МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases} \left| \begin{matrix} p=x-6 \\ q=2y-1 \end{matrix} \right| \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p-6q=\sqrt{pq} \\ p^2+9q^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p-6q\geq 0 \\ (p-6q)^2=pq \\ p^2+9q^2=90 \end{cases} \Rightarrow \cancel{p=3\sqrt{10-q}} \quad \cancel{p=\pm 3\sqrt{10-q}}$$

$$\Rightarrow p^2+36q^2-12pq=pq$$

$$p^2-13pq+36q^2=0$$

$$p_{1,2}=\frac{13q\pm\sqrt{169q^2-144q^2}}{2} \Rightarrow \cancel{p_1, p_2} \quad p_1=9q, \quad p_2=4q \quad \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p-6q\geq 0 \\ \left[\begin{matrix} p=9q \\ p=4q \end{matrix}\right. \\ p^2+9q^2=90 \end{cases}$$

① $81q^2+9q^2=90$

$90q^2=90$

$q=\pm 1$

$p=\pm 9$

Но $-9-(-6)=-3<0$

$(p,q)=(9,1)$

② $16q^2+9q^2=90$

$25q^2=90$

$q=\pm\sqrt{3,6}$

$p=\cancel{\pm 14,4}\ \pm 4\sqrt{3,6}$

~~Но $14,4-6(-3,6)<0$~~

~~$(p,q)=(14,4;3,6)$~~

~~$(p,q)=(-14,4;-3,6)$~~

~~Но $\sqrt{14,4}-6\sqrt{3,6}<0$~~

~~$(p,q)=(-\sqrt{14,4};-\sqrt{3,6})$~~

Но $4\sqrt{3,6}-6\sqrt{3,6}<0$

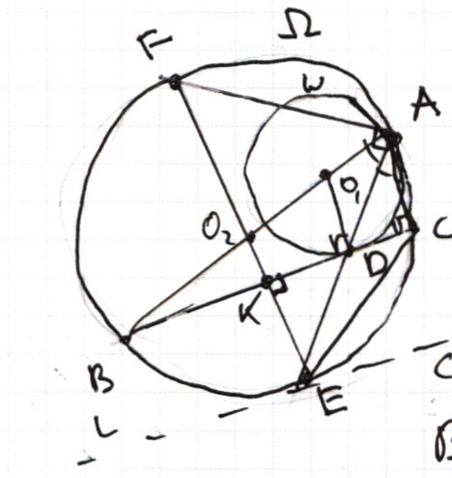
$(p,q)=(-4\sqrt{3,6};-\sqrt{3,6})$

$$\left[\begin{matrix} \begin{cases} x-6=9 \\ 2y-1=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=15 \\ y=1 \end{matrix} \\ \cancel{\begin{cases} x-6=-14,4 \\ 2y-1=-3,6 \end{cases} \quad \begin{matrix} x=-8,4 \\ y=-1,3 \end{matrix}} \\ \begin{cases} x-6=-4\sqrt{3,6} \\ 2y-1=-\sqrt{3,6} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} x=6-4\sqrt{3,6} \\ y=\frac{1-\sqrt{3,6}}{2} \end{matrix} \end{matrix}\right.$$

Ответ: $(15;1)$; $\left(6-4\sqrt{3,6}; \frac{1-\sqrt{3,6}}{2}\right)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4



Дано: $CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

Найти: ~~$r_{\text{}}$~~ r, R, $\angle AFE$, $S_{\triangle AEF}$.

Решение:

0. Как известно E – середина $\smile BC$ (Лемма Архимеда, доказывается гомотетией с центром в A ~~Ω~~ $\omega \to \Omega$ $(D \to E)$, $BC \to l$ $BC \parallel L$, l касается Ω) из этого O_2, K, E, F – лежат на одной прямой, т.к. EK – серпер к BC. Также A, O_1, O_2, B лежат на 1 прямой, т.к. A – общая точка касания.

1. Заметим, что $\angle ACB = \angle O_2KB = 90°$, т.к. AB – диаметр, но тогда $O_2K \parallel AC$, а т.к. $BO_2 = AO_2 \Rightarrow$ $\Rightarrow BK = KC$ по теореме Фалеса $\Rightarrow CD + KD = BD - KD \Rightarrow$ $\Rightarrow KD = \cancel{CD-BD}\ \frac{BD-CD}{2} = \frac{1}{2}$. А т.к. $\smile BE = \smile EC \Rightarrow$ $\Rightarrow AD$ – бис. $\triangle ABC \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{BD}{DC} = \frac{17}{15}$, но $AB^2 = AC^2 + BC^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} AB^2 = AC^2 + 256 \\ 15AB = 17AC \end{cases} \Rightarrow \frac{8^2}{17^2}AB^2 = 256 \Rightarrow AB = 34,\ AC = 30 \Rightarrow$$

$\Rightarrow \boxed{R = \frac{AB}{2} = 17}$ $O_1D \perp BC$ (касательная) $\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{17}{32} \Rightarrow O_1D = \frac{17}{32}AC = \frac{30 \cdot 17}{32} = \boxed{\frac{15 \cdot 17}{16} = r}$.

2. Пусть $\angle AFE = \alpha \Rightarrow \angle AEF = 90 - \alpha$ (FE – диаметр $\Rightarrow \angle A = 90°$) $\Rightarrow \angle EAC = 90 - \alpha$ (т.к. $\angle DKE = \angle ACD = 90°$, $\angle KDE = \angle ADC$) $\Rightarrow AC \parallel FE \Rightarrow ACEF$ – р/б трапеция ($AC \neq FE$, т.к. FE – диаметр, а $O_2 \notin AC$). Тогда CK – высота трапеции $\Rightarrow KE = \frac{1}{2}(FE - AC) = 2$, тогда по теореме Пифагора $CE = \sqrt{4 + 64} = 2\sqrt{17}$, но т.к. трапеция р/б $\Rightarrow FA = CE = 2\sqrt{17}$. Из теоремы Пифагора также $AE = \sqrt{FE^2 - FA^2} = 34^2 - 68 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= 8\sqrt{17} \Rightarrow$ т.к. $\triangle FAE$ – пр. угольный (FE – диаметр) $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{\triangle AEF} = \frac{1}{2} FA \cdot AE = \frac{1}{2} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17} = 8 \cdot 17 = \boxed{136}$

3. Тогда $\angle EFA = \operatorname{arctg}\left(\frac{AE}{FA}\right) = \operatorname{arctg}\left(\frac{8\sqrt{17}}{2\sqrt{17}}\right) = \operatorname{arctg}(4)$

Ответ: $r = 16 - \frac{1}{16}$; $R = 17$; $\angle EFA = \operatorname{arctg}(4)$;

$S_{\triangle AEF} = 136$.

№ 5

Т.к. $f(ab) = f(a) + f(b) \Rightarrow f(a \cdot 1) = f(a) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 = f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$,

также если p – прост, то $f(p^{\alpha}) = \alpha f(p)$

$(f(p^{\alpha}) = f(p) + f(p^{\alpha-1}) = 2f(p) + f(p^{\alpha-2}) = \dots = \alpha f(p) + f(1))$.

Но тогда пусть $x = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$, тогда

$f(x) = \alpha_1\left[\frac{p_1}{4}\right] + \dots + \alpha_n\left[\frac{p_n}{4}\right]$, а $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) \cdot f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$,

т.е. от нас просят такие $(x; y)$, что $f(x) < f(y)$:

Посчитаем $f(x)$ для всех $x \in \mathbb{N}$, $x \in [2; 25]$:

x	$f(x)$	x	$f(x)$
2	0	20	1
3	0	21	1
4	0	22	2
5	1	23	5
6	0	24	0
7	1	25	2
8	0		
9	0		
10	1		
11	2		
12	0		
13	3		
14	1		
15	1		
16	0		
17	4		
18	0		
19	4		

Итого
«0» — 10
«1» — 7
«2» — 3
«3» — 1
«4» — 2
«5» — 1

Значит, если неравенство строгое, то вариантов: $7 \cdot 10 + 3 \cdot 17 + 1 \cdot 20 + 2 \cdot 21 + 1 \cdot 23$ (1ое вариантов на y, 2ое на x) & т.к. пара $(x; y)$ и $(y; x)$ не одно и то же то посчитаны все варианты по 1 разу.

Ответ: 206

№3

$$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$t = 10x - x^2 > 0$ из $\log_3(10x-x^2)$ — имеет смысл

$|x^2-10x| = 10x-x^2$

$$\Updownarrow$$

$$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$$

$$3^{\log_3 t} + 3^{\log_3 t \log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$$

$$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geqslant 5^{\log_3 t} \qquad 5^{\log_3 t} > 0$$

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^{\log_3 t} + \left(\tfrac{4}{5}\right)^{\log_3 t} \geqslant 1$$

пусть $\log_3 t = \alpha$

$$\left(\tfrac{3}{5}\right)^{\alpha} + \left(\tfrac{4}{5}\right)^{\alpha} \geqslant 1$$

пусть $\frac{3}{5} = \sin\varphi > 0$; $\frac{4}{5} = \cos\varphi > 0$ (<1)

$$(\sin\varphi)^{\alpha} + (\cos\varphi)^{\alpha} \geqslant 1$$

$$\Updownarrow$$

заметим, что это значит, что $\alpha \leq 2$, т.к. при $\alpha > 2$

$(\sin\varphi)^{\alpha} < (\sin\varphi)^2$, $(\cos\varphi)^{\alpha} < (\cos\varphi)^2$ | $\sin\varphi, \cos\varphi \neq 1, 0$ $\Rightarrow (\sin\varphi)^{\alpha} + (\cos\varphi)^{\alpha} < 1$

а при $\alpha \leq 2$

$(\sin\varphi)^{\alpha} > (\sin\varphi)^2$

$(\cos\varphi)^{\alpha} > (\cos\varphi)^2$

$\alpha \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_3 t \leq 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow t \leq 9 \Rightarrow$

$\Rightarrow 0 < t \leq 9$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

① $10x - x^2 > 0$

$x(10-x) > 0$

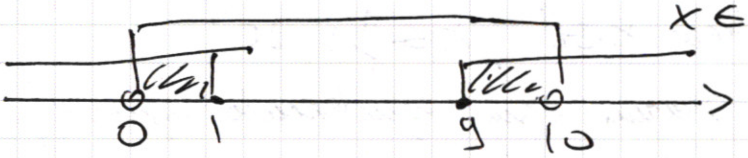
$x \in (0;10)$

② $10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$(x-9)(x-1) \geq 0$

$x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$



$x \in (0;1] \cup [9;10)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [9;10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$+\sin 2\alpha$ $\quad$ $+\sin 2\alpha$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow$$

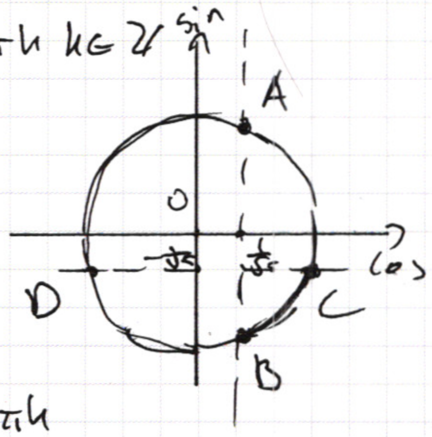
$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \\ 2\cos 2\beta \cdot -\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{2}{5} \end{cases} \Rightarrow$$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cancel{\sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}}$.

$\cancel{\sin 2\alpha \ldots} \Rightarrow 2\beta = \pm\arccos\frac{1}{\sqrt5} + 2\pi k,\ k\in\mathbb{Z}$



Тогда 2α – угол на который нужно повернуть A или B, чтобы получить C или D. $\angle AOC = \angle BOD = 90°$ из симметрии относительно $y=-x$

т.е. первое $2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k \Rightarrow \alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

~~Чтобы~~ $\angle BOC = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$, а

$\angle AOD = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)$, из этого

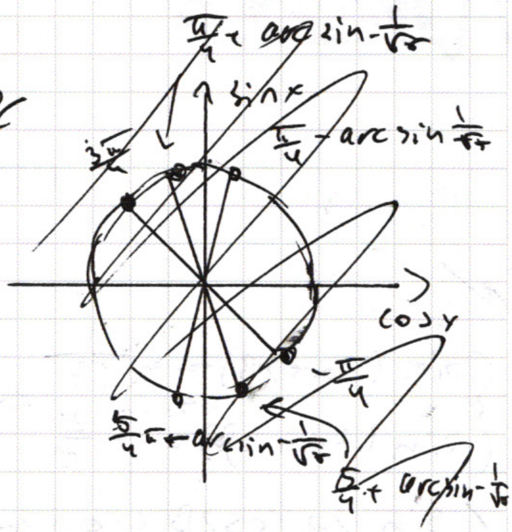
$$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = \frac{\pi}{2} - 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \\ 2\alpha = \frac{\pi}{2} + 2\arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + 2\pi k \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) + \pi k,\ k\in\mathbb{Z} \end{array}\right.$$

Итого мы получаем:

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi k$

$\alpha = \frac{\pi}{4} + \arcsin\left(\cancel{\ } -\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$ $\quad k \in \mathbb{Z}$

$\alpha = \frac{\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) + \pi k$



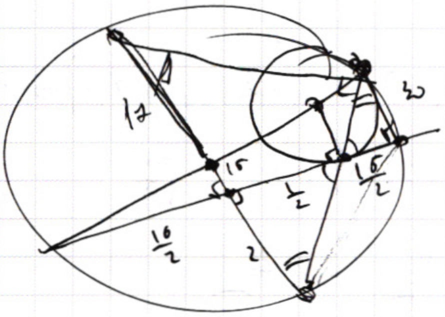
Ответ:

$tg(\alpha) = -1$

$tg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{4} + \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

$tg(\alpha) = tg\left(\frac{\pi}{4} - \arcsin\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



34 30 16

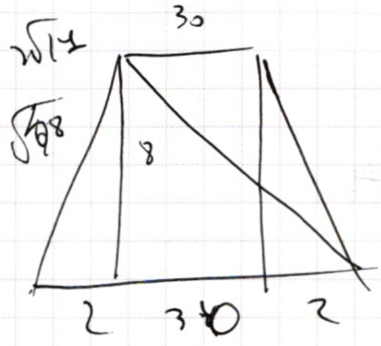
17 15 8

289 225 64

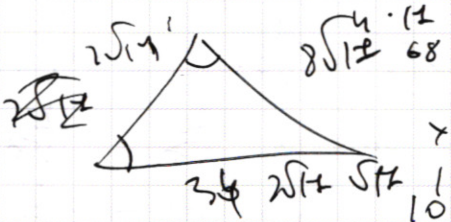
$\frac{17}{32} = \frac{x}{30}$

$\frac{30 \cdot 17}{32} = x$

$\boxed{\frac{15 \cdot 17}{16}} = x$



4 + 64 4 (17)



$8\sqrt{17}$ 4·17 68

34 × 34 = 136, 102, 1156 − 68

1100 − 12

$\boxed{1088}$

1088 | 4
272 | 2
136 | 2
68 | 2
34 | 2
17

$8\sqrt{17}$

$\frac{2\sqrt{17} \cdot 8\sqrt{17}}{2}$ = 8·17 = $\boxed{136}$

arccos arctg $\frac{8\sqrt{17}}{2\sqrt{17}} = \boxed{4}$

$\boxed{\alpha = \operatorname{arctg} 4}$

34 × 34 = 136, 102, 1156 − 68

$f(x)$ 12 $f(ab) = f(a) + f(b)$

1088 $f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$f\left(\frac{1}{y}\right) = f(1) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1) = 0$

$f(2^{\alpha_1}$

$\alpha = p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_n^{\alpha_n}$

$f(\alpha) = \alpha_1 p_1 + \ldots + \alpha_n p_n$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

~~$2\sin\alpha\cos\alpha$~~

$\sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta = \cancel{\frac{2}{5}} + 4\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\,(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\cos^2(2\beta)\sin(2\alpha) + 2\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\cos(2\beta) = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\cos 2\beta\left(\underset{-\frac{1}{\sqrt5}}{\cancel{\frac{2}{5}}}\right) = \cancel{\frac{4}{5\sqrt5}} - \frac{2}{5}$

$2\cos 2\beta = \frac{2\sqrt5}{5} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \qquad \sin 2\beta = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{array}{l}\sin 2\alpha\,\frac{1}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\,\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\alpha\,\frac{1}{\sqrt5} - \cos 2\alpha\,\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} \qquad \frac{\sin 2\alpha}{2\cos^2\alpha} \qquad \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \operatorname{tg}(\alpha+\beta)$

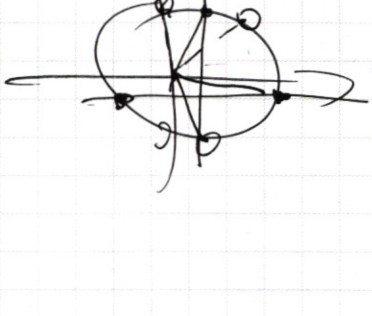
$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$

$\operatorname{tg}\alpha$

$\sin(2\alpha + \varphi) = -\frac{1}{\sqrt5} \qquad \arccos\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + \varphi) = \frac{1}{\sqrt5}$

$$\left[\begin{array}{l}2\alpha = \arcsin -\frac{1}{\sqrt5} \pm \varphi + 2\pi n\\ 2\alpha = \pi - \arcsin -\frac{1}{\sqrt5} \pm \varphi + 2\pi n\end{array}\right.$$



черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12x-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$x^2-12x+36+36y^2-36y+9=0$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=0$

$x=6 \quad y=\frac{1}{2}$

$\cancel{6-6}\ 6-6=\sqrt{6-6-6+6}=0$

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ $\qquad$ $10x-x^2>0$

$x^2-10x=t$

$|t|^{\log_3 4} \geq t+5^{\log_3 t}$

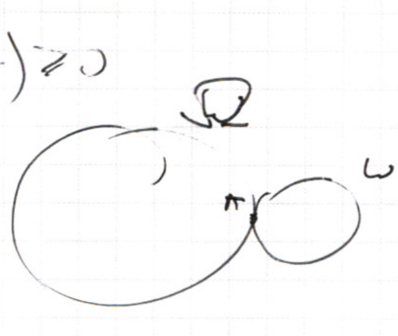
$(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$

$t=(10x-x^2)$ $\qquad$ $t>0$

$t+t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $\qquad$ $t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$\cancel{t(1+t^{\log_3 4-1})} \geq 5^{\log_3 t}$ $\qquad$ $t>5$

$t+t^{\log_3 4}-5^{(\log_3 t)} \geq 0$

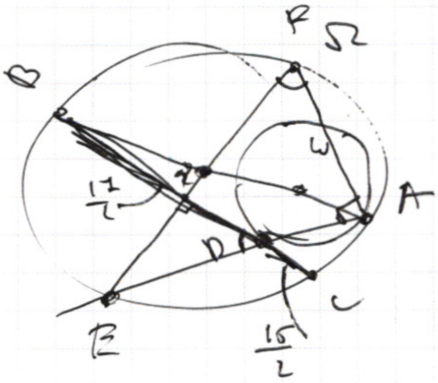


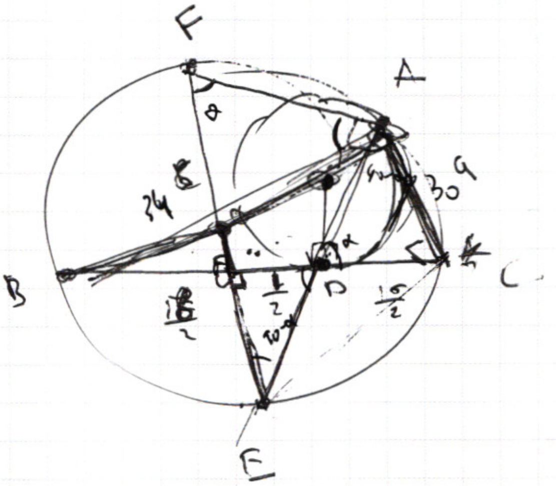
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)





$\frac{a}{c} = \frac{\frac{15}{2}}{\frac{17}{2}} = \frac{15}{17}$ $\quad a = \frac{15}{17}c$

$a^2 + (16)^2 = c^2$

$\left(\frac{15^2}{17^2}\right)c^2 + (16)^2 = c^2$

$16^2 = \frac{17^2 - 15^2}{17^2} c^2$

$16^2 = \frac{8^2}{17^2} c^2$

$2 \cdot 16 = \frac{8}{17} c$ $\quad 32 \cdot 6$

$34 = 17c$

$\times\begin{array}{r}17\\17\end{array}$ 119 17 289 225 64

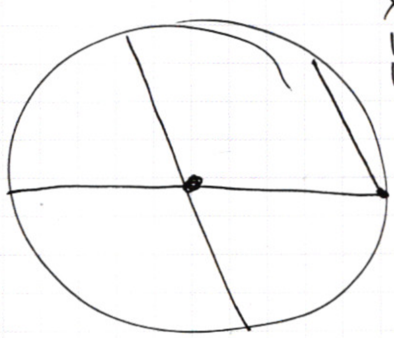
$\frac{\frac{17}{2} \cdot 30}{32\ 16} = \frac{x}{30}$

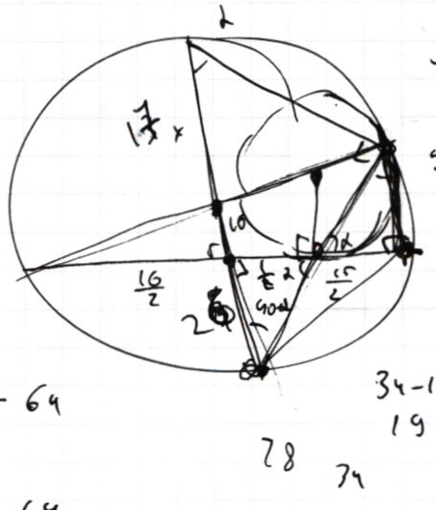
$\boxed{\frac{17 \cdot 15}{16} = x}$

$\times\begin{array}{r}13\\17\end{array}$ 91 13 221

$\times\begin{array}{r}15\\19\end{array}$ 135 15 285 − 64 221

13





$(x+10)(19-x) = 64$

$19x - 15x - x^2$

$+ 19 \cdot 15 - 64 = 0$

$-x^2 + 4x + 221 = 0$

30 − 2

16 + 884

$x^2 - 4x - 221 = 0$

$17 \cdot (-13)$

$(x+17)(x-13)$

13

$\times\begin{array}{r}19\\19\end{array}$ 171 19 361 446 801 | 3 267

$\times\begin{array}{r}13\\13\end{array}$ 39 13

$(x+15)y = \frac{128}{2}$ 64

$x + y = 19$

$(x+15)(34-x) = 64$

$34x - x^2 + 15 \cdot 34 - 15x = 64$

$-x^2 + 19x + 15 \cdot 34 - 64$

$-x^2 + 19x + 446$

34 − 15 19

28 34

$\times\begin{array}{r}15\\34\end{array}$ 60 45 510 − 64 446 | 2 223

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$p-6q=\sqrt{pq}$

$p^2+9q^2=90 \quad p=3\sqrt{10-q^2}$

$p=3\sqrt{10-q^2}$

$3\sqrt{10-q^2}-6q=\sqrt{3q\sqrt{10-q^2}}$

$9(10-q^2)+36q^2-36q\sqrt{10-q^2}=3q\sqrt{10-q^2}$

$3(10-q^2)+12q^2-13q\sqrt{10-q^2}=0$

$30-3q^2+12q^2=13q\sqrt{10-q^2}$

$30+9q^2=13q\sqrt{10-q^2}$

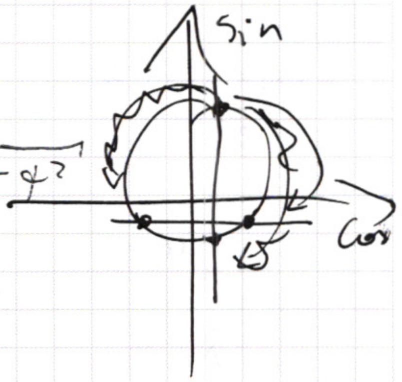
$900+81q^4+540q^2=169q^2(10-q^2)$

$900+81q^4+540q^2=1690q^2-169q^4$

$250q^4-1150q^2+900=0$

$25q^4-115q^2+90=0$

$5q^4-23q^2+18=0$



$\frac{36}{10} \quad 1$

$\frac{23\pm13}{10}$

$23 \times 23 = 69,\ 46,\ 529$

$529-360$
169

$20 \times 18 = 360$

$x^2+144y+24xy=$

$p^2+36q^2-12pq=pq$

$p^2+36q^2-11pq=0$

$p^2+3q^2+\dots=0$

$121-144$

p^2

$4\cdot36$
144

$p=$

$121q^2-144q^2$
$-23q^2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$\sqrt{4\sqrt{3,6}^2 \cdot \sqrt{3,6}}$

$2\sqrt{3,6}$ $\quad 2\sqrt{3,6}$.

$(p-6q)^2 = pq$

$p^2 + 36q^2 - 12pq = pq$

$p^2 + 36q^2 - 13pq$

$p^2 - 13pq + 36 = 0$

$169q^2 - 144q^2$

$\frac{13q \pm 5q}{2}$

$\boxed{\begin{matrix} p = 9q \\ p = 4q \end{matrix}}$

$-4\sqrt{3,6} + 6\sqrt{3,6}$

$2\sqrt{3,6} =$

$-14,4 + 21,6$

$\boxed{7,2}$

$\begin{array}{r} \times\ 14,4 \\ 3,6 \\ \hline 864 \\ 432\ \ \\ \hline 51,84 \\ 27 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} \times\ 7,2 \\ 7,2 \\ \hline 144 \\ 504\ \ \\ \hline 51,84 \end{array}$

$\sqrt{\frac{30}{25}}$

$\frac{360}{100}$

$(14,4)^2 + 9(3,6)^2$

$-14,4$

$\frac{90}{25}$ $\quad$ $\frac{3}{5}\sqrt{10}$

$0,6\sqrt{10}$

$\begin{array}{r} \times\ 144 \\ 144 \\ \hline 576 \\ 576\ \ \\ 144\ \ \ \ \\ \hline 20736 \\ 116,64 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} \times\ 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108\ \ \\ \hline 1296 \\ \times\ 9 \\ \hline 116,64 \end{array}$

$25q^2 = 90$

$q^2 = \frac{18}{5} = \frac{36}{10} = 3\sqrt{3,6}$

$\sqrt{14,4} - 6\sqrt{3,6}$

36

$\sqrt{14,4}$ $\quad$ $\sqrt{3,6}$

$3 \cdot 9$

27

54

324

$4\sqrt{3,6} - 9\sqrt{3,6}$

$14,4 + 9 \cdot 3,6$

$\begin{array}{r} \times\ 3,6 \\ 9 \\ \hline 32,4 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\ 3,6 \\ 25 \end{array}$

$\begin{array}{r} \times\ 3,6 \\ 25 \end{array}$

$14,4 + 9 \cdot 3,6$

$\frac{360}{4} \cdot 80.$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t \geq 1$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$t = \left(3^{\log_3 t}\right)^{\log_3 4}$ $= y > 0$

$3^{\log_3 t}$ $3^{\log_3 t \cdot \log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$

$3^y + 3^{y \log_3 4} \geq 5^y$

$3^{y \log_3 4} \geq 5^y$

$t^{\log_3 4} = 4^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$

$3^{\alpha} + 4^{\alpha} \geq 5^{\alpha}$ при $\alpha \in (-\infty; \log_3 x]$

$\left(\frac{3}{5}\right)^{\alpha} + \left(\frac{4}{5}\right)^{\alpha} \geq 1$

$\sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi \geq 1$

$4 + \frac{4}{4x-5} \leq ax + b \leq -32x^2 + 36x - 3$

$\cancel{ax + b - 4 - \frac{4}{4x-5}}$

$$\frac{(ax+b)(4x-5) - 16x + 16}{4x-5} = \frac{4ax^2 - 5ax + 4bx - 5b - 16x + 16}{4x-5} =$$

$$= \frac{4ax^2 + (4b - 5a - 16)x - 5b + 16}{4x-5}$$

$16b^2 + 25a^2 + 256 - 40ab - 128b + 160a - 4a(16-5b)$
$- 64a + 20ab$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$10x - x^2 = t$

$t + t^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} + 3^{\log_3 t \cdot \log_3 4} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geqslant 5^{\log_3 t}$

$\left(\frac{3}{5}\right)^q + \left(\frac{4}{5}\right)^q \geqslant 1$

$(\sin\varphi)^q + (\cos\varphi)^q \geqslant 1$

$q \leq 2$

$q \leq 2$

$\log_3 t \leq 2$

$t \leq 9$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$x \in (0; 10)$

$x^2 - 10x + 9 \geqslant 0$

$x = 9 \quad x = 1$

0 1 9 10

$p^2 + 36q^2 - 11pq = 0$

$90 - 9q^2 + 36q^2 - 11pq = 0$

$90 + 27q^2 - 11pq = 0$

$p = 3\sqrt{10 - q^2}$

$90 - 9q^2$

$30 - \cancel{3q^2} - 11q\sqrt{10 - q^2} = 0$

~~$8100 + 723q^2$~~

$30 - q^2 - 11q\sqrt{10 - q^2} = 0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(\alpha) = \cancel{p_1^{\alpha_1} \cdot \ldots} \alpha_n p_n$

$= \alpha_1 \left[\frac{p_1}{4}\right] + \ldots + \alpha_n \left[\frac{p_n}{4}\right]$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = \cancel{f(x) - f(y)}$ $\qquad f(x) = f\left(\frac{x}{y}\right) - f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = -f\left(\frac{y}{x}\right)$ $\qquad f(y) = f(x)$

$f(1) = f(y) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y)$

2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12

$x \vdots 5 \quad x \vdots 7 \quad x \vdots 11 \quad x \vdots 13 \quad x \vdots 17 \quad x \vdots 19 \quad x \vdots 23$

$y \nmid 5, \ y \nmid 7 \quad y \nmid 11 \quad y \nmid 13 \quad y \nmid 17 \quad \ldots$

x	$f(x)$
2	0
3	0
4	0
5	1
6	0

20 + 51 + 70 + 42 + 23

121 141 183 206

0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0 3 1 1 0 4 0 4 1 1 2 5 0 6

2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25

5 7 2 5 11 2 2 3 13 2 7 3 5 2 2 2 2 17 2 3 3 19 2 2 5 3 7 2 11 23 2 2 2 3 5 5

10 − 0

7 − 1

7 − 2

1 − 3

2 − 4

1 − 5

1 − 6

$\cancel{7 \cdot 10 + 7 \cdot 7 + 1 \cdot}$

$7 \cdot 10 + 2 \cdot 17 + 1 \cdot 19 + 2 \cdot 20 + 1 \cdot 22 + 1 \cdot 23$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

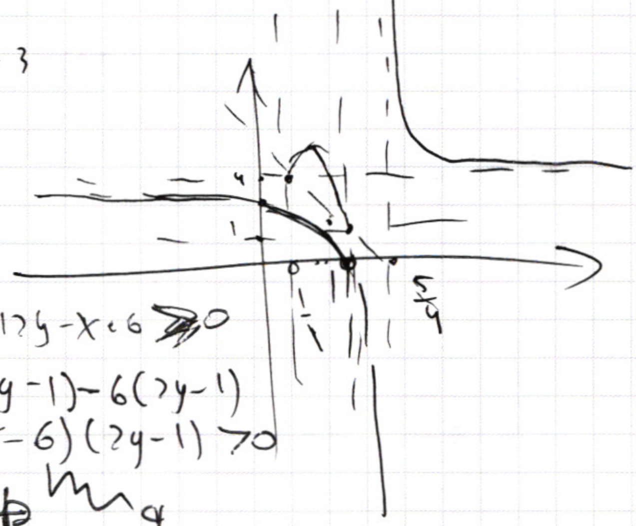
(Нумеровать только чистовики)

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \quad x\in\left[\frac{1}{4};1\right]$

$-2\cdot\frac{1}{16}+9-3$

$-32+36-3$



$36^2-4\cdot2\cdot32$

$(2\cdot3)^4 \quad 2^2\cdot3 \quad 2^5$

$2^4\cdot3^4-2^7\cdot3$

$\cancel{2^4(3^4-2^3)}$

$2^4\cdot3\left(3^3-2^3\right)$

$27-8$

19

$2xy-12y-x+6 \ge 0$

$x(2y-1)-6(2y-1)$

$(x-6)(2y-1)\ge0$

$4\sqrt{3\cdot19}$

$\frac{-36\pm\sqrt{3\cdot19}}{-64}$

$\frac{-36}{-64}=\boxed{\frac{9}{16}}$ $p-64>0$

$x^2-12x+36$ $=90$

$36y^2-36y+9$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

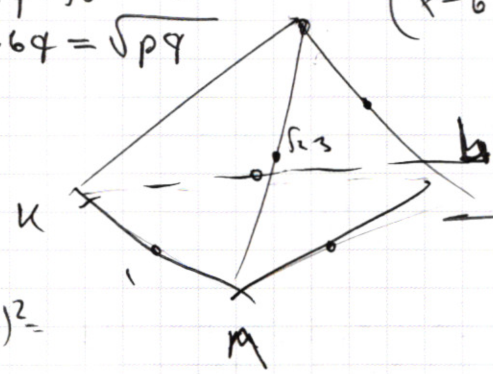
$10x-x^2$

5

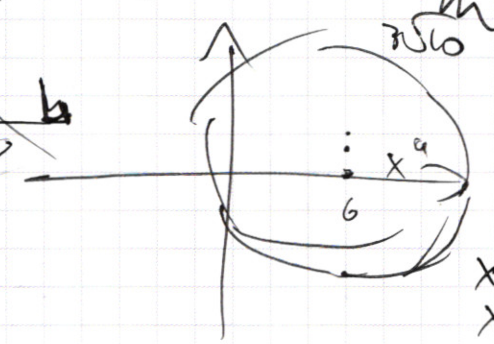
$50-25=25$

$p^2+q^2=90$

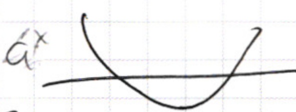
$p-64=\sqrt{pq}$



$(p+q)^2=$



$(a^x)'=\ln x$



$x3$

$x6$

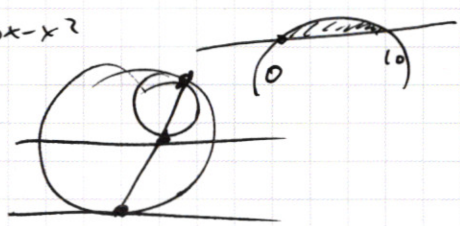
11

289

225

64

$10x-x^2+(10x-x^2)^{\log_3 4} \ge 5^{\log_3 10x-x^2}$



$t+t^{\log_3 4}\ge 5^{\log_3 t}$

$\cancel{t+\log_3 4\, t^{(\log_3 4-1)}-5^{\log_3 t}} \ge 0$

$t \ge 5^{\log_3 t}=\left(3\cdot\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}=t\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}$

$t^{\log_3 4}\ge 5^{\log_3 t}$

$\cancel{t^{\log_3 4}}$

$t^{\log_3 4}\ge\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}t$

$\left(\frac{5}{3}\right)^{\log_3 t}\le\left(\frac{5}{3}\right)^0$

$\cancel{\left(\frac{t}{5}\right)^{\log_3 4}}$

$\left(\frac{t}{5}\right)^{\log_3 4}\ge$

$0\ge\log_3 t$

$1\ge\frac{5^{\log_3 t}}{t^{\log_3 4}}$

$\boxed{t\le1}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)