МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2) \end{cases} \quad (A)$$

1.1) Решим ур-ие (1):

$$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1)\geq 0 \\ x^2-4xy+4y^2=xy-x-2y+2 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2)(y-1)\geq 0 \\ x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0 \; (1.1) \end{cases} \quad (Б)$$

1.2) Решим ур-ие (1.1) относительно x:

$$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9(y^2-2y+1)=9(y-1)^2$$

$$x=\frac{5y-1\pm 3|y-1|}{2} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{5y-1-3y+3}{2}=\frac{2y+2}{2}=y+1 \\ x=\frac{5y-1+3y-3}{2}=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \end{array}\right.$$

Тогда (1.1) раскладывается в:

$$(x-y-1)(x-4y+2)=0$$

1.3) Решим систему Б графически:

№2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \quad (1) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \quad (2) \end{cases}$$

$1+tg^2\alpha=\frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\quad ctg\alpha=\frac{3}{5} \Rightarrow \sin\alpha$

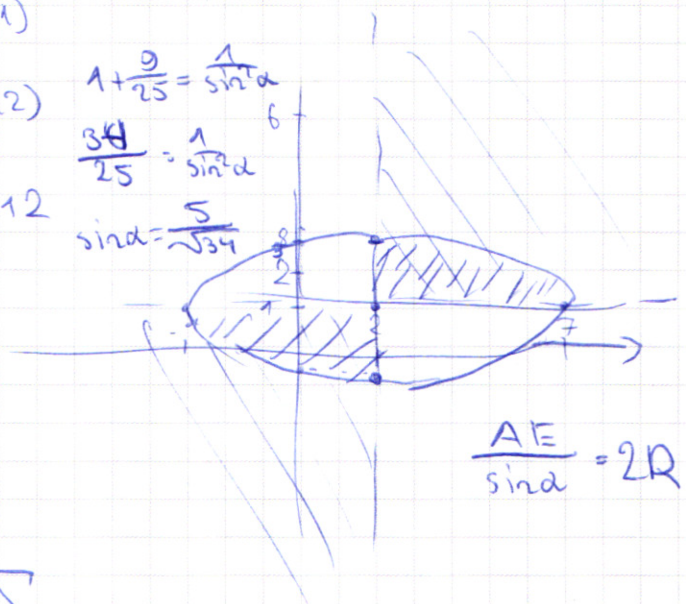
$1+\frac{25}{9}=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\frac{9}{25}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\frac{34}{25}=\frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha=\frac{5}{\sqrt{34}}$

(2): $(x-2)^2+9(y-1)^2-4-9=12$



$(x-2)^2+9(y-1)^2=25^2$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25^2$

$\frac{AE}{\sin\alpha}=2R$

(1): $x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$(x-2)(y-1)\geq 0$

$\frac{x}{y}=k$

$x=ky<0$

$x^2-4xy+4y^2=(x-2)(y-1)$

$$\left[\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases}\right.$$

k.

$x=2$

$ky=0$

$x^2-4xy+4y^2=xy-2y-x+2$

$x^2-5xy+2y+x+4y^2-2=0$

$(x-4y+2)(x-y-1)=0$

~~$(x-2y)^2=x^2-4xy+4y^2=0$~~

$(x-4y-2)(x-y+1)$

$(x-4y+2)(x-y-1)=0$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(\frac{a}{b})=f(a)+f(\frac{1}{b})$

$f(\frac{1}{b})=f(a)=f(\frac{a}{b})$

$x=\frac{5y-1\pm(3y-3)}{2}$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{8y-4}{2}=4y-2 \\ \frac{2y+2}{2}=y+1 \end{array}\right.$$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$=9y^2-18y+9=9(y-1)^2$

$a:b>0$

10; 11; 13

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

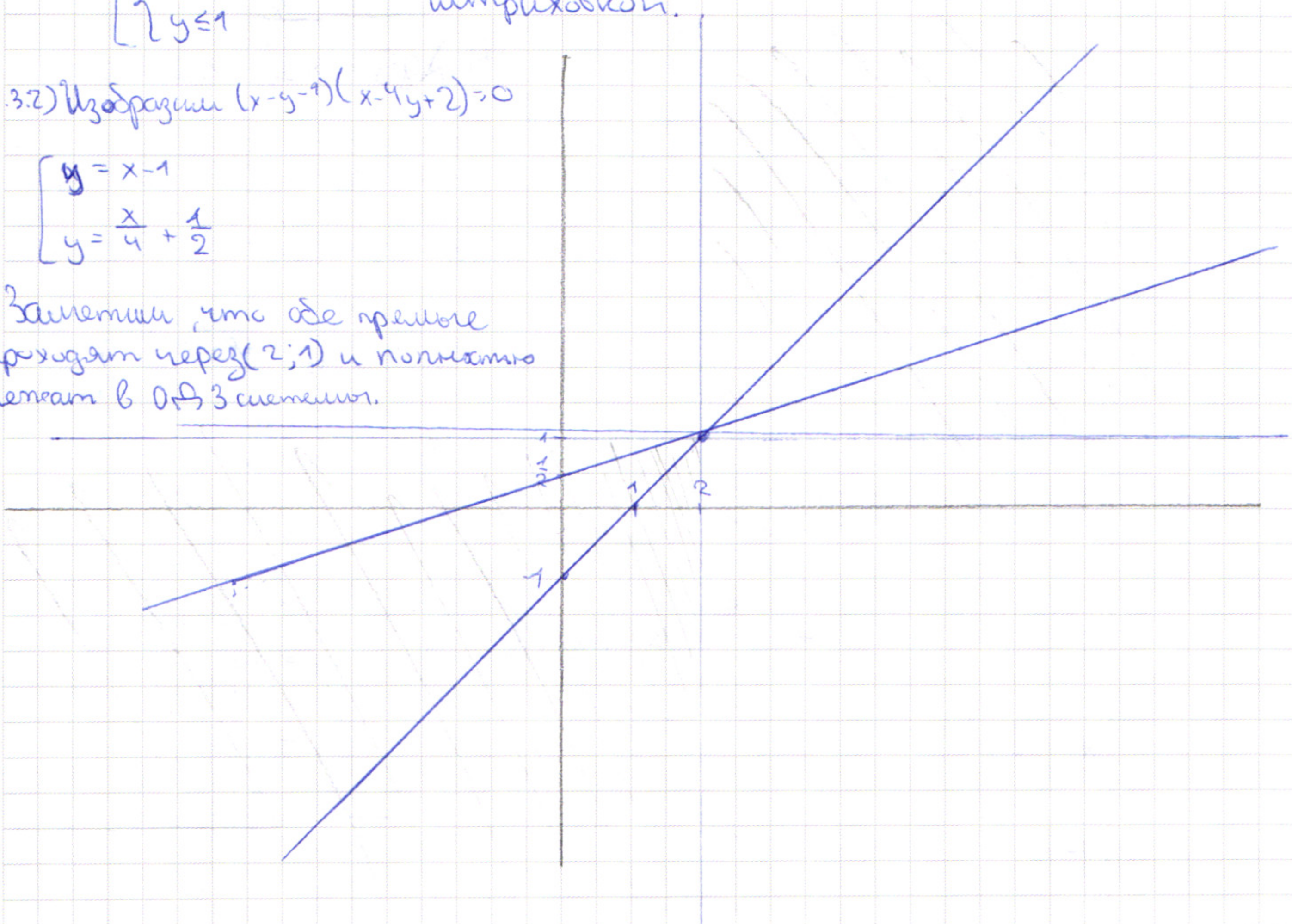
1.3.1) $(x-2)(y-1)\geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases} \end{array}\right.$ - изобразим области и отметим их штриховкой.

1.3.2) Изобразим $(x-y-1)(x-4y+2)=0$

$\left[\begin{array}{l} y=x-1 \\ y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2} \end{array}\right.$

Заметим, что обе прямые проходят через $(2;1)$ и полностью лежат в ОДЗ системы.



2.1) Решим ур-не (2):

$$x^2+9y^2-4x-18y=12 \Leftrightarrow (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \Leftrightarrow (x-2)^2+3^2(y-1)^2=25$$

Ур-не задает эллипс, ~~как~~ с центром в $(2;1)$ ~~сжатый~~ и 5 - больш. полуось полученный стягиванием ~~в~~ окружности $(x-2)^2+(y-1)^2=25$ к прямой $y=1$ вдоль Oy.

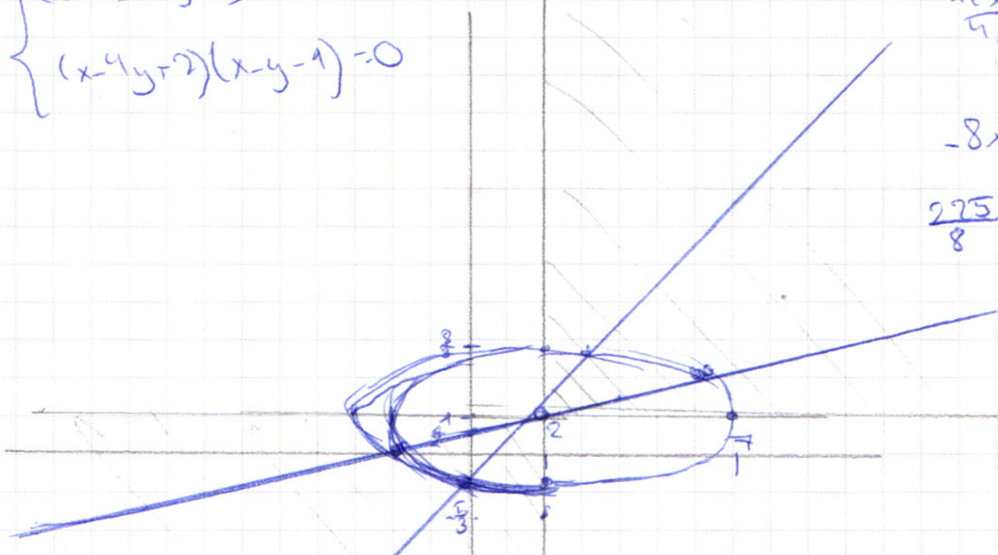
☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases}(x-2)(y-1)\geq 0\\ (x-4y+2)(x-y-1)=0\end{cases}$$

$$\frac{12x+11}{4x+3}=\frac{12x+9+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+2}$$

$$-8x^2-30x-17=-8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+$$

$$\frac{225}{8}-17=\frac{225}{}-8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+\frac{89}{8}$$



$$4\sqrt{25-(x-2)^2}+12=3x+6$$

$$4\sqrt{25-(x-2)^2}=3x-6\ \Big|^2$$

$$16\cdot 25-16(x-2)^2=9(x-2)^2$$

$$16\cdot 25=25\cdot(x-2)^2$$

$$(x-2)^2=16$$

$$x=6$$

$$x=-2$$

1.1) $x\geq 2$

$4y=x+2$

$y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

Проходит через $(2;1)$

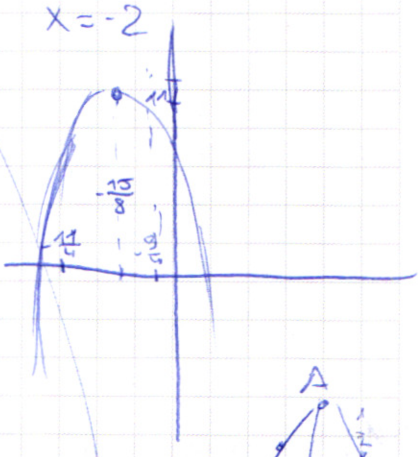
$y=x-1$

тоже проходит через $(2;1)$

$$\cancel{(x-2)^2+9(y-1)^2-25}=x-4y+2$$

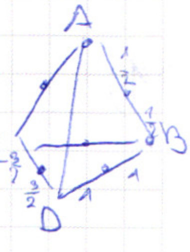
$$\cancel{x^2+5x}$$

$$(x-2)^2+9(y-1)^2=25$$



$$9(y-1)^2=\sqrt{25-(x-2)^2}$$

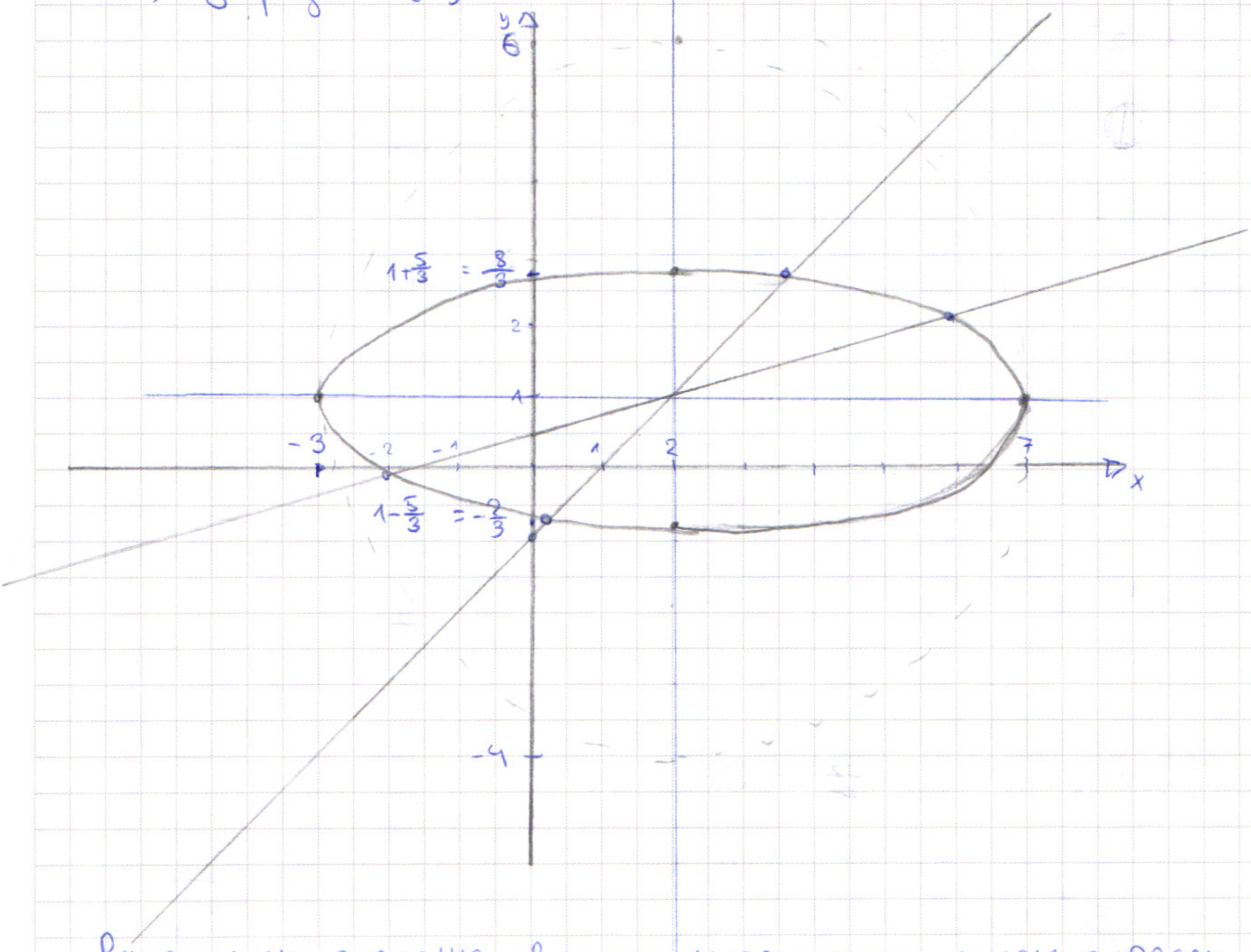
$$3|y-1|=\sqrt{25-(x-2)^2}$$



$$y=\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\ \Big|\cdot 12$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2.2) Изобразим (A):



Решения ии системы являются координаты точек пересеч. эллипса и прямых.

3) Выразим y из ур-ия эллипса:

$(x-2)^2+9(y-1)^2=25^2$

$9(y-1)^2=25-(x-2)^2$

$3|y-1|=\sqrt{25-(x-2)^2}$

~~3.1) y>1:~~ $y=\pm\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1$

3.1) Найдем т. пересеч. с $y=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}$

$\pm\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1=\frac{x}{4}+\frac{1}{2}\Big|\cdot 12$

$\pm 4\sqrt{25-(x-2)^2}+12=3x+6$

$\pm 4\sqrt{25-(x-2)^2}=3x-6\Big|^2$

$16\cdot 25-16(x-2)^2=9(x-2)^2$

$(x-2)^2=16 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $y=$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$\exists\; x^2+18x=t$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

≥ 0

$$t^{\log_{12}5}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$$

$\begin{cases} t\geq 0 \\ \end{cases}$

$$-t^{\log_{12}13}+t^{\log_{12}5}+t\geq 0$$

$$t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-1\right)\geq 0$$

$\exists\; \log_{12}(x^2+18x)=z \geq 0$

$$5^z+12^z \geq (12^z)^{\log_{12}13}$$

$$5^z+12^z \geq 13^z \;\Big|\; :5^z \qquad 1+\frac{12}{5}^z \geq \left(\frac{13}{5}\right)^z$$

При $z=2$ - $5^2+12^2=13^2$, при $z=3$:

$$125+1728<2197$$

$a_1>a_2$:

$$13^{a_1}-5^{a_1}-12^{a_1}-(13^{a_2}-5^{a_2}-12^{a_2})=13^{a_1}-13^{a_2}+5^{a_2}-5^{a_1}+12^{a_2-a_1}$$

$x^2+18x=(x+9)^2-81$

$a^{\log_b c}=$

$b^{\log_a c}=c^{\log_a b}$

$$\frac{5^z+12^z}{2}\geq 2\sqrt{5^z 12^z}=\sqrt{60^z}\geq 1$$

$2\cdot 7^z$

$144 \cdot 12 = 288 + 1440 = 1728$

$169 \cdot 13 = 507 + 1690 = 2197$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l} x=6 \\ x=-2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=6 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-2 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$$

3.2) Найдем т. пересеч. с $y=x-1$

$$\pm\frac{\sqrt{25-(x-2)^2}}{3}+1=x-1 \,\Big|\cdot 3$$

$$\pm\sqrt{25-(x-2)^2}=3(x-2) \,\Big|^2$$

$$25-(x-2)^2=9(x-2)^2$$

$$(x-2)^2=\frac{5}{2}$$

$$x-2=\pm\frac{\sqrt{10}}{2}$$

$$\left[\begin{array}{l} x=+\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \\ x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \\ y=\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{cases} \\ \begin{cases} x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \\ y=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Ответ: $(6;2)(-2;0);\left(\frac{\sqrt{10}}{2}+2;\frac{\sqrt{10}}{2}+1\right);\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}+2;-\frac{\sqrt{10}}{2}+1\right)$.

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$, из треб. усл. сущ.

$\log_{12}(x^2+18x) \Rightarrow x^2+18>0 \Rightarrow |x^2+18x|=x^2+18x$

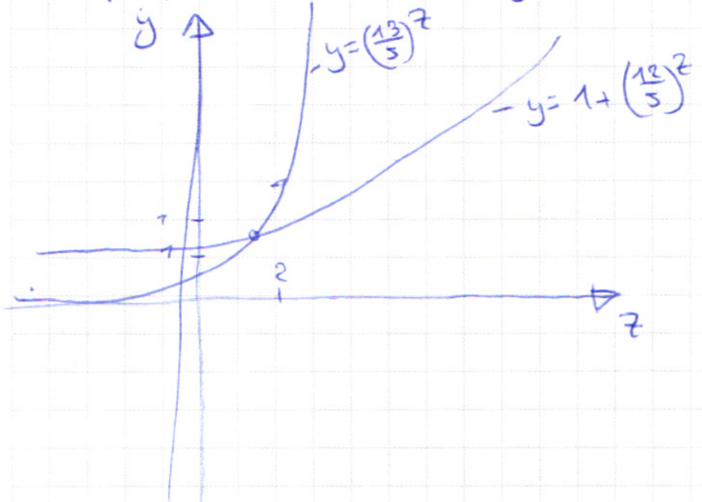
] $\log_{12}(x^2+18x)=z$, тогда ур-ие примет вид:

$$5^z+12^z \geq (12^z)^{\log_{12}13} \Leftrightarrow 5^z+12^z \geq 13^z$$

Разделим нер-во на $5^z > 0$:

$$1 + \left(\frac{12}{5}\right)^z \geq \left(\frac{13}{5}\right)^z$$

Очевидно, что $\left(\frac{13}{5}\right)^z \uparrow$ быстрее чем $\left(\frac{12}{5}\right)^z + 1$ ~~, значит~~ на всем $D(z)$, то есть $z \in \mathbb{R}$, тогда если ур-ие $1+\left(\frac{12}{5}\right)^z = \left(\frac{13}{5}\right)^z$ имеет решение z_1, то $1+\left(\frac{12}{5}\right)^z \geq \left(\frac{13}{5}\right)^z \Leftrightarrow z \in (-\infty; z_1]$, следуя из эскиза графиков в системе $y(z)$:



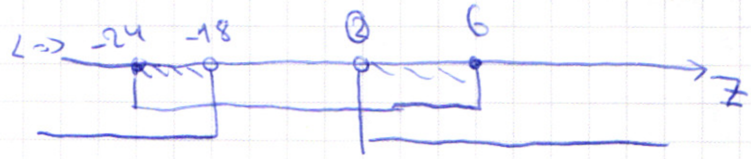
Несложно заметить, что для ур-ие $5^z + 12^z = 13^z$ подбирается корень $z=2$, т.к. тогда образуется т. Пифагора для прямоуг. треуг.
Значит неравенство выполняется при $z \leq 2$;

Обр. замена:

$\log_{12}(x^2+18x) \leq 2$, т.к. $\log_{12} t \uparrow$, то:

$0 < x^2 + 18x \leq 144$

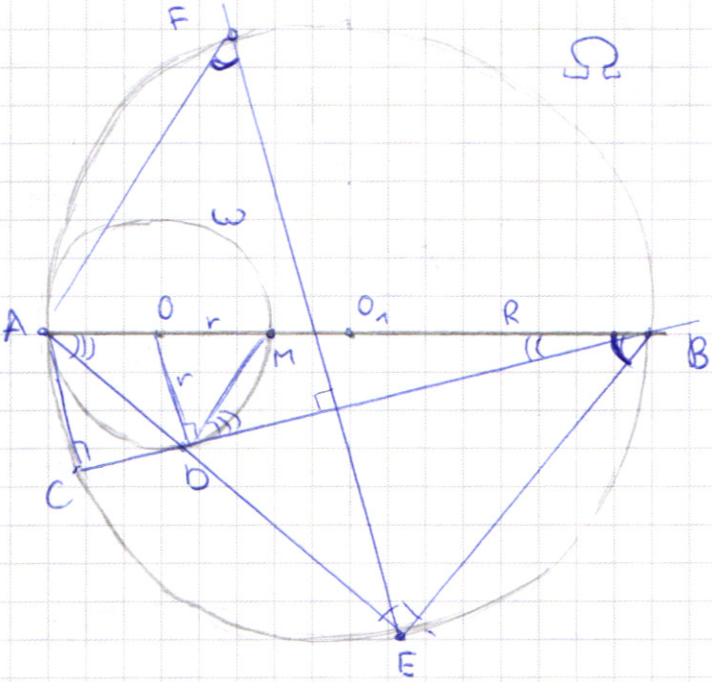
$$\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ (x+24)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$



Ответ: $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



Дано:
$CD=8$
$BD=17$
Найти:
r, R - ?
$\angle AFE$ - ? $S_{\triangle AEF}$ - ?

Решение:

1) 1) По св-ву касат и секущей:

$BM \cdot AB = BD^2$

$17^2=(2R-2r)\cdot 2R$

$17^2=4R^2-4Rr$

$4Rr=4R^2-17^2$

$r=R-\frac{17^2}{4R}$ (1)

2) Заметим, что $\angle ACB=90°$, т.к. опир. на диаметр

Также, $OD \perp DB$ как радиус к касат.

Т.о. $\triangle OBD \sim \triangle ABC$ (по остр. углу $\angle ABC$):

$\frac{OB}{AB}=\frac{DB}{CB}=\frac{17}{17+8}=\frac{17}{25}$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{17}{25} \Leftrightarrow 50R-25r=34R$

$16R=25r$ (2)

3) Составим систему из (1) и (2):

$\begin{cases} r=R-\frac{17^2}{4R} \\ r=\frac{16}{25}R \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} r=\frac{16}{25}R \\ \frac{16}{25}R=R-\frac{17^2}{4R} \end{matrix}$

$r=\frac{136}{15}$ $R=\frac{85}{6}$

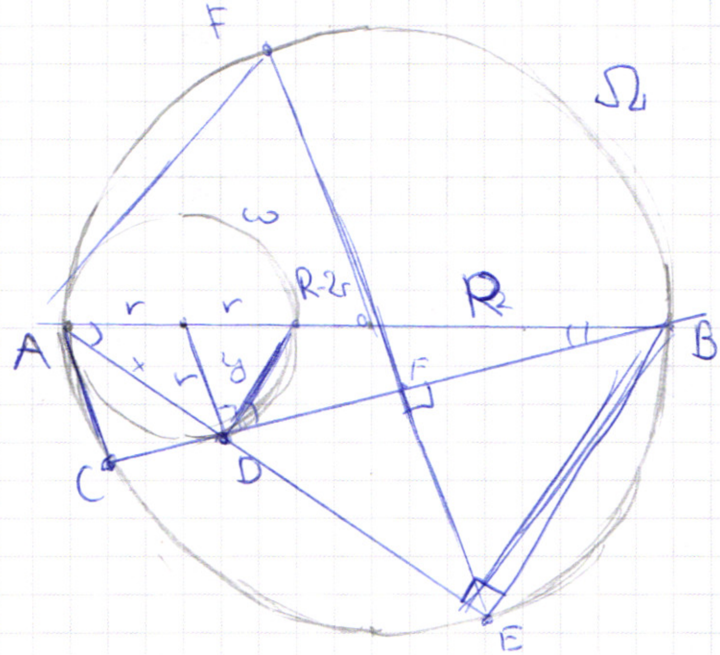
R и r?

$\angle AFE=?$

$S_{\triangle AEF}$

$CD=8$

$BD=17$



$R=\frac{r+\sqrt{r^2+17^2}}{2}$ $\Big|\cdot16$

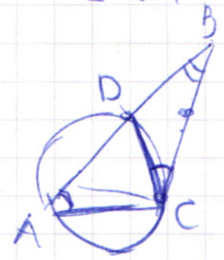
$R=\frac{15}{16}r$

$25r=8r+\sqrt{r^2+17^2}$

$17r=\sqrt{r^2+17^2}$ $\Big|^2$

$188r^2=17^2$

$r=\frac{\cancel{178}\;17}{2\sqrt{47}}$



$$\begin{cases}17^2=2(R-r)\cdot2R\\ r^2+17^2=(2R-r)^2\end{cases}$$

$\frac{x}{y}=\frac{2R}{17}$

$\sin(9\alpha+2B)=\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases}189=4R^2-2Rr\\ r^2+189^2=4R^2-4Rr+r^2\end{cases}$$

$\sin(4\alpha$

$\frac{CB}{AB}=\frac{DB}{BC}$

$CB^2=AB\cdot DB$

$4R^2-2rR-189=0$

$D_1=4r^2+2^2\cdot17^2=$

$\sqrt{D_1}=2\sqrt{r^2+17^2}$

$R=\frac{2r+2\sqrt{r^2+17^2}}{8}=\frac{r+\sqrt{r^2+17^2}}{4}=$

$$\begin{cases}r=\frac{16}{25}R\\ r=R-\frac{17^2}{4R}\end{cases}$$

$\frac{2R-r}{17}=\frac{2R}{25}$

$\frac{16}{25}R-R+\frac{17^2}{4R}=0$

$\frac{9}{25}R-\frac{17^2}{4R}=0$ $\Big|\cdot4$

$\frac{6^2\cdot R^2-5^2\cdot17^2}{100R}=0$ $R^2=\left(\frac{5\cdot17}{6}\right)^2=$ $\Rightarrow R=\frac{85}{6}$

$50R-25r=34R$

$16R=25r \Leftrightarrow$ R $R=\frac{25r}{16}=\frac{r+\sqrt{r^2+17^2}}{4}$ $\Big|\cdot16$

$\cancel{25r}=r$ $21r=4\sqrt{r^2+17^2}\Leftrightarrow$

$441r^2=16r^2+17^2\cdot4^2$

$425r^2=17^2$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} r=\frac{16}{25}R \\ \frac{16}{25}R = R - \frac{17^2}{4R} \quad (1) \end{cases}$$

$$\frac{9}{25}R^{\backslash 4R} - \frac{17^2}{4R}^{\backslash 25} = 0$$

$$\frac{6^2\cdot R^2 - 17^2\cdot 5^2}{100R} = 0 \Leftrightarrow R^2 = \left(\frac{17\cdot 5}{6}\right)^2 \Leftrightarrow R = \frac{85}{6}, \text{ т.к. } r>0.$$

Тогда $\cancel{R} = \cancel{\sqrt{\frac{85}{6}\cdot\frac{16}{25}}} = r = \frac{85}{6}\cdot\frac{16}{25} = \frac{8}{3}\cdot\frac{17}{5} = \frac{136}{15}$

$\boxed{1)\text{ Ответ: } r = \frac{136}{15};\ R = \frac{85}{6}}$

2) ~~Поиск~~ Найдем $\angle AFE$:

1) $\angle AFE = \angle ABE$ (как впис. опир. на хорду AE) $\Rightarrow \alpha$, тогда $\angle BAE = 90^\circ - \alpha$

2) $\triangle ADB \sim \triangle DMB$ (по 2-м углам) $\Rightarrow \frac{AD}{DM} = \cancel{2R}\ \frac{AB}{DB} = \frac{2\cdot R}{17} = \frac{\frac{85}{3}}{17} = \frac{5}{3} = ctg\angle \cancel{AEB}\ EAB$

(из $\triangle ADM$ − прямоуг., опир на диаметр AM)

$ctg(90^\circ-\alpha) = \frac{5}{3}$ $\cancel{\Leftrightarrow tg(90^\circ-\alpha) = \frac{3}{5} = ctg\,\alpha}$ $= tg\,\alpha \Rightarrow \alpha = \angle AFE =$

$= arctg\left(\frac{5}{3}\right)$ $\boxed{2)\text{ Ответ: } \angle AFE = arctg\left(\frac{5}{3}\right)}$

3) Найдем S_{AEF}:

~~1) $AE = 2R\cdot\sin\alpha = \frac{85}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}}$ $\frac{425}{3\sqrt{34}}$~~

~~$AD = x \Rightarrow DE = \frac{425}{3\sqrt{34}} - x$~~

~~$AD\cdot DE = 17\cdot 8 = 136$~~

~~$\frac{425}{3\sqrt{34}}x - x^2 = 136 \Rightarrow x$~~

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$AE = 2R \cdot \sin\alpha =$

$tg\alpha = \frac{5}{3}$ $= \frac{1}{\sin^2\alpha} = 1 -$

$1 + ctg^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$1 + \frac{9}{25} = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\sin\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}}$

$AE = \cancel{2}\frac{85}{3} \cdot \frac{85}{3} \cdot \frac{5}{\sqrt{34}} =$

$-8x^2 - 30x - 17 = -\frac{11}{4} \quad |(-4)$

$32x^2 + 120x + 68 - 11 = 0$

$32x^2 + 120x + 57 = 0$

$D = 3600 - 32 \cdot 57 = 1824 = 1776$

44×44, 121×16: 726, 121, 1936

36×36

57×32: 114, 171, 1824

$\sqrt{1776} = 4\sqrt{111}$

46×46: 276, 184, 6

1 - 1
2 = 4
3 - 9
4 - 6
5 - 5
6 - 6
7 - 9
8 - 4
9 - 1

$1776 : 4 = 444$
16
17
16
16
16
0

$x = \frac{-60 +}{}$

$4 \cdot 4 \cdot 111$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \ (1); \quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \ (2)$$

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta = -\frac{4}{5}$

Подставляя первое ур-ие во второе, получаем:

$$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta = -\frac{4}{5} \ \Big|:2$$

$$\cos2\beta = \frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \pm\frac{1}{\sqrt5} \ . \ \cos(2\alpha+2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \cancel{\pm\frac{2}{\sqrt5}}$$

2) Тогда :

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta)$$

$$= -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \left(\pm\frac{1}{\sqrt5}\right)\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) = a$$

~~Тогда $\sin2\alpha = -\frac{4}{5}-0 = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos2\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt5}$~~

а может быть равно:

$$a = -\frac{2}{5} + \left(\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right) = 0$$

$$a = -\frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) = 0$$

$$a = -\frac{2}{5} + \left(-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{4}{5}$$

Тогда (2):

$$\left[\begin{array}{l} -\frac{4}{5}+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \\ 0+\sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin2\alpha = 0 \ - \ \alpha = \frac{\pi n}{2}, n\in\mathbb{Z} \ ; \ \operatorname{tg}2\alpha = \\ \sin2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{\sqrt5}{5}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

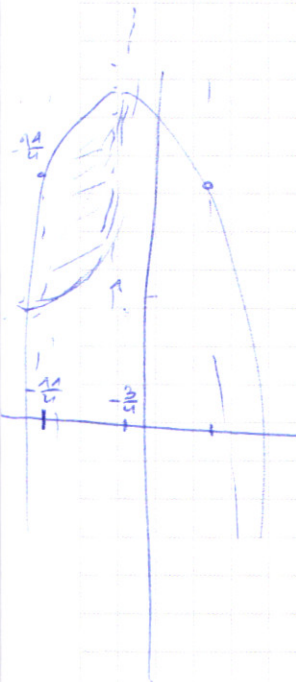
$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$3 + \frac{2}{4x+3} = 3 + \frac{1}{2\left(x+\frac{3}{4}\right)}$

$\cos 2\beta = \frac{-\frac{4}{5}}{-\frac{2}{\sqrt5}} = \frac{2}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

-1

$\sin\left((2\alpha+2\beta)+2\beta\right) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta +$



$-\frac{225}{8}$ $\quad 17\cdot 8 = 136$

$f(p) = [p/4]$

1, 2, 3 => 0 $\qquad f(6) = f(2)+f(3) = 0 \qquad 225 - 136 = 89$

~~4~~ 5 => 1 $\qquad f(12) = 0$

~~6~~ 7 => 1 $\qquad -8x^2-$

11 => 2 $\qquad f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

1 $\qquad x=10$, $y=5$

$f(0) = 0$

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
a	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

18 19 20 21

$f(\alpha_1) < f(\alpha_2)$

$\alpha_2 = \alpha_1\cdot t$

$f\left(\frac{10}{5}\right) = f(10) + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$0 = 1 + f\left(\frac{1}{5}\right)$

$f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле) Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 0 \quad (*) \\ \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \quad (**) \end{array}\right.$$

3) (*):

$$\sin 2\alpha = 0 \Rightarrow \cos 2\alpha = \pm 1 = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\left[\begin{array}{l} 2\cos^2\alpha - 1 = 1 \\ 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2\alpha = 1 \quad - \boxed{tg\alpha = 0} \\ \cos^2\alpha = 0 \quad - tg\alpha \text{ не сущ.} \end{array}\right.$$

4) (**) $\Leftrightarrow \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^2} = \pm\frac{3}{5} = 2\cos^2\alpha - 1$

4.1) $2\cos^2\alpha - 1 = \frac{3}{5}$

$2\cos^2\alpha = \frac{8}{5}$

$\cos^2\alpha = \frac{4}{5}$

$$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} \begin{cases} \cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \pm\frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \\ \begin{cases} \cos\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}} \end{cases} \end{array} \Leftrightarrow \boxed{\left[\begin{array}{l} tg\alpha = \frac{1}{2} \\ tg\alpha = -\frac{1}{2} \end{array}\right.}$$

4.2) $2\cos^2\alpha - 1 = -\frac{3}{5}$

$\cos^2\alpha = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \boxed{tg\alpha = \pm 2}$

Ответ: $0; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; -2; 2.$

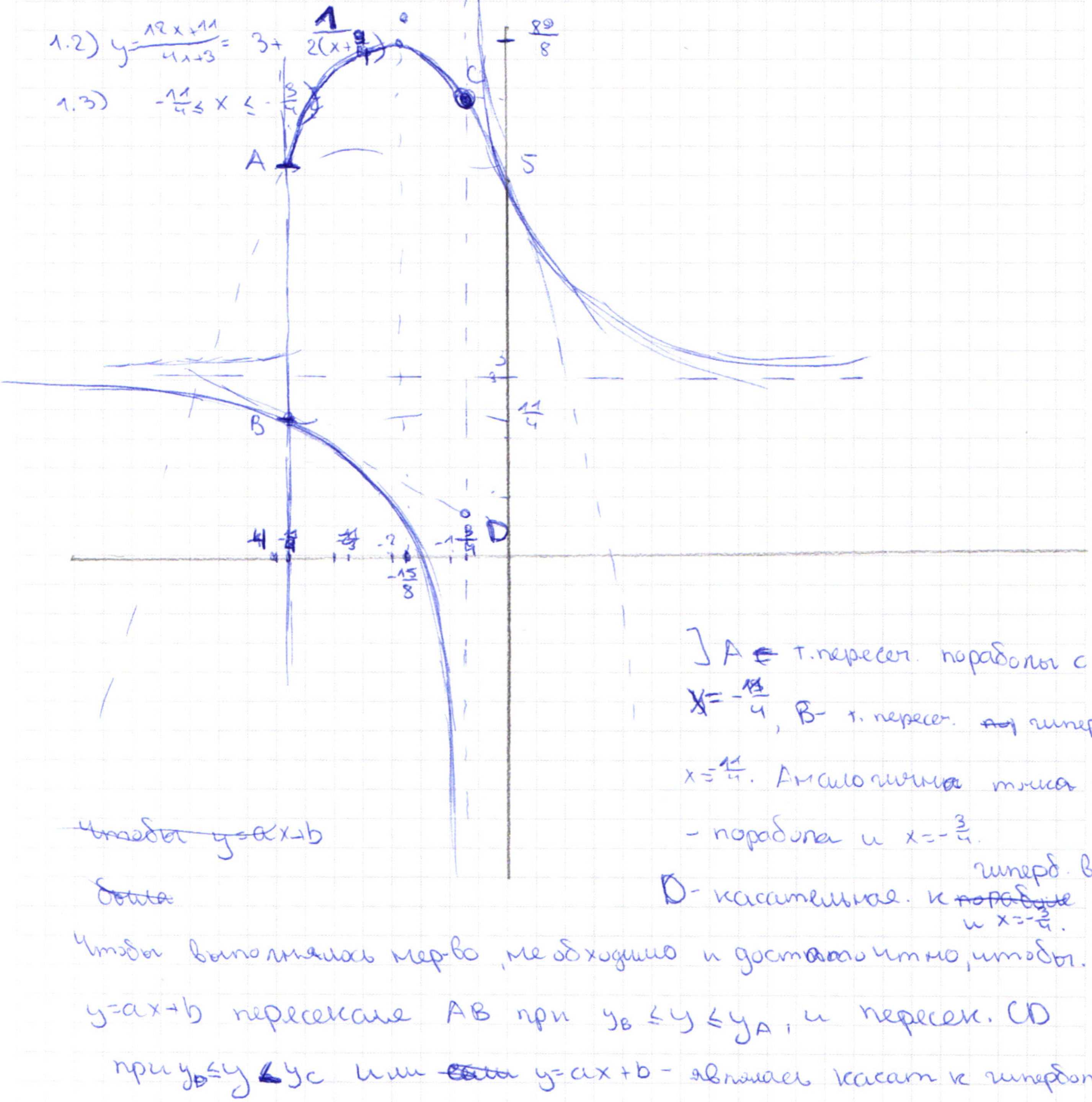
№6

1) Построим ~~#8~~ эскизы графиков:

1.1) $y=-8x^2-30x-17=-8\left(x+\frac{15}{8}\right)^2+\frac{89}{8}$

1.2) $y=\frac{12x+11}{4x+3}=3+\frac{1}{2(x+\frac{3}{4})}$

1.3) $-\frac{11}{4}\le x\le-\frac{3}{4}$



] A ~~∈~~ т. пересеч. параболы с $x=-\frac{11}{4}$, B – т. пересеч. ~~пар~~ гиперб. с $x=-\frac{11}{4}$. Аналогична точка C и – парабола и $x=-\frac{3}{4}$.

D – касательная к ~~параболе~~ гиперб. в т. B. и $x=-\frac{3}{4}$.

~~Чтобы $y=ax+b$~~

~~было~~

Чтобы выполнялось нер-во, необходимо и достаточно, чтобы $y=ax+b$ пересекала AB при $y_B\le y\le y_A$, и пересек. CD при $y_D\le y\le y_C$ или ~~был~~ $y=ax+b$ – являлась касат. к гиперболе.

1) Коорд. A:
подст. $-\frac{11}{4}$ в $-8x^2-30x-17$:

$$-8\cdot\frac{121}{16}+\frac{330}{4}-17=-\frac{121}{2}+\frac{165}{2}-17=\frac{44}{2}-17=5 - y_A$$

коорд. $A\left(-\frac{11}{4};5\right)$

2) Коорд B: $3+\frac{1}{2\left(-\frac{11}{4}+\frac{3}{4}\right)}=3+\frac{1}{2\cdot(-2)}=2\frac{3}{4}\Rightarrow B\left(-\frac{11}{4};\frac{11}{4}\right)$

☐ черновик ☒ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)