МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 8 ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92, \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \leqslant \log_{9x^3} \frac{1}{x^3}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12828.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ (AD и BC – основания, $AD > BC$) и окружность ω с центром C, касающаяся стороны AD. Касательные к ω, проведённые из точки B, пересекают прямую AD в точках P и Q (точка P лежит между Q и D). На продолжении стороны CB за точку B выбрана точка N так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы ADC, NQC и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \dfrac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{3}\cos(x-y) = 7\cos\left(\frac{2\pi}{3} + y\right), \\ \cos(2x-y) + \sqrt{3}\sin(2x-y) = 12\sin\left(y + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+26}{2x+3} \leqslant ax + b \leqslant 1 + \sqrt{-\frac{33}{4} - 13x - x^2}$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{19}{2}; -\frac{3}{2}\right)$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $KLMNK_1L_1M_1N_1$, грани KLL_1K_1 и $K_1L_1M_1N_1$ которого являются прямоугольниками. Сфера S касается прямых MM_1 и M_1N_1, плоскости $K_1L_1M_1$, а также плоскости KLL_1 в точке K. Эта сфера повторно пересекает отрезок KM_1 в точке A. Найдите $\angle KK_1N_1$ и объём параллелепипеда $KLMNK_1L_1M_1N_1$, если известно, что $AK = 3$, $AM_1 = 1$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} 13x + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = 92 \\ y + \sqrt[3]{169x^2 - y^2} = -124 \end{cases}$

Сделаем замену $u = \sqrt[3]{13x - y}$, $v = \sqrt[3]{13x+y}$ тогда $uv = \sqrt[3]{13^2x^2 - y^2}$,

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{u^3+v^3}{2} + uv = 92 \\ \dfrac{v^3-u^3}{2} + uv = -124 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3+v^3+2uv = 184 \\ v^3-u^3+2uv = -248 \end{cases}$

~~Прибавим первое и второе: $2u^3+2v^3$~~

Вычтем из первого второе: $u^3+v^3+2uv-v^3+u^3-2uv = 184 + 248 \Leftrightarrow 2u^3 = 184+248 = 432 \Leftrightarrow u^3 = \frac{432}{2} = 216 \Leftrightarrow u = 6$. ~~Вычтем из второго первое.~~

Просуммируем оба выражения: $u^3+v^3+2uv+2uv+v^3-u^3 = 184 - 248 = -64 = 2v^3 + 4vu = 2v^3 + 24v \Leftrightarrow 2v^3 + 24v + 64 = 0 = v^3 + 12v + 32 = 0$. Заметим, что при $v = -2$: $-8 - 24 + 32 = 0$ верно, значит это один из корней.

$$
\begin{array}{l|l}
v^3 + 12v + 32 & v+2 \\
\underline{v^3 + 2v^2} & v^2 - 2v + 16 \\
-2v^2 + 12v + 32 & \\
\underline{-2v^2 - 4v} & \\
16v + 32 & \\
\underline{16v + 32} & \\
0 &
\end{array}
$$

$v^3 + 12v + 32 = 0 = (v+2)(v^2 - 2v + 16)$

Решим $v^2 - 2v + 16$:

$D = 4 - 4 \cdot 16 < 0$ значит $v^3 + 12v + 32 = 0$ только при $v = -2$. Значит $u = 6$, $v = -2$. $13x = \frac{u^3+v^3}{2} = \frac{216-8}{2} = 104 \Rightarrow x = \frac{104}{13} = 8$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

Продолжение 1.

$y=\frac{v^3-u^3}{2}=\frac{-8-216}{2}=\frac{-224}{2}=-112.$

Проверим корни подставим в исходную систему:

$13\cdot 8+\sqrt[3]{169\cdot 8^2-(-112)^2}=104+\sqrt[3]{(13\cdot 8-112)(13\cdot 8+112)}=$

$=104+\sqrt[3]{(-8)\cdot(216)}=104-2\cdot 6=92$ что верно.

$-112+\sqrt[3]{169\cdot 8^2-(-112)^2}=-112-2\cdot 6=-124$ что верно

значит корни подах.

Ответ: $x=8,\ y=-112.$

2. $\sqrt{\log_{3x^2}x^9}\leqslant\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}$

ОДЗ: $x^9>0$ $\Leftrightarrow x>0$, $3x^2>0\Leftrightarrow x^2>0\Leftrightarrow x\neq 0$, $3x^2\neq 1\Leftrightarrow x^2\neq\frac{1}{3}\Leftrightarrow x\neq\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$, $\log_{3x^2}x^9\geqslant 0$ т.к. $x^9>0$ $9\log_{3x^2}x\geqslant 0\Leftrightarrow\log_{3x^2}x\geqslant 0\Leftrightarrow x\geqslant 1$. $\frac{1}{x^3}>0\Leftrightarrow x>0$, $9x^3>0\Leftrightarrow x>0$

$\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}\geqslant\sqrt{\log_{3x^2}x^9}\geqslant 0$

$\Leftrightarrow\log_{9x^3}\frac{1}{x^3}\geqslant 0$ т.к. $x>0$

$\Leftrightarrow -3\log_{9x^3}x\geqslant 0\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow\log_{9x^3}x\leqslant 0\Leftrightarrow x\leqslant 1$. Но по ОДЗ $x\geqslant 1$, значит ~~корнем~~ решением неравенства может быть только $x=1$,

Проверим: $\sqrt{\log_3 1}=\sqrt{0}=0\leqslant\log_9 1=0$ что верно.

Ответ: $x=1$. $(x\in\{1\})$

3. Заметим, что остаток от деления числа на некоторую степень числа 10 это последние несколько цифр числа, то есть $\overline{a_7a_6a_5\ldots a_2a_1}\equiv$ $\equiv\overline{a_ka_{k-1}\ldots a_1}\pmod{10^k}$. Если $k=0$: остатоток равен 0 всегда; если $k\geqslant 7$: остаток это же само число т.к. $\overline{a_7a_6\ldots a_1}\leqslant 10^7<10^k$ при $k>7$. Это очевидно следует из разложения числа на десятичную запись. (см. стр. 3)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 3.

$\overline{a_7 a_6 a_5 \dots a_1} = 10^6 a_7 + 10^5 a_6 + \dots + 10 a_2 + 1 \cdot a_1$. Допустим, мы смотрим остаток при делении на некоторый 10^k, где $k<7$, ~~коэфф~~ степень десятки при всех a_i, $i>k$, будет $10^{i-1} \vdots 10^k$, т.е. они просто обнулятся ~~...~~ по модулю 10^k. ~~значит~~ Также любое ~~...~~ $\leq k$ значное число меньше 10^k $(<10^k)$ поэтому $\overline{a_7 a_6 \dots a_2 a_1} \bmod 10^k = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1} \bmod 10^k = \overline{a_k a_{k-1} \dots a_1}$. Рассмотрим ~~заметим, что если~~ некоторые три последовательные степени числа десять, ~~...~~ обозначим $b, b+1, b+2$. $b > 2$, т.к. при $b \leq 2$ максимальная сумма остатков это $99 + 999 + 9999 < 100 + 1000 + 10000 = 11100 < 12828$ значит эта сумма не может быть достигнута. ~~Также ... т.к. при $a \geq 4$ минимальная сумма ...~~ ~~рассмотрим $a = 3$.~~ Рассмотрим произвольное семизначное число $\overline{a_7 a_6 a_5 \dots a_1} = A$: $\overline{a_7 a_6 a_5 \dots a_1} \bmod 10^b = \overline{a_b a_{b-1} \dots a_1}$, $\overline{a_7 a_6 \dots a_1} \bmod 10^{b+1} = \overline{a_{b+1} a_b \dots a_1}$, $A \bmod 10^{b+2} = \overline{a_{b+2} a_{b+1} \dots a_1}$. Рассмотрим сумму: $\overline{a_b a_{b-1} \dots a_1} + \overline{a_{b+1} a_b \dots a_1} + \overline{a_{b+2} a_{b+1} \dots a_1} = 3 \cdot \overline{a_b a_{b-1} \dots a_1} + 2 \cdot 10^b \cdot a_{b+1} + 10^{b+1} \cdot a_{b+2}$

Продолжение 3.

$= 12828$. ~~[Будем рассматривать только $b<4$]~~

~~При $b=3$: ($a_{b+2}=1$ т.к. если $a_{b+2}>1$ то сумма будет >12828, если $a_{b+2}=0$ то макс. сумма $999+9999 < 11000 < 12828$. Значит~~ ~~$a_{b+1}=1$~~ ~~$3\cdot\overline{a_b a_{b-1}\ldots a_1} + 2\cdot 10^b a_{b+1} = 2828$. $a_{b+1}=1$ т.к. если $a_{b+1}>1$ то сумма будет >12828, а при $a_{b+1}=0$ макс. сумма При $a_5=0$: $3\cdot\overline{a_3 a_2 a_1}+2000\cdot a_4=12828$~~

~~$6\geq a_4\geq 4$ т.к. при $a_4<4$ макс. сумма $3\cdot 999+8000<12828$. При $a_4>6$ мин. сумма $\geq 14000>12828$. При $a_4=6$: $3\cdot\overline{a_3 a_2 a_1}=12828-12000=828$ что невозм. т.к. $828\not\equiv 0 \pmod 3$. $a_4=5$: $3\cdot\overline{a_3 a_2 a_1}=12828-10000=2828$ что невозм. т.к. 2828 не кратно 3. При $a_4=4$: $3\cdot\overline{a_3 a_2 a_1}=12828-8000=4828$ что не кратно 3. Значит невозм.)~~

Рассмотрим сумму по модулю 3 для общего случая $3\cdot\overline{a_b a_{b-1}\ldots a_1}+2\cdot 10^b\cdot a_{b+1}+10^{b+1}\cdot a_{b+2}\equiv 0+2\cdot 1^b\cdot a_{b+1}+1^{b+1}a_{b+2}\pmod 3\equiv$

$\equiv a_{b+2}+2a_{b+1}\pmod 3\equiv 12828\equiv 0\pmod 3$. Значит, если $a_{b+2}\equiv 0\pmod 3$ то $2a_{b+1}\equiv 0\pmod 3$ то есть $a_{b+2}\equiv 0 \pmod 3$. Если $a_{b+2}\equiv 1\pmod 3$ то $2a_{b+1}\equiv -1\equiv 2\pmod 3 \Rightarrow a_{b+1}\equiv 1\pmod 3$. Если $a_{b+2}\equiv 2\pmod 3$ то $2a_{b+1}\equiv -2\equiv 1\pmod 3 \Rightarrow$

$\Rightarrow a_{b+1}\equiv 2\pmod 3$ т.е. $a_{b+2}\equiv a_{b+1}\pmod 3$ если сумма равна 12828

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение 3.

Вернёмся к случаю $b=3$: при $a_5 \neq 0$ значит $a_5 = 1$, т.к. если $a_5 > 1$ то сумма > 12828. Значит $a_4 \equiv 1 \pmod 3$, т.е. $a_4 \in \{1, 4, 7\}$. $a_4 \leq 2$ т.к. иначе сумма > 12828. Значит $a_4 = 1$.

Тогда $3 \cdot \overline{a_3 a_2 a_1} = 12828 - 10000 - 2000 = 828 \Rightarrow$ $\Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1} = 276$. Значит первые пять цифр фиксированы $\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = 11276$. a_7, a_6 произв. цифры кроме $a_7 \neq 0$. Значит возможн. чисел $9 \cdot 10 = 90$.

Рассмотрим $b=4$: $a_6 = 0$ т.к. иначе сумма > 12828 значит $3 \cdot \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} + 2 \cdot 10^4 \cdot a_5 = 12828$,

$a_5 \equiv 0 \pmod 3$ значит $a_5 \in \{0, 3, 6, 9\}$ $a_5 \leq 1$ т.к. иначе сумма > 12828 значит $a_5 = 0$

$3 \cdot \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = 12828 \Rightarrow \overline{a_4 a_3 a_2 a_1} = \frac{12828}{3} =$ $= 4276$. Значит $\overline{a_6 a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = 004276$.

Значит таких чисел 9 т.к. $a_7 \in [1; 9]$. Эти числа не пересекаются с числами которые дают необходимую сумму при $b=3$, т.к. последние пять цифр не равны 11276.

~~Рассмотрим $b=5$ $a_7 = a_6 = 0$ т.к. иначе сумма > 12828~~
~~$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = \frac{12828}{3} = 4276$ множество чисел~~

Продолжение 3.

При $b \geq 5$ в сумме будет присуствовать т.к. $a_7 \neq 0$ $10^6 a_7$ то есть сумма > 12828. Значит мы рассмотрели все возможные варианты. ~~Т.к. числа дающих сумму 12828 при $b=3$ и $b=4$ не пересекаются~~ кроме $b=3$ и $a_5=0$: $a_4 \equiv a_5 \equiv 0 (mod_3)$

$a_4 \in \{0, 3, 6, 9\}$ При $a_4 = 0$: $3 \cdot \overline{a_3 a_2 a_1} = 12828 \Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1} = 4276$ что невозможно.

При $a_4 = 3$: $3 \cdot \overline{a_3 a_2 a_1} = 12828 - 6000 = 6828 \Rightarrow \overline{a_3 a_2 a_1} = 2276$ что невозможно. При $a_4 = 6$:

$\overline{a_3 a_2 a_1} = \frac{12828 - 12000}{3} = 276$. Значит

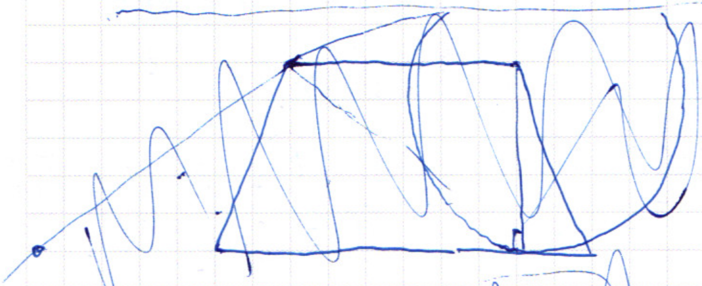
$\overline{a_5 a_4 a_3 a_2 a_1} = \overline{06276}$. Таких чисел $9 \cdot 10$ т.к. $a_7 \in [1; 10)$, $a_6 \in [0; 10)$, Этот шаблон не пересекается с другими. При $a_4 = 9$: сумма > 12828.

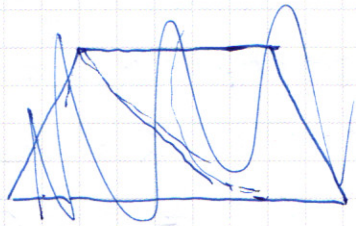
Т.к. числа дающую сумму 12828 при ($b=3$ и $a_5 = 0$), ($b=3$ и $a_5=1$) и ($b=4$) не пересек. то общее количество семизначных чисел это сумма кол-ва чисел в этих случаях: $90+90+9=189$

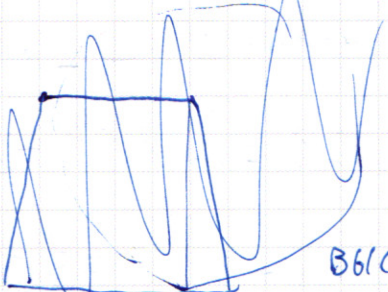
Ответ: 189.

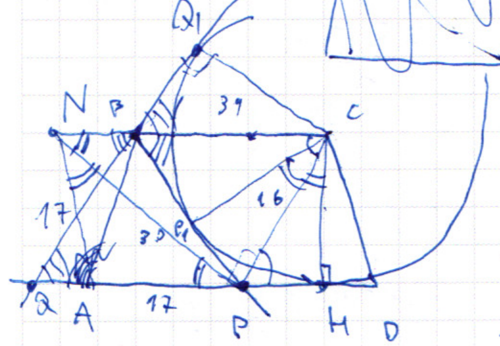
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. Дано: $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{15}{8}$, $AP = 17$, $NC = 34$









Обозначим H, точка касания ω и AD. Тогда CH — высота трапеции ABCD. Обозначим $\angle NPC = \alpha$, $\angle CNP = \beta$, $\alpha + \beta = 90°$. Т.к. $BC \parallel AD$, $\angle BCP = \angle CPD = \alpha$, в $\triangle PCH$, $\angle PCH = 90° - \angle CPH = 90° - \alpha = \beta$. $\frac{NP}{PC} = tg\angle NCP = \frac{15}{8}$

$NP = \frac{15}{8}PC$, По теор. Пифагора: $NC^2 = 34^2 = NP^2 + PC^2 = PC^2 + \frac{225}{64}PC^2 = PC^2\left(\frac{64+225}{64}\right) = PC^2\frac{17^2}{8^2} \Rightarrow PC\frac{17}{8} = 34 \Rightarrow PC = 16$, $NP = \frac{15}{8}16 = 30$. $\cos\beta = \frac{PN}{NC} = \frac{30}{34} = \frac{15}{17}$. Рассм. $\triangle PCH$: $\frac{CH}{PC} = \cos\beta = \frac{CH}{16} = \frac{15}{17} \Rightarrow$

$CH = \frac{15 \cdot 16}{17} = \frac{240}{17}$, $PH = \sin\beta \cdot 16 = \frac{16}{34}16 = \frac{128}{17}$. Рассм. $\triangle NAP$: $\angle NPQ = 180° - \angle NPC - \angle CPD = 90° - \alpha = \beta$. По теор. косинусов:

Продолжение 4.

$NA^2 = NP^2 + AP^2 - 2NP\cdot AP\cdot\cos\beta = 30^2+17^2-2\cdot30\cdot17\cdot\frac{15}{17} =$
$= 30^2+17^2-30^2 = 17^2 \Rightarrow NA = 17 \Rightarrow \triangle NAP$ - равнобедр.
$\angle PNA = \angle NPQ = \beta \Rightarrow \angle NAP = 180^\circ - 2\beta = 2\alpha.$
$\alpha = \arcsin\frac{15}{17}$, $\beta = \arcsin\frac{8}{17}$. CH - радиус, значит радиус $\omega = \frac{240}{17}$. Заметим, что NP - бисс. ANB
Обозначим точку касания BP и ω P_1, касания BQ и ω, Q_1. Тогда $CP_1 = CQ_1 = CH$.
$\angle P_1CP = \arccos\frac{P_1C}{PC} = \arccos\frac{\frac{240}{17}}{16} = \arccos\frac{15\cdot16}{17\cdot16} =$
$= \arccos\frac{15}{17} = \beta$. $\angle P_1CB = \angle HCB - \angle HCP_1 =$
$= 90^\circ - \beta - \beta = \alpha+\beta-\beta-\beta = \alpha-\beta$. $\angle PBC =$
$= 90^\circ - \angle P_1CB = 90^\circ - 90^\circ + 2\beta = 2\beta$. По симметрии (см. $\triangle BCP_2$)
$\angle Q_1BC = \angle CBP_1 = 2\beta$. т.к. $NC \parallel QD$,
$\angle Q_1QD = \angle Q_1BC = 2\beta$. Рассм. $NQAB$:
$\angle ANB = \angle AQB = 2\beta \Rightarrow NQAB$ - вписанный четырехугольник. $\Rightarrow \angle NQB = \angle NAB$, $\angle QAN =$
$= \angle QBN = \angle QBC = 2\beta$ ~~по~~ как вертикальные.
~~Из~~ ~~BHA~~ $\frac{Q_1C}{BC} = \sin2\beta = 2\sin\beta\cos\beta =$
$2\cdot\frac{15}{17}\cdot\frac{8}{17} = \frac{30\cdot8}{289} \Rightarrow BC = \frac{Q_1C}{\left(\frac{289}{30\cdot8}\right)} = \frac{\frac{240}{17}}{\frac{289}{30\cdot8}} =$

~~A~~ ~~A~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

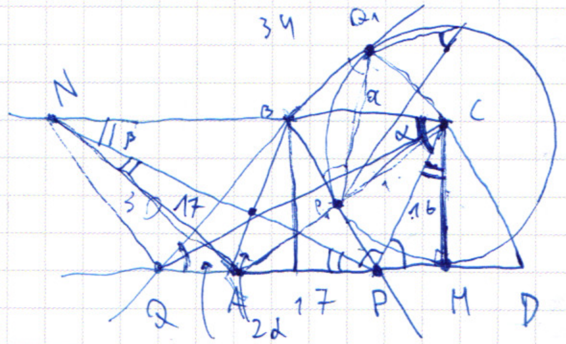
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{3}\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left((x-y)+\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\right)=$

$=\sin(x-y)\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos(x-y)\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=$

$\sin\left(y+\frac{\pi}{6}\right)=\sin y\cos\frac{\pi}{6}+\sin\frac{\pi}{6}\cos y=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}\sin y+\cos y\right)$

$\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-y\right)-2x\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)\cos(2x)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-y\right)\sin 2x$



30

$\frac{NP}{PC}=\frac{15}{8}$

$NP=\frac{15}{8}PC$

$\cancel{NP}\,PC^2+\frac{15^2}{8^2}PC^2=34^2$

$PC^2\left(\frac{289}{64}\right)=34^2$

$PC\left(\frac{17}{8}\right)=34$

AN через теор. кос.

$QH=QQ_1$

$\cos\beta=\frac{30}{34}=\frac{15}{17}$

$\sin\beta=\frac{16}{34}=\frac{8}{17}$

$AN=\sqrt{30^2+17^2-2\cdot30\cdot17\cdot\frac{15}{17}}=$ $PC=16$

$AD=a$

$CD=$

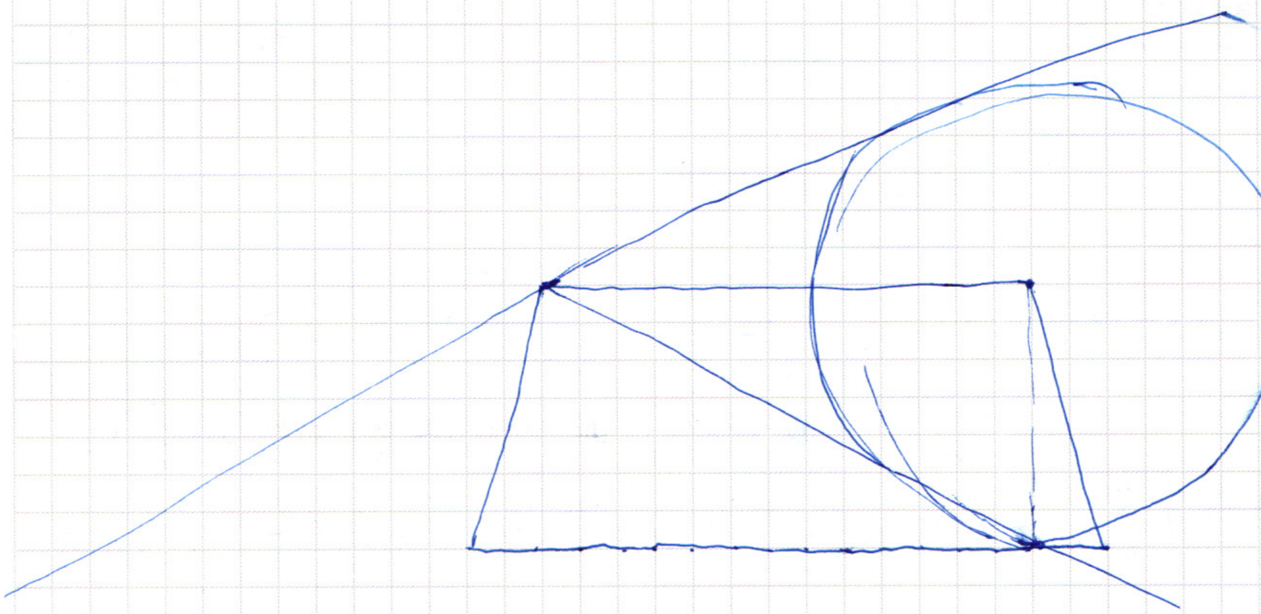
$=\sqrt{30^2+17^2-30^2}=17$ $NP=30$

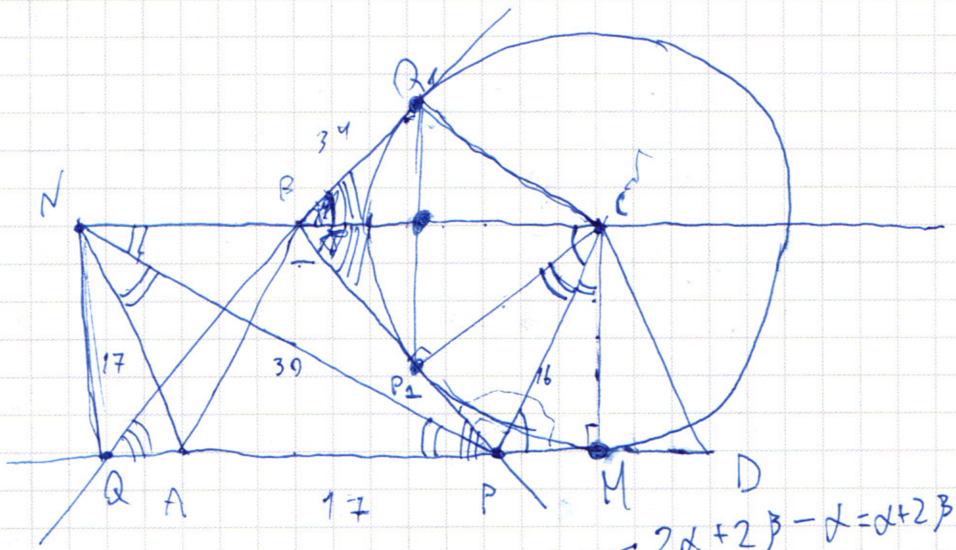
$\frac{CH}{16}=\frac{15}{17}$ $CH=\frac{15\cdot16}{17}=\frac{240}{17}$

$AH=AD-HD=$

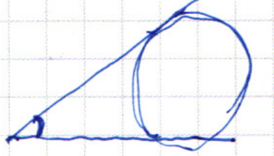
$PH=16\cdot\frac{8}{17}=\frac{128}{17}$

$AH=BC+HD=AD-HD$

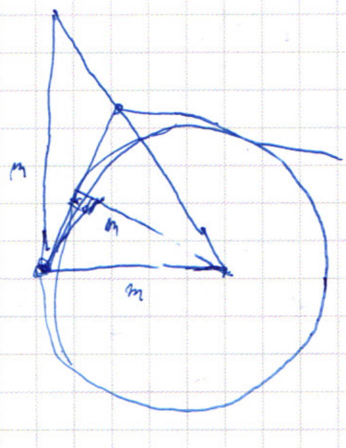




$$180^\circ - \alpha = 2\alpha + 2\beta - \alpha = \alpha + 2\beta =$$
$$= 90^\circ + \beta$$



$90^\circ + \beta - \gamma$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\begin{array}{r|l} 828 & 3 \\ \underline{-6} & 276 \\ 22 & \\ \underline{-21} & \\ 18 & \\ \underline{-18} & \\ 0 & \end{array}$$

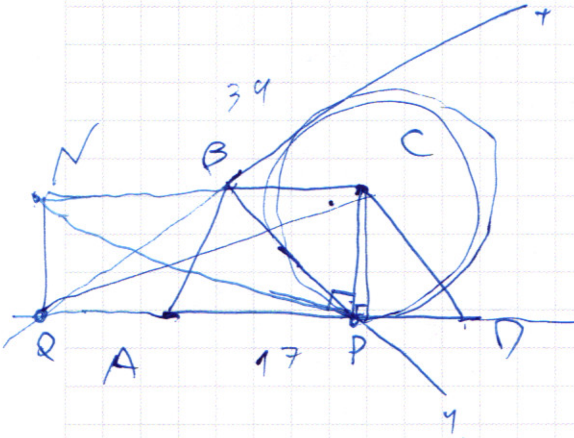
$$\begin{array}{r} 600 \\ +210 \\ +\ 18 \\ \hline 828 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 276 \\ +1276 \\ 11276 \\ \hline 12828 \end{array}$$

$$\frac{\sin x}{\cos x}-\frac{\sin y}{\cos y}=$$

$$=\frac{\sin x\cos y-\cos x\sin y}{\cos x\cos y}=$$

$$=\frac{\sin(x-y)}{\cos x\cos y}$$



$$\begin{array}{r|l} 12828 & 3 \\ \underline{-12} & 4276 \\ 8 & \\ \underline{-6} & \\ 22 & \\ \underline{-21} & \\ 18 & \\ 0 & \end{array}$$

$1=\sin^2x+\cos^2x\Rightarrow$

12.

$tg^2x=\frac{1}{\cos^2x}-1$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \end{array}$$

$$\frac{\sin(x+y)}{\cos x\cos y}$$

$$\begin{array}{r} 17 \\ \cdot 17 \\ \hline 225 \\ +64 \\ \hline 289 \end{array}$$

(0, 3, 6)

12000

828

06276

$\sqrt{3}\cos(x-y)=7\cos\left(\frac{2\pi}{3}+y\right)$

$$\begin{array}{r} 276 \\ 6276 \\ 06276 \\ \hline 2828 \end{array}$$

$\cos(2x-y)+\sqrt{3}\sin(2x-y)=12\sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)$

$\cos(x)=-\cos(\pi-x)$

$2\left(\frac{1}{2}\cos(2x-y)+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin(2x-y)\right)=2\sin\left(2x-y+\frac{\pi}{6}\right)=12\sin\left(y+\frac{\pi}{8}\right)$

$\cos\left(\frac{\pi}{3}-(2x-y)\right)=\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-y\right)-2x\right)=$

$=\cos\left(\frac{\pi}{3}-y\right)\cos$

$\cos\left(\left(\frac{\pi}{3}-y-x\right)\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)$

$\cos\left((-x-y)+\left(\frac{\pi}{3}-x\right)\right)$

$=\cos(x+y)\cos\left(\frac{\pi}{3}-x\right)+\sin(x+y)\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$13x + \sqrt[3]{169x^2-y^2} = 72$ $\quad u=\sqrt[3]{13x-y}$

$y + \sqrt[3]{169x^2-y^2} = -124$ $\quad v=\sqrt[3]{13x+y}$

$\sqrt{9\log_{12}2} \le \log_{72}\frac{1}{8}$

$\log_{72}$

$\sqrt{\log_{3x^2} x^9} \le \log_{9x^3}\frac{1}{x^3}$

$184 + 248 = 432$

$432 \mid 2$

216

$x^9>0$

$x>0$

$\sqrt{9\log_{3x^2} x} \le -\log_{9x^3} x^3$

216

$-\log_{9x^3} x^3 \ge 0$ $\quad 4\cdot 54 = 4\cdot 6\cdot 9 = 2^3\cdot 3^3 = 6^3$

$9\log_{3x^2} x \ge 0$ $\quad \log_{9x^3} x^3 \le 0$

$36\cdot 6 = 216$ $\quad 9999 + 999 = 10998$

$\log_{3x^2} x \ge 0$ $\quad v^2-2v+16$

$D=4-$ $\quad x^3\le 1$

$x\le 1$

$x\ge 1$ $\quad 13\cdot 2=26$

$3x^2>0$ $\quad 13\cdot 4 = 52$

$3x^2\ne 1$

$x^2 \ne \frac{1}{3}$ $\quad 13\cdot 8 = 104$

$184 - 248 = -136$ $\quad 136 + 184$

$248 - 184 = 64$ $\quad 10998 + 99 = 11097$

$13\cdot 8 = 104$ $\quad -8-24+32$

$32-8-24=0$

$64 + 184 = 248$

$104 - 112$ $\quad 8$ $\quad 104 + 112 = 216$

$a_{k+2} + 2a_{k+1} \equiv 0 \pmod 3$

$0 \quad 0$

$1 \quad 1$

$2 \quad 2$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)