МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

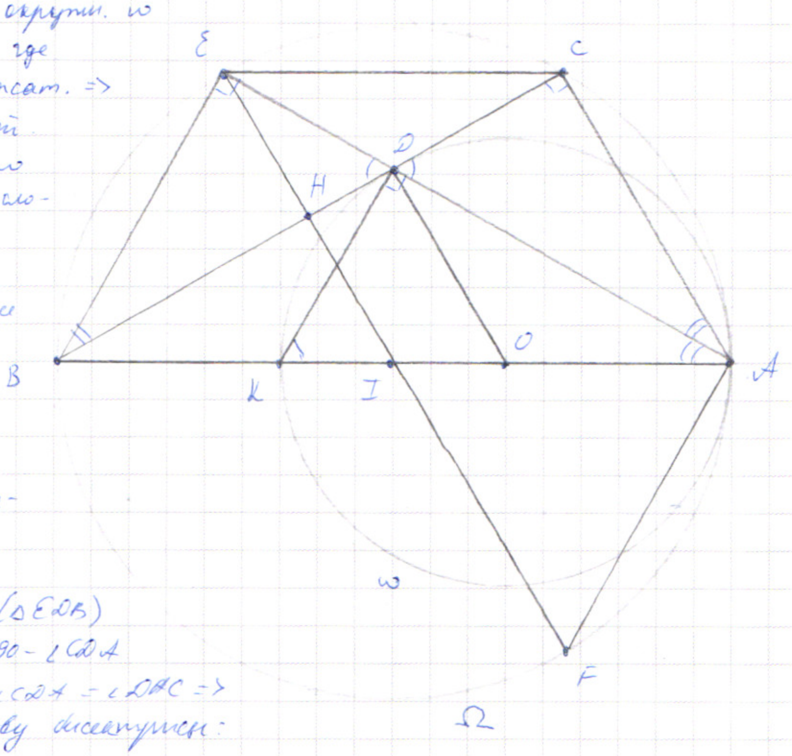
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

Если провести касательную к окружн. ω в точке A, то OA; IA ⊥ a, где O – центр ω; I – центр Ω; a – касат. => O; I; A лежат на одной прямой (касательные к Ω в точке A и к ω в точке A совпадают, т.к. по условию ω касается Ω в точке A.)



$\angle BEA = \angle BCA = \angle KDA = 90°$ (опираются на диаметры)

~~∠KDA~~ $\angle DKA = \frac{1}{2} \smile DA$ (вписанный на дугу DA);

$\angle CDA = \frac{1}{2} \smile DA$ (угол между касательной и хордой) =>

$\angle CDA = \angle DKA$; $\angle EDB = \angle CDA$ (как вертикальные), $\angle EBD = 90° - \angle EDB$ ($\triangle EDB$)

$\angle DAK = 90° - \angle DKA$ ($\triangle DKA$); $\angle DAC = 90 - \angle CDA$ ($\triangle CDA$) => $\angle DAK = 90 - \angle DKA = 90° - \angle CDA = \angle DAC$ =>

DA – биссектриса $\triangle ABC$ => по с-ву биссектрисы:

$\frac{AB}{BD} = \frac{AC}{CD}$ (1); $\angle BDO = 90°$ (угол между касательной и радиусом к точке касания) =>

$\triangle BDO \sim \triangle BCA$ ($\angle CBA$ – общ; $\angle BDO = \angle BCA = 90°$) => $\frac{DO}{BD} = \frac{CA}{BC}$; $DO = r$; $BD = \frac{13}{2}$; $DC = \frac{5}{2}$;

$BC = BD + DC = \frac{18}{2}$; $CA = \frac{BC \cdot DO}{BD} = \frac{r \cdot \frac{18}{2}}{\frac{13}{2}} = \frac{18r}{13}$, $AB = 2R$ (диаметр)

(1): $\frac{2R}{\frac{13}{2}} = \frac{\frac{18r}{13}}{\frac{5}{2}}$ => $10R = 18r$; $R = \frac{9}{5}r$; По теореме Пифагора для $\triangle BDO$:

$DO^2 + BD^2 = BO^2$; $r^2 + \frac{13^2}{2^2} = (2R - r)^2$; $r^2 + \frac{13^2}{2^2} = \frac{13^2}{5^2}r^2$; $r^2\left(\frac{169 \cdot 25}{25}\right) = \frac{13^2}{2^2}$

$r^2 = \frac{5^2 \cdot 13^2}{12^2 \cdot 2^2}$; $r = \frac{5 \cdot 13}{12 \cdot 2}$; $R = \frac{3 \cdot 13}{8}$; по т. Пифагора для $\triangle DCA$: ~~$\triangle DAK$: $DA^2 + DK^2 = AK^2$~~

~~$DA^2 +$~~ $DC^2 + CA^2 = DA^2$; ~~25~~ $\frac{5^2}{2^2} + \frac{18^2 r^2}{13^2} = DA^2$; $DA^2 = \frac{25}{4} + \frac{18^2 \cdot 5^2 \cdot 13^2}{4 \cdot 12^2 \cdot 13^2} = \frac{25}{4}\left(1 + \frac{18^2}{12^2}\right) =$

$= \frac{5^2}{2^2}\left(1 + \left(\frac{3}{2}\right)^2\right) = \frac{5^2 \cdot 13}{2^2 \cdot 2^2}$; $DA = \frac{5\sqrt{13}}{4}$; по с-ву пересекающихся хорд:

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = \frac{13 \cdot 5}{4}$; $ED = \frac{13 \cdot 5 \cdot 4}{4 \cdot 5\sqrt{13}} = \sqrt{13}$; $EA = \frac{9}{4}\sqrt{13}$; $\frac{EA}{\sin\angle EFA} = 2R$ (по т. синусов)

$\sin\angle EFA = \frac{\frac{9}{4}\sqrt{13}}{2 \cdot \frac{3 \cdot 13}{8}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$; $\angle AFE = \arcsin\sqrt{\frac{9}{13}}$; По т. Пифагора для $\triangle BEA$: $EB^2 + EA^2 = BA^2$

$EB^2 + \frac{9^2}{4^2} \cdot 13 = 4 \cdot \frac{9 \cdot 13^2}{8^2}$; $EB = \frac{3\sqrt{13}}{4}$; т.к. ~~∠BEA~~ $\angle BAE = \angle EAC$ => $BE = EC$ => BEC – равнобедр. =>

т.к. EH - высота из вершины => EH - медиана => EH - серпер к хорде BC =>

~~$EH \cap I$~~ $I \in EH$. => $\triangle EBI = \triangle AFI$ ($BI = IA$; $EI = FI$ (как радиусы; $\angle EIB =$

$\angle AIF$ (как вертикальные)) => $BE = AF$ => $S_{AFE} = \frac{1}{2} AF \cdot FE \sin \angle AFE =$

$= \frac{1}{2} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{3 \cdot 13}{4} \cdot \frac{9}{\sqrt{13}} = \frac{27 \cdot 13}{32}$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$; $\angle AFE = \arcsin \sqrt{\frac{9}{13}}$

$S_{AFE} = \frac{351}{32}$

№1

Пусть $\sin 2\alpha = a$; $\cos 2\alpha = b$; $\cos 2\beta = x$; $\sin 2\beta = y$, тогда

$$\begin{cases} ax + by = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ a(x^2 - y^2) + b \cdot 2xy + a = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$(\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta)$

$(\cos 4\beta = \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta$; $\sin 4\beta = 2\sin 2\beta \cos 2\beta)$

$by = -\frac{1}{\sqrt{17}} - ax$

$a(x^2 - y^2) + \frac{2x}{\sqrt{17}} - 2ax^2 + a = -\frac{8}{17}$; т.к. $\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1$, то

$-a(x^2 + y^2) = -a$

$-a - \frac{2x}{\sqrt{17}} + a = -\frac{8}{17}$; $x = \frac{4}{\sqrt{17}}$; ~~$y = \sqrt{1 - x^2}$~~ $x^2 + y^2 = 1$ => $y = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \frac{4a}{\sqrt{17}} + \frac{b}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{a \cdot 15}{17} + \frac{b \cdot 8}{17} + a = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

2) $y = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$$\begin{cases} \frac{4a}{\sqrt{17}} - \frac{b}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{a \cdot 15}{17} - \frac{b \cdot 8}{17} + a = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 16a + 8b = -8 \end{cases}$$

$4b = -4$

$b = -1$

$a = 0$

$$\begin{cases} 4a - b = -1 \\ 16a - 8b = -8 \end{cases}$$

$-4b = -4$

$b = 1$

$a = 0$

$$\begin{cases} 4a + b = -1 \\ 32a + 8b = -8 \end{cases}$$

$4a + b = -1$

$$\begin{cases} 4a - b = -1 \\ 32a - 8b = -8 \end{cases}$$

$4a - b = -1$

$a^2 + b^2 = 1$

$b = -1 - 4a$

$b = 1 + 4a$

$16a^2 + 8a + 1 + a^2 = 1$

$a(17a + 8) = 0$

$a = 0$ $\quad b = \{-1; 1\}$

$a = -\frac{8}{17}$ $\quad b = \{-\frac{9}{17}; \frac{9}{17}\}$

$tg 2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{9}{8} = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$tg 2\alpha = \{0; \frac{8}{9}; -\frac{8}{9}\}$; $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ 8tg^2\alpha + 18 tg\alpha - 8 = 0 \quad 4tg^2\alpha + 9tg\alpha - 4 = 0 \\ 8tg^2\alpha - 18 tg\alpha - 8 = 0 \quad 4tg^2\alpha + 9tg\alpha - 4 = 0 \end{array}\right.$

$D = 81 + 64 = 145 = 5 \cdot 29$

$t_1 = \frac{-9 - \sqrt{145}}{8}$; $t_2 = \frac{-9 + \sqrt{145}}{8}$; $t_3 = \frac{9 + \sqrt{145}}{8}$

$t_4 = \frac{9 - \sqrt{145}}{8}$; $t_5 = 0$

Ответ: $tg\alpha \in \{0; \frac{-9 \pm \sqrt{145}}{8}, \frac{9 \pm \sqrt{145}}{8}\}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$; $x^2+6x>0$ – ОДЗ; $x^2+6x=t$, $t>0$

$(4^{\log_4 3})^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$; $t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5} > 0$

$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$; $f(k)=t^k$; при $t<1$ $f(k_1)>f(k_2)$, где $k_1<k_2$

Если $t<1$, тогда $t^{\log_4 3} > t^{\log_4 5}$; $t^{\log_4 4} > t^{\log_4 5}$; $(\underbrace{\log_4 3}_{<1} < \underbrace{\log_4 5}_{>1})$

тогда $t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$ при любом $t\in(0;1)$

Если $t>1$, то $f(k_1)<f(k_2)$, где $k_1<k_2$

$t^{\log_4 3} + t^{\log_4 4} \geq t^{\log_4 5}$; $3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$; $\log_4 t \leq 2$

~~$t\in(1;2]$~~; $t\leq 16$

При $t=1$ $1+1\geq 1$ (И) $\Rightarrow$ $t\in(0;16]$

$\begin{cases} x^2+6x>0 \\ x^2+6x\leq 16 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+6)>0 \\ (x-2)(x+8)\leq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty) \\ x\in[-8;2] \end{cases}$

Ответ: $x\in[-8;-6)\cup(0;2]$

№2

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad |\cdot 3 \end{cases}$ $\begin{cases} (3y-2x)^2 = \cancel{3xy}\ (x-1)(3y-2) \quad |\cdot 6 \\ (3x-3)^2+(3y-2)^2=5^2 \end{cases}$ ОДЗ: $3y-2x>0$

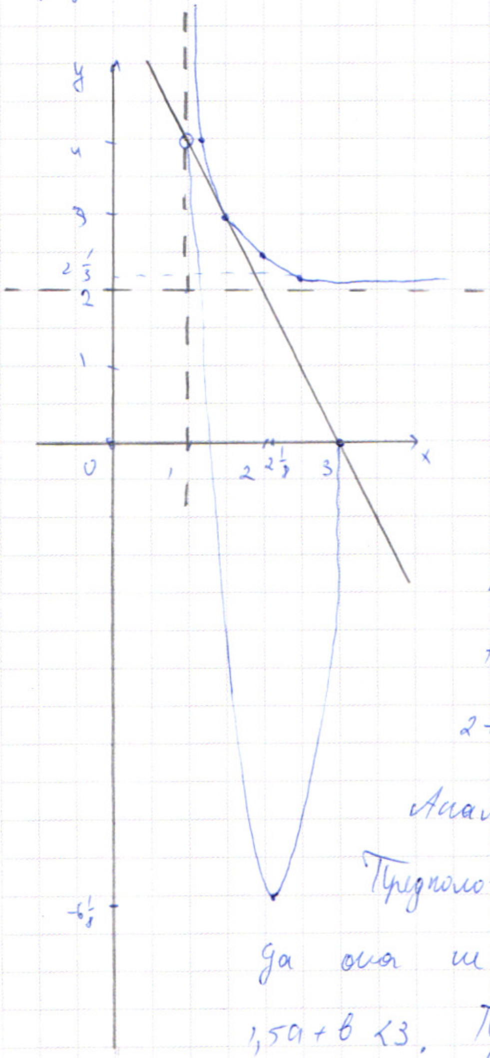
~~$(3x+3y-5)^2=5^2+6(3y-2x)^2$~~ $(3x-3y-1)^2=25-6(3y+2x)^2$

~~$3y-$~~

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

Из условий следует, что прямая $ax+b$ должна находиться не ниже (на области определения) чем $8x^2-34x+30$ и не выше, чем $2+\frac{1}{2(x-1)}$



Заметим, что только прямая вида $y=-2x+6$ удовлетворяет условию ($a=-2$; $b=6$)

Если $ax+b$ проходит через точку $A(1;4)$ ($8\cdot1^2-34\cdot1+30=4$), то если $a<-2$, то в окрестности $[3-\varepsilon;3]$ $ax+b<8x^2-34x+30$, а если $a>-2$, то $ax+b>2+\frac{1}{2(x-1)}$, ведь $-2x+6$ ~~если~~ касается $2+\frac{1}{2(x-1)}$ в точке $C(1,5;3)$ (Если $f(x)=2+\frac{1}{2(x-1)}$, то $f'(x)=\frac{-1}{2(x-1)^2}$; $a=-2$; $x_1=1,5$; $x_2=0,5<1$ $\varnothing$

$f(x_1)=3$; $-2\cdot1,5+6=3 \Rightarrow -2x+6$ касается гиперболы $2+\frac{1}{2(x-1)}$ в точке C).

Аналогично, если $ax+b$ проходит через $B(3;0)$

Предположим, что $ax+b$ не проходит через A и B, тогда она не касается гиперболы в точке C, а значит $1,5a+b<3$. При $a=-2$ она пересечет параболу в 2 точках и в окрестностях $(1;1+\varepsilon]$ и $[3-\varepsilon;\varepsilon]$ будет $ax+b<8x^2-34x+30$. Значит $a\neq-2$. Если $a>-2$, то очевидно, что $ax+b$ пересечет ~~либо~~ левую ветвь параболы, а при $x<-2$, очевидно, что правую. Тогда единственным решением является $a=-2$; $b=6$

Ответ: $a=-2$; $b=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 9x^2+9y^2-18x-12y-12=0 \end{cases}$$

$(3y-2x)^2=(x-1)(3y-2)$ $\quad 3y-2x\geq 0$

$(3x-3)^2+(3y-2)^2=5^2$ $\quad$ 18 $\quad \frac{18}{33}$

$3+5+5+5$

$6(3y-2x)^2=2(3x-3)(3y-2)$

$(3x+3y-5)^2=5^2+6(3y-2x)^2$ $\qquad (3x+3y-5)^2+(3x-3y-1)^2=2\cdot 5^2$

$(3x-3y-1)^2=5^2-6(3y-2x)^2$ $\qquad 7+\frac{120+6}{33}$

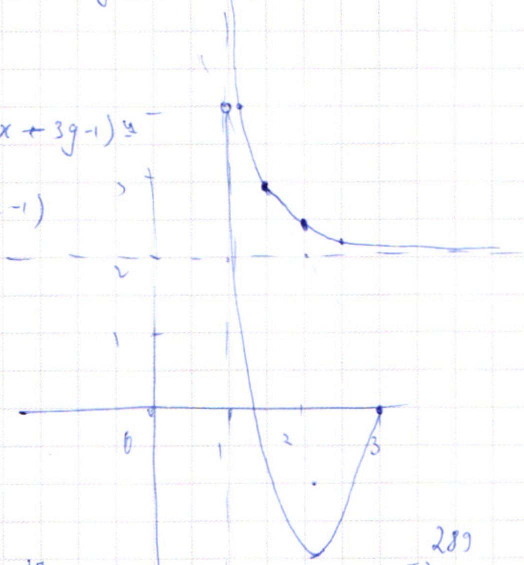
$12(3y-2x)^2=(\cancel{3x}+3y-5-\cancel{3x}+3y+1)(3x+3y-5+3x-3y-1)$

$=(6y-4)(6x-6)=2\cdot 6(3y-2)(x-1)$

$((3x+3y-5)(3x-3y-1))^2=5^4-36(3y-2x)^4$

$(9x^2-\cancel{9xy}-3x+\cancel{9xy}-9y^2-3y+15x+15y+5)$

$9x^2-9y^2-18x-12y+30$
-20



$3x^2-(3x-3)^2+9-(3y+2)^2+4+30$

$(3x-3)^2-(3y+2)^2$

$\frac{17}{8}$ $\quad \frac{17}{8}^2-\frac{2\cdot 17}{8}^2+30$ $\quad \frac{289}{-240}$

$-\frac{49}{8}=-6\frac{1}{8}$

$2+\frac{1}{2(x-1)}$ $\quad -\frac{17}{8}^2+30$

$\frac{34}{16}=2\frac{1}{8}$

$y=-2x+6$

$f(x)=2+\frac{1}{2(x-}$

$f(x)=2+\frac{1}{2}(x-1)^{-1}$

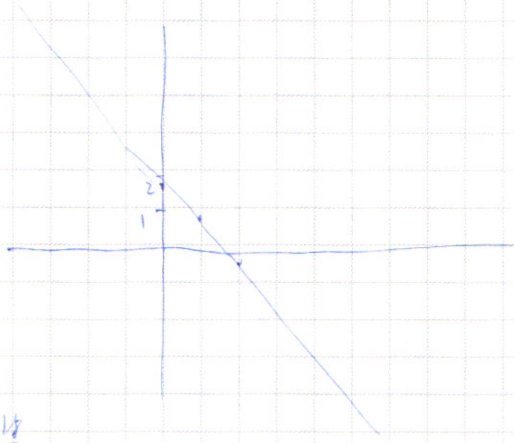
$f'(x)=\frac{1}{2}(-1)\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{-1}{2(x-1)^2}=-2$ $\qquad \frac{1}{2(x-1)^2}=2$ $\qquad x-1=\pm\frac{1}{2}$

$x=\frac{3}{2}$

$f(x) = (3y - 2x)^2 = 0$

$3y - 2x \geq 0$

$|3y - 2x| = 0$



$3y = -x + \frac{5}{3}$

$(3x + 3y - 5)^2 = 5^2$

49

36

26 25 24

16 $3y\,2x = 4$

$3y - 2x = 2$

$2;\ 2$

$6 + 6 - 5$

7

$\frac{18}{33}$

$2 = \sqrt{12 - 4 - 6 + 2}$ V

$12 + \cancel{12} - \cancel{12} - 8 - 4$

$3 + \frac{4}{3} - 6 - \frac{8}{3} = 4$

$(3y - 2)(3y - 2x - x + 1) = 0$ $2 - 2x \geq 0$

$(3y - 2)\ (3y - 3x + 1) = 0$ $x \leq 1$

$y = \frac{2}{3}$ $y = x - \frac{1}{3}$

$3x^2 + \frac{4}{3} - 6x - \frac{8}{3} = 4$ $y = \frac{2}{3}$

$9x^2 - 18x - 16 = 0$

$D_1 = 81 + 16 \cdot 9 = 9 \cdot 25 = 15^2$

$x_1 =$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t + t^{\log 3} \geq t^{\log 5}$ ~~a + a~~ $x + x^a \geq x^b$

$1 + x^{a-1} \geq x^{b-1}$

$a - \sin 2\alpha$ $x - \cos 2\beta$ $ax + by = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $by = -\frac{1}{\sqrt{17}} - ax$

$b - \cos 2\alpha$ $y - \sin 2\beta$

$a(x^2 - y^2) + b \cdot 2xy + a = -\frac{8}{17}$ $ax = \frac{1}{-\sqrt{17}} - by$

$a(x^2 - y^2) + 2x \cdot by + a = -\frac{8}{17}$

$a(x^2 - y^2) - \frac{2x}{\sqrt{17}} - 2ax^2 + a = -\frac{8}{17}$

$x^2 + y^2 = 1$

$-a\underbrace{(x^2 + y^2)}_{1} - \frac{2x}{\sqrt{17}} + a = -\frac{8}{17}$ $x = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{16}{17} + y^2 = 1$; $y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$y = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

1) $a\frac{15}{17} + b\frac{8}{17} + a = -\frac{8}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}a + \frac{1}{\sqrt{17}}b = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$16a + 8b = -8$

$2a + b = -1$ $2a - b = -1$ $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$ $\alpha \neq 0$, tg $\operatorname{tg}\alpha \neq 0$

$a^2 + b^2 = 1$ $a^2 + b^2 = 1$ $\operatorname{tg}\alpha > 0$

$4a + b = -1$

$b = -1 - 2a$ $b = 2a + 1$

$b = -4a - 1$ 0 $-\frac{4}{3}$ $\frac{4}{3}$

$a^2 + 4a^2 + 4a + 1 = 1$ $16a^2 + 8a + 1 + a^2 = 1$

$a(5a + 4) = 0$ $\operatorname{tg}\alpha = 0$ $\frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{4}{3} - 2\operatorname{tg}\alpha = 0$

$a = 0$ $b = -1$ $a = 0$ $b = 1$

$a = -\frac{4}{5}$ $b = \frac{3}{5}$ $a = -\frac{4}{5}$ $b = -\frac{3}{5}$ $17a^2$ $\frac{4}{3}\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{4}{3} + 2\operatorname{tg}\alpha$

$\frac{8}{17}\frac{9}{17}$

$t = 0$

~~$2t^2 - 2 = 3t$~~

$\begin{cases} t = 0 \\ 2t^2 - 3t - 2 = 0 \\ 2t^2 + 3t - 2 = 0 \end{cases}$

$D = 9 + 16 = 5^2$

$t_1 = \frac{3 \pm 5}{4} = 2; -\frac{1}{2}$ $-\frac{8}{17} + 1 = \frac{9}{17}$ $\frac{8}{9} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$t_2 = \frac{-3 \pm 5}{4} = -2; \frac{1}{2}$

$4a + b = -1$ $16a + 4b = -4$ $-8t^2 + 8 = 18t$

$2a + b = -2$ $16a + 8b = -8$ $8t^2 + 18t - 8 = 0$

$4b = -4$ $4t^2 + 9t - 4 = 0$

$2a = 1$ $b = -1$ ~~$D_1 = 9$~~ $D = 81 + 4 \cdot 4 \cdot 4 =$

$a = \frac{1}{2}$ $4a + b = -1$ $81 + 64 =$ $\frac{\pm 11}{4}$

$2a + b = -1$ 145

~~a~~ $\neq 0$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

13; 14 10:51

9 11:00

2:23

$$\begin{cases} 3y^{2} - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 \end{cases}$$

$4x^2 - 12xy + 9y^2 = 3xy - 2x - 3y + 2$

$t^{\log}$ $\cancel{3x^2+3y^2}$ $4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0$

$3x^2 + 3y^2 + 6x - 4y - 4 = 0$

$\cancel{8x^2}$ $\cancel{8x^2+9}$ $8x^2 + 18y^2 - 30xy + 4x + 6y = 4 = 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y$

$5x^2 + 15y^2 - 30xy + 10x + 10y = 0$

$$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0 \end{cases}$$

$x^2 + 3y^2 - 6xy + 2x + 2y = 0$ $(1; -1)$

$3 + 3 - 6 + 4 - 4 = 0$

$4x^2 + 9y^2 + 12xy -$

$t + t^a = t^b$ $\cancel{4 + 9 + 15 + 2 - 3 - 2}$

$2x$ $1 + t^{a-1} = t^{b-1}$ $1 = t^{a-1}(t$

$9x^2 + 9y^2 - 12x - 12y - 12 = 0$

1^x

$(\sqrt{3}x)^2 - 2\cdot(\sqrt{3}x)\sqrt{3} +$ 1^x $\cancel{4 + 9 - 15 - 2 - 3 - 2}$

(2;1)

$+ (\sqrt{3}y)^2 - 2(\sqrt{3}y)\frac{2}{\sqrt{3}} - 4 = 0$ $16 + 9 - 30 + 4 + 3 - 2$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0$ $\cancel{12 + 3 - 12} - 4 - 4$

$(3x)^2 - 2\cdot(3x)\cdot 3 + (3y)^2 - 2(3y)\cdot 2$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0$

$(3x^2)^2 - 2\cdot(3x)\cdot 3 + (3y)^2 - 2\cdot(3y)\cdot 2 + 9 + 4 - 9 - 4 - 12 = 0$

$(3x - 3)^2 + (3y - 2)^2 = 25 = 5^2$

t

$f'(x) = 3^x \ln 3 + 4^x \ln 4$

$y = 3^x$ $\cancel{3y(x-1)} -$

$g'(x) = 5^x \ln 5$

$\cancel{t3}$ $3y(x-1) - 2(x-1)$ $\log_4 t = 2$

$\sqrt{(x-1)(3y-2)}$ $\cancel{16}$ 6 $t = 8$

3 $\frac{1}{3}$ $\frac{21}{3}$ $2 - \frac{5}{3}$

$(x-1)(3y-2) = (3y - 2x)^2$ $11 - 6 = 5 = \sqrt{11\cdot 3 - 6 - 11 + 2}$

$\cancel{22 - 4}$ 18

$(3x-3)(3y-2) - 3(3y - 2x)^2$ $t^{\log_4 3}$ $\log_4 5 = \frac{1}{\log_5 4}$

$t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$ $x > 0$

$(3x - 3 + 3y - 2)^2 = 5^2 + 6(3y - 2x)^2$ $5^{\log_4 t} - 3^{\log_4 t} = 4^{\log_4 t}$ $5^x - 3^x = 1$

$(3x + 3y - 5)^2 = 25 + 6(3y - 2x)^2$ $f(x) = x^a$ $3^x + 4^x = 5^x$

$27 + 64 = 125$

$t + t^{\log_4 5} + t^{\log_4 7}$

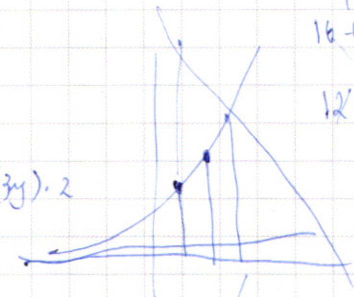
$\cancel{\log}$ $t^{\log_4 3} + t^{\log_4 5} = t^{\log_4 7}$

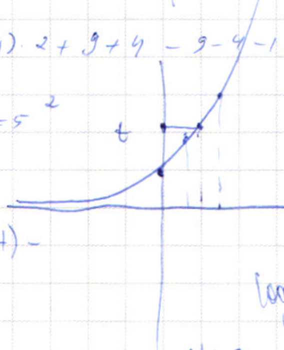
$t^{\log_4 7}\left(t^{\log_4 3 - \log_4 7} + t^{\log_4 5 - \log_4 7}\right) = 0$

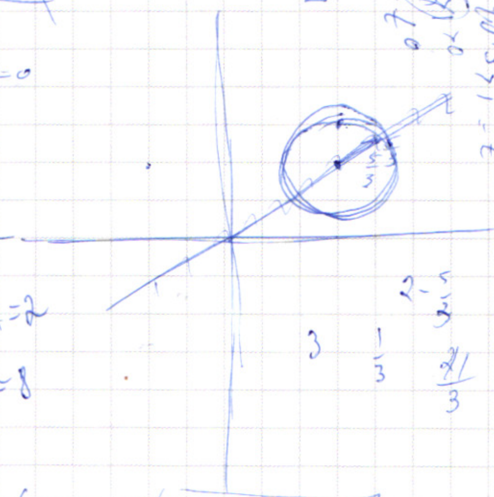
$t^{\log_4 3}\left(1 - t^{\log_4 5 - \log_4 3}\right) = 0$

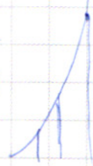
$1 + t^{\log_4 3 - 1} \ldots$

$t^{\log_4 \frac{3}{4} - 1} > 0$









☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha = a$

$\cos 2\alpha = b$

$\sin 2\beta = x$

$\cos 2\beta = y$

$tg 2\alpha = \frac{a}{b} = \frac{2 tg\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

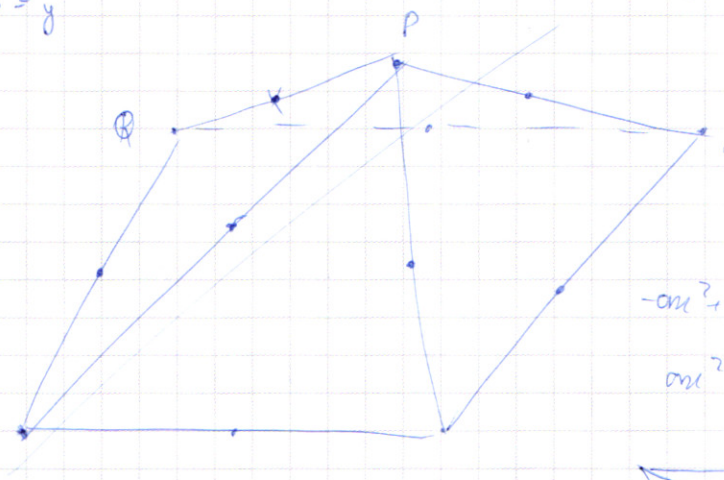
$\cancel{ax+b}$ $ay + bx = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$a(y^2 - x^2) + b\, 2xy = -\frac{8}{17}$

$bx + ay = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

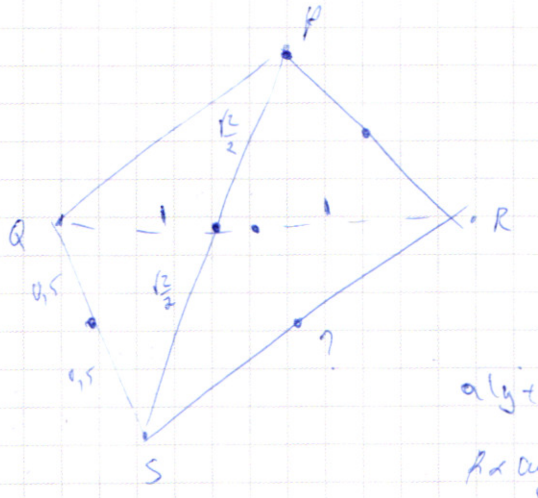
$-ax^2 + ay^2 + 2bxy = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

$bx = -\frac{1}{\sqrt{17}} - ay$



$-ax^2 + ay^2 + \frac{2y}{\sqrt{17}} - 2ay^2 = -\frac{8}{\sqrt{12}}$

$ax^2 + ay^2 + \frac{2y}{\sqrt{17}} = \frac{8}{\sqrt{17}}$



$ax^2 + a(y + y_0)^2$

$\sqrt{a}$

$a(y+\alpha)^2 = ay^2 + 2\alpha a y + a\alpha^2$

$2\alpha a y = \frac{2y}{\sqrt{17}}$

$\alpha a = \frac{2}{\sqrt{17}}$ $\quad \alpha = \frac{2}{\sqrt{17} a}$ $\quad \frac{4}{17a}$

$ax^2 + a\left(y + \frac{2}{\sqrt{17} a}\right)^2 = \frac{8}{17} - \frac{4}{17a} = \frac{4}{17}\left(2 - \frac{1}{a}\right)$

$2 - \frac{1}{a} > 0$

$\frac{1}{a} < 2$ $\quad \frac{2a-1}{a} > 0$ $\quad \frac{a - \frac{1}{2}}{a} > 0$

$a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{1}{2}; +\infty)$

$ay + bx = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$ $\qquad a - \sin 2\alpha \quad x - \cos 2\beta$

$\qquad b - \cos 2\alpha \quad y - \sin 2\beta$

$= 2\sin\alpha\cos\alpha$

$2ab(x^2-y^2) + 2xy(a^2-b^2) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad ax+by = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad a(x^2-y^2) + 2xyb + a = -\frac{8}{17}$

$ax + by = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad a^2+b^2=1$, $x^2+y^2=1$ $\qquad ax^2 - ay^2 + 2xyb + a = -\frac{8}{17}$

$a(x^2-y^2)$ $\qquad by = -\frac{1}{\sqrt{17}} - ax$

$ax^2 - ay^2 + \frac{2x}{\sqrt{17}} - 2ax^2 + a = -\frac{8}{17}$

$ax^2 + ay^2 + \frac{2x}{\sqrt{17}} - a = \frac{8}{17}$

$2x = 8 \qquad x = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 9y^2 - 12xy + 4x^2 = 3xy - 2x - 3y + 2 \geq 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$\begin{cases} 4x^2 + 9y^2 - 15xy + 2x + 3y - 2 = 0 \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x + 4y - 4 = 0 \end{cases}$ $\qquad 7x^2 + 12y^2 - 15xy - 4x - y - 6 = 0$

$x^2 + 6y^2 - 15xy - 8x + 7y + 2 = 0$

$a+b \quad a-b \qquad 7x^2 + 12y^2 - 4x - y - 6 = x^2 + 6y^2 + 8x + 7y + 2$

$9x^2 + 9y^2 - 18x - 12y - 12 = 0$ $\qquad 6x^2 + 6y^2 - 12x - 8y - 8 = 0$

$5x^2 + 15xy - 20x - 15y - 10 = 0$ $\qquad \cancel{3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y - 4 = 0}$

$x^2 + 3xy - 4x - 3y - 2 = 0$ $\qquad 3^{\log_4(x^2+6x)} + (x^2+6x) \geq |\underbrace{x^2+6x}_{t}|^{\log_4 5}$

$x^2 - 4x - 4 + 2 + 3y(x-1) = 0$

$(x-2)^2 + 3y(x-1) + 2 = 0$ $\qquad 3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$3 = 4^{\log_4 3} \quad (4^{\log_4 3})^{\log_4 t} = \log(4^{\log_4 t})^{\log_4 3} = t^{\log_4 3}$

$\cancel{3 = 4}$ $\qquad t^{\log_4 3} + t \geq t^{\log_4 5} \qquad t > 0$

$t \geq t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3} = t^{\log_4 3}(\log t^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1)$

$t^{1-\log}$

$t(t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1) \geq t^{\log_4 5}$

$\cancel{\log_t(t(t\,lo}$ $\qquad \log_t(t(t^{\log_4 \frac{3}{4}} + 1)) \geq \log_t t^{\log_4 5}$

$\cancel{1 + \log_t t}$ $\qquad 1 + \log_t(t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1) \geq 0$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} \vee t^{\log_4 \frac{5}{4}} > 0$ $\qquad t^{\log_4 \frac{3}{4}} - t^{\log_4 \frac{5}{4}} + 1 \geq \frac{1}{t}\, t^{-1}$

$t^{\log_4 3} - t^{\log 5} + t \geq 1$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = a$, $\cos 2\alpha = b$, $\sin\beta = x$, $\cos\beta = y$

$\begin{cases} ay + bx = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ a\cdot(y^2 - x^2) + 2xyb + a = -\frac{8}{17} \end{cases}$

$tg 2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$bx + ay = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$ay^2 - ax^2 + 2bxy + a = -\frac{8}{17}$

$72 - 10\,2430$

$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$x_0 = \frac{34}{16} = \frac{17}{8}$

$\frac{4x-4+1}{}$

$2 + \frac{1}{2(x-1)}$

$-\frac{49}{8}$

$\frac{17^2}{8} - \frac{17^2 \cdot 2}{8} + 30$

$= -\frac{17^2}{8} + 30$

$17 \cdot 17 = 119\ 17\ 289$, $-289 + 240 = 49$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} + x^2$

$D_1 = 17^2 - 30\cdot 8 = 7^2$

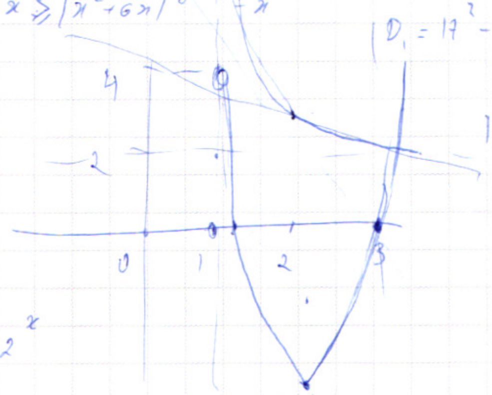
$\frac{17-7}{8} = \frac{10}{8}$

$\frac{17+7}{8} = 3$

$x^2 + 6x > 0$

$x(x+6) > 0$

$x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty)$



$a^{\log_x b}$

$\log_x b = c$

$\log_x$ $\quad b = x^c$

$\log_2 3 = x$

$2^x = 3$ $\quad 2^x$

$\left(2^{\log_2 3}\right)^{2/\log_2 (x^2+6x)}$

$(x^2+6x)^{2/\log_2 3} = (x^2+6x)^{\log_4 3}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq -x^2$

$(x^2+6x)^1 + (x^2+6x)^{\log_4 3} - (x^2+6x)^{\log_4 5} \geq 0$

$t + t^{\log_4 3} \geq t^{\log_4 5} > 0$

$t(1 + t^{\log_4 \frac{3}{4}}) \geq t \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$\log_t t + \log_t t^{\log_4 3} \geq \log_t t^{\log_4 5}$

$1 + t^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$1 + \log_4 3 \geq \log_4 5$

$\log_4 12 \geq \log_4 5$

$f(x)$ $\quad x > 0$

$f(\alpha\beta) = f(\alpha) + f(\beta)$

$f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ $\quad x \in (1; 3]$

$\frac{4}{3}$

$87 \cdot 13$ $\quad 32$

$3\sqrt{13}$

$-3\cdot 13\left(\frac{4\cdot 13}{8^2 \cdot 8} - \frac{4\cdot 4}{9}\right)$

$\frac{4}{4}$

$-\frac{4^2}{13 \cdot 9^2}$ $\quad -\frac{8^2}{4\cdot 9\cdot 13}$

$87 \cdot 13 = 261\ 87\ 1131$

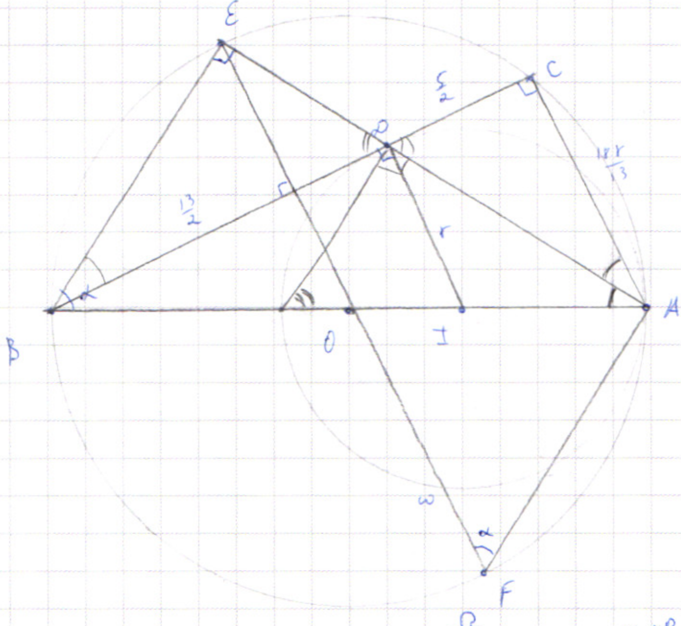
$1{,}096$, 132, $3{,}10$, 288, 220, 192, 280

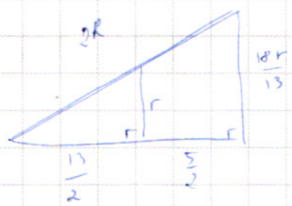
$87 \cdot 13 = 261\ 87\ 1131$

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$BD \cdot DC = ED \cdot DA = \frac{65}{4}$





$\frac{2r}{13} = \frac{2x}{18}$ $x = \frac{18r}{13}$

$4R^2 = \frac{18^2}{4} + \frac{18^2 r^2}{13^2} = 18^2\left(\frac{1}{4} + \frac{r^2}{169}\right)$

$2^2\, 13^2 \cdot 2^2 \cdot R^2 = 18^2(169 + 4r^2)$

$4 \cdot 13 R = 18\sqrt{4r^2 + 169}$

$\frac{x\,\cancel{2}R}{13} = \frac{\cancel{2}\,\cancel{18}^{9} r}{13 \cdot 5}$ $R = \frac{9r}{5}$

$\frac{9}{\cancel{4}}\sqrt{13} \over \sin\alpha$ $= \frac{39}{4} = \frac{3 \cdot 13}{4}$

$\sin\alpha = \frac{9\sqrt{13}}{3 \cdot 13} = \frac{3}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{9}{13}}$ $\alpha = \arcsin\sqrt{\frac{9}{13}}$

$\frac{9r}{5} \cdot 4 \cdot 13 = 18\sqrt{4r^2 + 169}$

$\frac{26r}{\cancel{25}} = \sqrt{4r^2 + 169}$

$\frac{13^2 \cdot 4r^2}{25} = 4r^2 + 169$

$4r^2\left(\frac{169}{25} - 1\right) = 169$

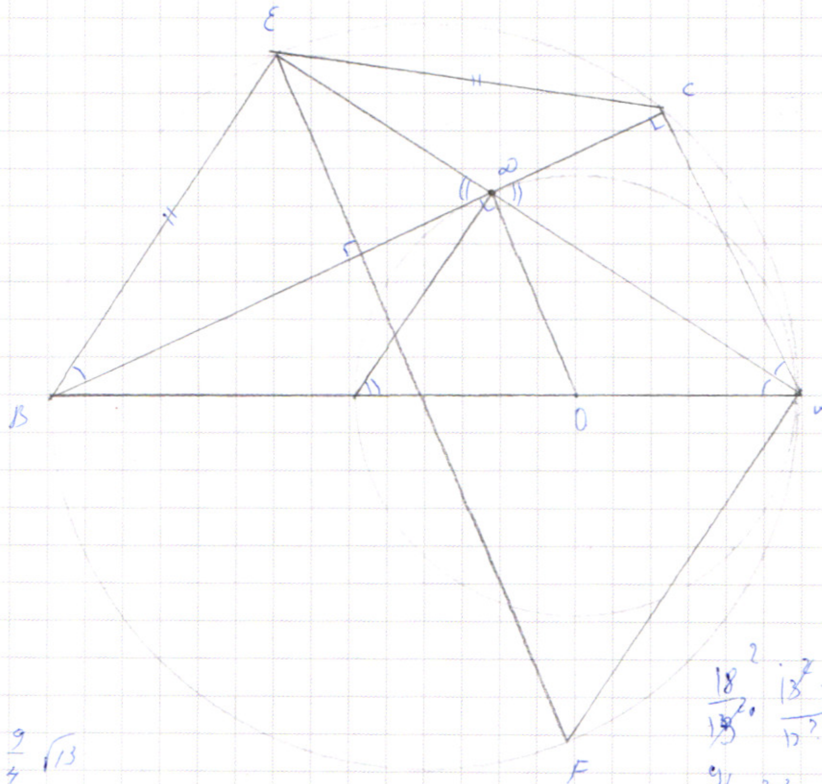
$4r^2 \cdot \frac{144}{25} = 169$

$r^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{12^2 \cdot 2^2}$

$r = \frac{13 \cdot 5}{12 \cdot 2}$

$R = \frac{9\,\frac{13 \cdot 5}{12 \cdot 2}}{5} = \frac{\cancel{9}^{3} \cdot 13}{2 \cdot \cancel{12}_4} = \frac{39}{8}$

$r = \frac{65}{24}$



~~sin 180 = 2α~~

$\sin(90 - \alpha) = \cos\alpha$.

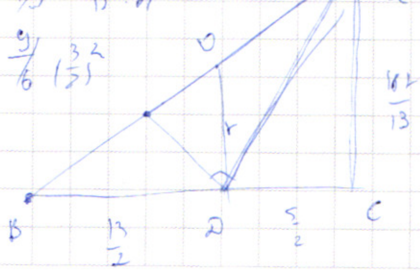
$\frac{18^2}{13^2} \cdot \frac{13^2 \cdot 25}{12^2 \cdot 4}$

$\frac{9}{6}\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$EA = \frac{9}{4}\sqrt{13}$

$\frac{5^2 \cdot 3^2}{16} + \frac{5^2}{4} = a^2 = \frac{13 \cdot 5^2}{16} = a^2$ $a = \frac{5}{4}\sqrt{13}$

$ED \cdot DA = \frac{5 \cdot 13}{4}$ $DA = \frac{5}{4}\sqrt{13}$ $ED = \frac{5 \cdot 13 \cdot 4}{4 \cdot 5\sqrt{13}} = \sqrt{13}$



$\frac{18r}{13} = \frac{18 \cdot 65}{24 \cdot 13} = \frac{\cancel{18}^{9\,3} \cdot 5 \cdot 13}{\cancel{24}_{12\,4} \cdot \cancel{13}} = \frac{15}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)