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$$4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b \le$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$$

$$f(1) = 0$$

$$\frac{96 \cdot 11}{3179}$$

$$x_B = \frac{-36}{-2 \cdot 32} = \frac{36}{2 \cdot 32} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{9}{16}$$

$$16 < 36$$

$$y_B = -32 \cdot \frac{81}{16^2} + 36 \cdot \frac{9}{16} - 3 = -\frac{81 \cdot 2}{16} + \frac{9 \cdot 9}{4} - 3 = -\frac{81}{8} + \frac{81}{4} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{57}{8}$$

$$\frac{2R - r}{2R} = \frac{17}{2 \cdot 11}$$

$$11(2R - r) = 17R$$

$$22R - 11r = 17R$$

$$17R = 11r$$

$$R = \frac{11}{17} r$$

$$\times \begin{array}{r} 96 \\ 11 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\times \begin{array}{r} 16 \\ 6 \\ \hline 96 \end{array}$$

$$\times \begin{array}{r} 289 \\ 11 \\ \hline 289 \\ 289 \\ \hline 3179 \end{array}$$

$$\times \begin{array}{r} 289 \\ 11 \end{array}$$

$$-\begin{array}{r} 81 \\ 24 \\ \hline 57 \end{array}$$

$$g'(x) = -64x + 36 = 0$$

$$x = \frac{36}{64} = \frac{18}{32} = \frac{9}{16}$$

$$\frac{1}{4} < \frac{9}{16} \qquad 16 < 36$$

$$\frac{16 \cdot 1 - 16}{4 \cdot 3 - 5} \ge 3$$

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \qquad g\left(\frac{1}{4}\right) = 4$$

$$f(1) = 0 \qquad g(1) = 1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$$\begin{array}{r|l} 16x-16 & 4x-5 \\ \underline{16x-20} & 4 \\ 4 & \end{array}$$

$g(x) = -32x^2 + 36x - 3$ $\qquad x_B = \frac{-6}{20} = -\frac{36}{2\cdot 32} = -\frac{9}{16}$

$y_B = +32\cdot\frac{9}{16} - 36\cdot\frac{9}{16} - 3 = 18 - \frac{81}{4} - 3 = \frac{72-81-12}{4} = -\frac{21}{4}$

$18 \cdot 4 = 72$ $\qquad 81 - 72 = 9$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4-16}{1-5} = \frac{-12}{-4} = 3$

$g\left(\frac{1}{4}\right) = -32\cdot\frac{1}{16} + 9 - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$

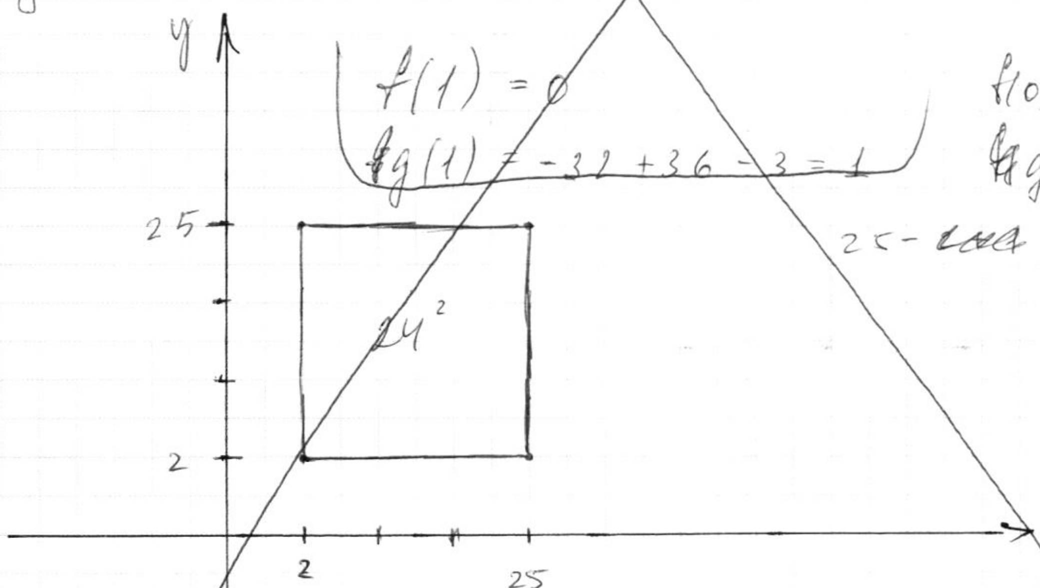
$f(1) = 0$

$g(1) = -32 + 36 - 3 = 1$

$f(0) = +\frac{16}{5}$

$g(0) = -3$

$25 - 1 = 24$



$f(2\cdot 2) = f(2) + f(2)$ $\qquad f(2) = \frac{1}{2} f(4)$

$f(2) = 0 \Rightarrow f(4) = 0 = f(2)$

$f(3\cdot 2) = f(3) + f(2)$ $\qquad 15 = 3b$

$b = 5 \quad a = -4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

№1 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~sin(2α+2β)~~ $2\alpha+2\beta=\varphi$ ~~sin x + sin y = 2~~

$\sin\varphi = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(\varphi+2\beta)+\sin(2\alpha)$

$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\sin y\cos x$

$\sin(x-y)=\sin x\cos y-\sin y\cos x$

$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y$

$x=\frac{x+y}{2}$ $y=\frac{x-y}{2}$

$$\boxed{\sin x+\sin y=2\sin\left(\frac{x+y}{2}\right)\cos\left(\frac{x-y}{2}\right)}$$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac{2}{5}$

$\pm\sqrt{1-\frac15}=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$2\sin\left(\frac{4\alpha+4\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{4\beta}{2}\right)=-\frac25$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos(2\beta)=-\frac15$

$+\frac{1}{\sqrt5}\cos(2\beta)=+\frac15$

$\boxed{\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt5}}$

$\sin(2\beta)=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$2\alpha+2\beta=\varphi$

$\sin\varphi=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\varphi=\pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(\varphi+2\beta)+\sin(2\alpha)=-\frac25$; $\sin\varphi\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos\varphi+\sin(2\alpha)=-\frac25$

1) $\sin(2\beta)=\frac{2}{\sqrt5}$

$\cos\varphi=\frac{2}{\sqrt5}$

$-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\frac{2}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\sin(2\alpha)=-\frac25$

sin

очевидно.

☑ черновик ☐ чистовик

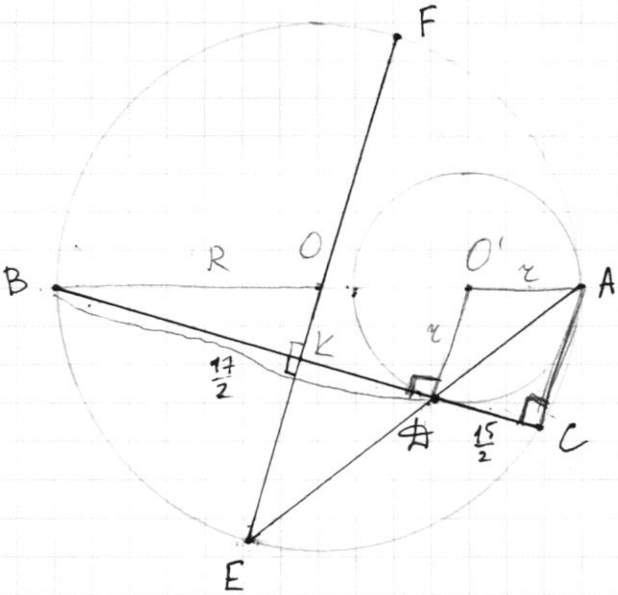
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{17}{2} + \frac{15}{2} = \frac{22}{2} = 11$$

$$\frac{a}{\sin\alpha} = 2R$$



$$\begin{array}{r} 17 \\ \times\ 17 \\ \hline 119 \\ 17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 2(R-r)\cdot 2R$$

$$289 = 16(R^2 - Rr)$$

$$16R^2 - 16Rr - 289 = 0$$

$$D' = 64r^2 - 16\cdot 289$$

$\triangle BOK \sim \triangle BO'D$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)