МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha) + \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{17}$

$tg\alpha - ?$

$\sin(2\alpha + 2\beta - 2\beta) + \sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta =$
$= -\frac{2}{17}$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta + \sin\beta\cos(2\alpha+\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$~~

$\Leftrightarrow$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\Leftrightarrow$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}, \quad \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}} \pm$
$\pm \frac{4\cos 2\alpha}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\Leftrightarrow$

$\sin 2\alpha \pm 4\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \pm 4(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = -1$

$\pm 2\sqrt{1-\cos^2\alpha}\cos\alpha \pm 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

Рассмотрим 2 случая:

$D = 400 - 20 \cdot 16 = 80$

$t = \frac{20 \pm 4\sqrt{5}}{16} = \frac{5 \pm \sqrt{5}}{4}$

$0 \quad 26$

$x^2 - 26x < 0$

$x(x-26)$

$5^{\log_5(3^{\log_3(26x-x^2)})}$

$(a+b)^2 = \frac{5+\sqrt{5}}{4}$

$a^2 + b^2 = 5$

$ab = \frac{\sqrt{5}}{2}$

$9 \cdot 17 = 153$

$250 \cdot \frac{25}{17} - 84 \cdot \frac{25}{17}$ 16

$(t^{\frac{b}{a}} - 1)t$

13

5

E C B A F

$x, y.$

$\frac{x}{y} \leq 28,\ x \leq 28$

$y \leq 28$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$13^{\log_{13}(26x - x^2)} \cdot \log_5 12$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

34
9
25

$\frac{5}{34}$

9621 | 9

81

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f(p) = f(p) + f\left(\frac{1}{4}\right)$

$f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

$f\left(\frac{p}{a}\right) = f(p) +$

$t^b - t^a = 1$

$\sqrt{-x(26 - x^2)}$

$1 + t^a \geq t^b$

$3 - 8\cos^2 x = -1$

$\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)} =$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{1}{\sqrt{2}}$

$2 = 1 = 8 \cdot \frac{1}{2}$

$\frac{2}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{1}{2}}$

225
169
2025
13500
225000
240525 | 25
225
15525 | 9621
150
525
50

$f(7) = 1$

$f(8) = 0$

$\frac{8 - 6x}{3x - 2}$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0.$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0;$

$f(5) = 1$

$f(6) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$1) \cos\alpha\sqrt{4(1-\cos^2\alpha)} + 8\cos^2\alpha - 4 = -1$

$\Leftrightarrow$

$\cos^2\alpha\, 4(1-\cos^2\alpha) = (3 - 8\cos^2\alpha)^2$, ~~$\frac{3}{8} \geq \cos^2\alpha$~~

$4(1-\cos^2\alpha) \geq 0$ – здесь и далее

~~$4\cos^2\alpha = $~~

Пусть $\cos^2\alpha = t$, $1 \geq t \geq 0$.

$4t - 4t^2 = 9 - 48t + 64t^2$

$\Leftrightarrow$

$68t^2 - 52t + 9 = 0$

$t = \frac{52 \pm 4\sqrt{169 - 9\cdot17}}{2\cdot68} = \frac{13 \pm 4}{34} = \left[\begin{array}{l} \frac{17}{34} = \frac{1}{2} \\ \frac{9}{34} \end{array}\right.$

$\cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt2} \\ -\frac{1}{\sqrt2} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \\ -\frac{3}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \Rightarrow$ ~~$tg\alpha = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -1 \\ \frac{5}{3} \\ -\frac{5}{3} \end{array}\right.$~~

Подставим:

~~$\cos = \frac{1}{\sqrt2}$:~~

~~$\frac{1}{\sqrt2}\sqrt{4(1-\frac{1}{2})} + \frac{8}{2} - 4 = -1$ – неверно~~

~~$\cos = -\frac{1}{\sqrt2}$ верно~~

~~$\cos = \frac{3}{\sqrt{34}}$ подставим $\cos = -\frac{3}{\sqrt{34}}$~~

~~$\frac{15}{17} + 4(2\cdot\frac{9}{34}) - 1$~~

~~$tg = \left[\begin{array}{l} -1 \\ 3 \\ -3 \end{array}\right.$~~

Подставим в $2\sin\alpha\cos\alpha + 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1$.

подходят: $\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt2} \\ \sin = \mp\frac{1}{\sqrt2} \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \pm\frac{3}{\sqrt{34}} \\ \sin\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg = \frac{5}{3} \end{array}\right.$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$84 \pm \sqrt{42^2 - 68\cdot 25}$

$1) \cos\alpha \cdot 2\sqrt{1-\cos^2\alpha} + 4\cos^2\alpha = 3$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 0$

$\cos^2\alpha(4 - 4\cos^2\alpha) = (3-4\cos^2\alpha)^2$, $3+4\cos^2\alpha > 0$, т.к. $\cos^2\alpha \geq 0$.

$\cancel{4 - 4\cos^2\alpha = 9 - 24\cos^2\alpha + 16\cos^4\alpha}$

~~Пусть~~ $\cancel{\cos^2 a = t}$

$\cancel{16t^2 - 20t + 5 = 0}$

$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,$

$4\cos^2\alpha - 4\cos^4\alpha = 9 - 24\cos^2\alpha + 16\cos^4\alpha$.

Пусть $\cos^2\alpha = t$, $t \leq 1$ здесь и далее.

$20t^2 - 28t + 9 = 0$

$t = \frac{28 \pm \sqrt{49 - 5\cdot 9}}{40} = \frac{7 \pm 2}{10} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}, \\ \frac{9}{10}, \end{array}\right.$

$9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90$

$(y-6)(x-1)$

оба подходят.

$\cancel{\cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \pm\frac{3}{\sqrt{10}} \end{array}\right.}$

$\left\{\begin{array}{l} \cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \\ \sin\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{array}\right. \end{array}\right.$ $\Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 1 \\ tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -3. \end{array}\right.$

$\cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

$\sin\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{3}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

$-\frac{3}{\sqrt{34}}$ $\quad \frac{9}{34}\cdot 8 - 4 = (\frac{9}{17} - 1)\cdot 4 = -\frac{8\cdot 4}{17}$

$\frac{15}{34} - \frac{64}{34^2} = 8$

$a^2 - \sqrt{13}b\,a + 36b^2 = 0$

$a = \frac{13b \pm 5b}{2}$, $a = 9b$

$a = 13b \pm \sqrt{169b^2 - 144b^2}$

$36e g = 45$

$1 - \frac{3}{34}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{30}{\sqrt{34}} + 4\left(\frac{18}{34} - 1\right) = -1$ $\quad \frac{5}{\sqrt{34}}$

$\frac{15}{17} + 4\left(\frac{8}{17} - \frac{8}{17}\right) = -\frac{1}{17}$

7) $\cos 2\alpha \sqrt{4(1-\cos^2\alpha)} - 8\cos^2\alpha + 4 = 1$

$t = \cos^2\alpha$

$\frac{5}{\sqrt{34}}$

$t(4-4t) = (8t-5)^2$

$4t - 4t^2 = 64t^2 - 80t + 25$

$68t^2 - 84t + 25 = 0$

$t = \frac{84 \pm 4\sqrt{21^2 - 17 \cdot 25}}{2 \cdot 68} = \frac{21 \pm 4}{2 \cdot 17} = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} \\ \frac{25}{17} \end{array}\right.$

подходит только $t = \frac{1}{2}$.

$t = \frac{1}{2} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \cos\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \end{array}\right.$

Значит, $2\sin\alpha\cos\alpha - 4(2\cos^2\alpha - 1) = -1$,

$\begin{cases} \sin\alpha = \pm\frac{5}{\sqrt{34}} \\ \cos\alpha = \frac{3}{\mp\sqrt{34}} \end{cases}$, $\begin{cases} \sin\alpha = -\frac{1}{2} \\ \cos\alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$, $\begin{cases} \sin\alpha = +\frac{1}{2} \\ \cos\alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$

подходят, поэтому искомые значения $tg\alpha : \{-1, \frac{3}{5}, -\frac{5}{3}\}$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 3

(Нумеровать только чистовики)

$(a,b)=(9,1) \Leftrightarrow (x,y)=(2,15)$

$(a,b)=\left(-12\sqrt{\frac{8}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}}\right) \Leftrightarrow (x,y)=\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1,\right.$

$\left.-12\sqrt{\frac{2}{5}}+6\right)$

Ответ: $(2,15)$, $\left(-3\sqrt{\frac{2}{5}}+1, -12\sqrt{\frac{8}{5}}+6\right)$

3. Заметим, что $\log_5(26x-x^2)$ определён только при $26x-x^2>0$, т.е. при $x\in(0,26)$;

при этом $|x^2-26x|=26x-x^2$.

Исходное нер-во равносильно:

$26x+(-(x^2-26x))^{\log_5 12} \geq x^2+13^{\log_5(26-x^2)}$

$\Updownarrow$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq x^2-26x+5^{\log_5 13\,\log_5(26-x^2)}$

$\Updownarrow$

$(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq x^2-26x+(26x-x^2)^{\log_5 13}$.

$\Updownarrow$

$\cancel{(26x-x^2)^{\log_5 12} \geq (26x-x^2)^{\log_{x^2}(26x-x^2)}+(26x-x^2)^{\log_5 13}}$

$(26-x^2)^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 13} \geq x^2-26x$

$\cancel{(26-x^2)^{\log_5 12}\left(1-(26-x^2)^{\log_5\frac{13}{12}}\right.}$

$\cancel{(26x-x^2)}\left(1+(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}\right) \geq (26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}$

Заметим, что при $(26x-x^2)$ правая часть "растёт" быстрее левой (т.к. $\log_5\frac{13}{5}>\log_5\frac{12}{5}>1$, а возведение одно и то же ф-я.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. Пусть $a = y - 6$, $b = x - 1$. Тогда получаем:

$$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab}, \\ 9b^2 + a^2 = 90, \end{cases}$$ $a - 6b \geq 0$, здесь и далее $ab \geq 0$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} a^2 - 13ab + 36b^2 = 0, \\ a^2 = 90 - 9b^2 \end{cases}$$ решим кв ур отн a, тогда по теореме:

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a - 9b)(a - 4b) = 0 \\ a^2 = 90 - 9b^2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$

$$\begin{cases} (a - 9b)(a - 4b) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} 90b^2 = 90 \\ 25b^2 = 90 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (a - 9b)(a - 4b) = 0 \\ \left[\begin{array}{l} b = \pm 1 \\ b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{array}\right. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ т.к. $ab \geq 0$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a = 9b \\ b = \pm 1 \end{cases} \\ \begin{cases} a = 4b \\ b = \pm 3\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$$

т.к. $a - 6b \geq 0$, $ab \geq 0$, то подходит только пара: $(a, b) = (9, 1)$

т.к. при ~~$a = 12\sqrt{\frac{2}{5}}$~~, $(-12\sqrt{\frac{2}{5}}, -3\sqrt{\frac{2}{5}})$

$$\left(1+(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}}\right) \geq (26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}$$

При $x \to 0$
левая часть больше правой.

$$1+(26x-x^2)^{\log_5\frac{12}{5}} = (26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}}$$

$$\Updownarrow$$

$$(26x-x^2)^{\log_5\frac{13}{5}-\log_5\frac{12}{5}} = 1$$

Поскольку степень - константа, то такое возможно только при $26x-x^2=1$

$$\Updownarrow$$

$$x^2-26x-1=0$$

$$\frac{D}{4} = 169+1 = 170$$

$$\Downarrow$$

$x = 13 \pm \sqrt{170}$ - значит слишком левая равна правой, а при $x \in (13-\sqrt{170}, 13+\sqrt{170})$ нер-во не выполн., а часть $x \in [13, 26)$ зеркально симметрична $(0, 13]$ (т.к. парабола), значит,

Нер-во удовл. $x \in (0, 13-\sqrt{170}] \cup [\sqrt{170}+13, 26)$.

Ответ: $x \in (0, 13-\sqrt{170}] \cup [\sqrt{170}+13, 26)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{r_1 = \frac{219}{50}}$

$\cancel{r_2 = \frac{219}{25\cdot 50}\cdot\frac{24}{2} = \frac{219\cdot 12}{25^2} = \frac{219}{25}\left(\frac{219}{625}\right)^2}$

~~Пусть~~ $\cancel{\angle CBA = \alpha}$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{219}{(25)^2}}$

$\cancel{BA^2 = 12^2 + CA^2 = 12^2 + \left(\frac{219}{50}\right)^2 = 25^2 =}$

$\cancel{EA}$

Заметим, что поскольку $EF \parallel O_1B$,

то $\angle FEA = \angle O_1BA = \angle O_1AB = \angle CBA$

E ~~прор~~ $\cap BC$.

$\Omega \cap EF$, значит, EF диаметр

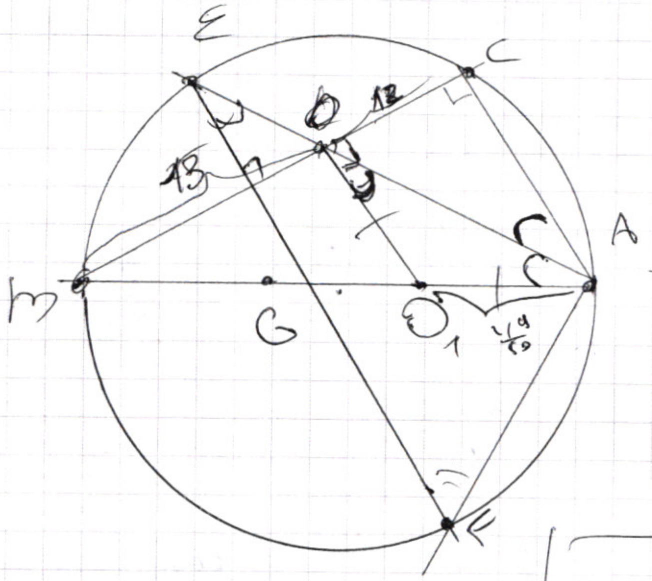
$\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90°$, $\cancel{EFA = \frac{\pi}{2} - \angle FAE} =$

$= \cancel{\arccos(\angle CBA)}$

$EFA = 90° - \angle CBA = \arcsin\left(\left(\frac{219\cdot 24}{25^2}\right)^{-1}\cdot 25\right) =$

$= \frac{25^3}{\quad}$

5



AFE – ?, r_v – ?

S_{AEF} – ?, r_w – ?

$CD = 12$

$BD = 13$

$r_v = r_1$ – б. больш

$r_w = r_2$ – ч. мал

$$\frac{BC}{BD} = \frac{CA}{DO_1} = \frac{25}{13} = \frac{2r_v}{2r_v - r_w}$$ – подобные тр-ки

Пусть O_1 – ц w, O – ц v; $BA \cap w = G, A$

по т. о касательной и секущей:

$BD^2 = BG \cdot BA = 2(r_v - r_w) \cdot 2r_v = 13^2$

$2r_v \cdot 13 = (2r_v - r_w) \cdot 25$

$4r_v^2 - 4r_w r_v - 169 = 0$

$r_2 = \frac{24}{25} r_1$

$4r_1^2 - \frac{24 \cdot 4}{25} r_1 - 169 = 0$

$D = 2\sqrt{\frac{24^2}{25^2} + 13^2 \cdot 4} = 2\sqrt{\frac{144}{25^2} + 169 \cdot 25}$

$= 4\sqrt{\frac{12^2}{25^2} + 13^2 \cdot 25^2} = 4\sqrt{\frac{9621}{25}} = 4\sqrt{\frac{9 \cdot 13^3}{25}} =$

$= \frac{4 \cdot 3 \cdot 13}{5}$

$r_1 = \frac{24}{50} + \frac{39}{10}$, т.к. $r_1 > 0$; $r_1 = \frac{24 + 200 - 5}{50} = \frac{219}{50}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница № 7

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

На границе ОДЗ $x=0$ нер-во удовлетвор верно

$1 + \varepsilon \geq \varepsilon$, что верно.

Максимум $f(x) = 26x - x^2$ в т. $x = 13$, т.к. это пар ветвями вверх с вершиной в $x=13$.

$1 + 13^{2\log_5 12 - 2} \geq 13^{2\log_5 13 - 2}$

$1 + 13^{2\log_5 \frac{12}{5}} \geq 13^{2\log_5 \frac{13}{5}}$

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5 (26x - x^2)}$

$169^{\log_5 12} + 169 \geq 169^{2\log_5 169}$

$x^{\log_5 x}$

$5^{(\log_5 x)^2}$

$5^{2\log_5 13}$

$+$

$f(a)$

$a^{\log x} + a^{\log y} \geq a^{\log z}$

$a^{\log x}(1 - a^{\log y - \log x})$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4 r_1^2}{25} = 13^2 \qquad r_1 = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2}$

$r_2 = \frac{24}{25} r_1 \Rightarrow \qquad r_2 = \frac{24}{25} \cdot \frac{65}{2} = \frac{156}{5}$

$EF \parallel O_1 D \Rightarrow \angle FEA = \angle O_1 AD = \angle O_1 AB = \angle CBA$

E - сер $BC \rightarrow O \in EF \Rightarrow \angle EAF = 90°$

$EAF = 90° \Rightarrow$

$EFA = CAB = \arcsin\left(\frac{25}{BA}\right) =$

$= \arcsin\left(\frac{25}{65}\right) = \arcsin\left(\frac{5}{13}\right)$

$S_{\triangle AEF} = FA \cdot AE = 25 \cdot \sqrt{65^2 - 25^2} =$

$= 25 \cdot 5\sqrt{169 - 25} = 25 \cdot 5 \cdot 12 = 60 \cdot 25 = 1500.$

Ответ: $\frac{65}{2}, \frac{156}{5}, \arcsin\left(\frac{5}{13}\right), 1500.$

5. $4 \le x \le 28$

$4 \le y \le 28$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$

$\Updownarrow$

$f(x) < -f\left(\frac{1}{y}\right)$

Заметим, что $\forall a \in \mathbb{Q}^+$ $f(a) = f(a) + f(1)$

$\Downarrow$

$f(1) = 0$

Заметим, что (*) $f(p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}) = \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right] > 0$, где $\forall i$ p_i - простые, α_i - целые, а любое целое можно представить в таком виде, значит, любое целое ≥ 0.

Далее $\forall a \in \mathbb{Q}^+$: $f(1) = f\left(a \cdot \frac{1}{a}\right) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0 =$

$\Downarrow$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$.

Значит, $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, если (*) для y больше (*) для x.

Переберём: $f(1) = 0$, $f(2) = 0$, $f(3) = 0$, $f(4) = 0$, $f(5) = 1$, $f(6) = 0$, $f(7) = 1$, $f(9) = 0$, $f(8) = 0$, $f(10) = 1$, $f(11) = 2$, $f(12) = 0$, $f(13) = 3$, $f(14) = 1$, $f(15) = 1$, $f(16) = 0$, $f(17) = 4$, $f(18) = 0$, $f(19) = 4$, $f(20) = 1$, $f(21) = 1$, $f(22) = 2$, $f(23) = 2$, $f(24) = 0$, $f(25) = 2$, $f(26) = 3$, $f(27)$

☐ черновик ☐ чистовик Страница № 9

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6. $\frac{8-6x}{3x-2} \overset{(1)}{\geq} ax+b \overset{(2)}{\geq} 18x^2-51x+28$; ~~$\frac{8-6x}{3x-2}$~~ $\geq 18x^2$

$x \in \left(\frac{2}{3}, 2\right] \Rightarrow 3x-2>0$.

Значит, решение - перес. нер. в (1) и (2)

1) $(8-6x) \geq (3x-2)(ax+b)$

$3ax^2 + (6-2a+3b)x - 2b - 8 \leq 0$

~~парабола~~ Пусть $a>0$:

$x^2 + \frac{6-2a+3b}{3a}x - \frac{(2b+8)}{3a} \leq 0$ - парабола ветвями вверх

$x = \frac{2a-3b-6}{6a} \pm \frac{1}{3a}\sqrt{(6-2a+3b)^2 - 4(2b+8)}$ решения.

$x \in$

2) $28x^2-(51-a)x+28-b \leq 0$

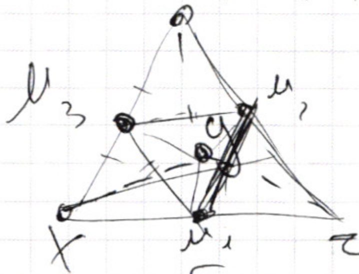
$x = a-51 \pm \sqrt{(51-a)^2 - 28\cdot 4\cdot(28-b)}$

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

7. Я мм

T M_1, M_2, M_3 – ср. ZX, TZ, TX.



$TY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$.

XZ

$TX = \sqrt{2} \Rightarrow M_1M_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

$M_1M_3 = 1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(27)=0$, $f(28)=1$.

Значит, ... (предпол., что $\frac{x}{y}$ несократ. дробь)

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y)$.

1) ~~$f(x)=0$, $f(y)>0$.~~

Все что $\vdots$ 2 или 3 значит f такие же, или если бы их разделили на эти.

$x=4$:

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$: $f\left(\frac{4}{5}\right)$, $f\left(\frac{4}{7}\right)$, $f\left(\frac{4}{11}\right)$, $f\left(\frac{4}{13}\right)$, $f\left(\frac{4}{15}\right)$, $f\left(\frac{4}{17}\right)$, $f\left(\frac{4}{19}\right)$, $f\left(\frac{4}{21}\right)$, $f\left(\frac{4}{23}\right)$, $f\left(\frac{4}{25}\right)$, $f\left(\frac{4}{27}\right)$; то же для $x=8$ и 16.

для $x=9$: $f\left(\frac{9}{4}\right)$, ..., все, что не $\vdots$ 3, для 27 то же самое, итого всего 16. $16\cdot 2=32$.

$11\cdot 3 = 33$

Далее смотрим ~~$f(7)$~~ $f\left(\frac{7}{11}\right)$, $\frac{7}{13}$, $\frac{7}{17}$, $\frac{7}{19}$, $\frac{7}{22}$, $\frac{7}{23}$, $\frac{7}{25}$, $\frac{7}{26}$ — то же за иск. 22 и 26 для $y=14$ и 21.

$8+6+6=20$.

для $x=10$, 20 — то же за иск. 22 и 26.

$6+6=12$.

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)