МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5} \leqslant ax+b \leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$tg\,\alpha \geq 3$; $tg\,\alpha = ?$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) =$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \underline{\cos 2\beta} = \frac{-2}{5}\cdot\frac{1}{2\sin(2\alpha+2\beta)} = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{\frac{-2}{\sqrt{5}}} =$

$= -\frac{2}{5}\cdot\left(\frac{-\sqrt{5}}{2}\right) = \underline{\frac{\sqrt{5}}{5}}$.

По основному тригоном. тожд.:

$\sin^2 2\beta + \cos^2 2\beta = 1 \Rightarrow \underline{\sin 2\beta} = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta} =$

$= \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\sqrt{\frac{4}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt{5}} = \underline{\pm\frac{2\sqrt{5}}{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha =$

$= \frac{\sqrt{5}}{5}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad |\cdot\sqrt{5}$

$\frac{1}{5}\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1 \quad |\cdot 5$

$\sin 2\alpha \pm 10\cos 2\alpha = -5$

Рассмотрим два случая:

1) $\sin 2\alpha + 10\cos 2\alpha = -5$

$\sin 2\alpha \pm 10\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -5$

$t = \sin 2\alpha$: $t \pm 10\sqrt{1-t^2} = -5 \Leftrightarrow \pm 10\sqrt{1-t^2} = -5-t \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 100(1-t^2) = (5+t)^2 \quad (*) \\ -5-t \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 100(1-t^2) = (5+t^2) \\ -5-t \leq 0 \end{cases} \end{array}\right.$

$(*)$: $100(1-t^2)=(5+t)^2 \Leftrightarrow 100-100t^2=t^2+10t+25 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 101t^2+10t-75=0$

$D_1 = 25+75\cdot 101 = 25(1+3\cdot 101) = 25\cdot 304 = 25\cdot 16\cdot 19 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{-5-20\sqrt{19}}{101} \\ t=\dfrac{-5+20\sqrt{19}}{101} \end{array}\right.$$

Проверим доп. условия:

$-5-\left(\dfrac{-5-20\sqrt{19}}{101}\right) = -5+\dfrac{5+20\sqrt{19}}{101} = \dfrac{-505+5+20\sqrt{19}}{101} =$

$\cancel{= \dfrac{-96+20\sqrt{19}}{101} > 0, \text{ т.к } 20\sqrt{19} > 96}$

$\cancel{-5-\left(\dfrac{-5+20\sqrt{19}}{101}\right) =}$

$= \dfrac{-500+20\sqrt{19}}{101} < 0$, т.к $500=\sqrt{250000} > \sqrt{7600} = 20\sqrt{19}$

$-5-\left(\dfrac{-5+20\sqrt{19}}{101}\right) = \dfrac{-500-20\sqrt{19}}{101} < 0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha = \dfrac{-5-20\sqrt{19}}{101} \\ \sin\alpha = \dfrac{-5+20\sqrt{19}}{101} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{-5-20\sqrt{19}}{101}\right)^2} \Leftrightarrow \\ \cos 2\alpha = -\sqrt{1-\left(\dfrac{-5+20\sqrt{19}}{101}\right)^2} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2\alpha = -\sqrt{}\ 101 \\ \end{array}\right.$$

$\cancel{\dfrac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3}$

$\cancel{* \quad -32x^2+36x-3 \ge 0 \Leftrightarrow 32x^2-36x+3=0}$

$\cancel{D = 324-3\cdot 32 = 324-96 = 228}$ $\quad \cancel{324-96=228}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 & (2) \end{cases}$$

(2): $x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-36y+9)=45=45$

$\cancel{(x^2-6)}$ $(x-6)^2+(6y-3)^2=90$

(1): $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$. Возведем обе части ур-я в квадрат, потом проведем проверку полученных решений по условию $x-12y\geq 0$, т.к $\sqrt{2xy-12y-x+6}$ ~~(..)~~ определен не для всех пар $(x;y)$:

$(x-12y)^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+x+144y^2+12y-6=0$

$\cancel{(x^2-2x)}$ $x^2-x(26y-1)+144y^2+12y-6=0$

Решим как кв. отн. x:

$D=(26y-1)^2-4(144y^2+12y-6)=676y^2-52y+1-$
$-576y^2-48y+24=100y^2-100y+25=(10y-5)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{l} x=\frac{26y-1-10y+5}{2} \\ x=\frac{26y-1+10y-5}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{16y+4}{2} \\ x=\frac{36y-6}{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8y+2 \\ x=18y-3 \end{array}\right.$$

Подставим полученные значения x в (2):

а) $(8y+2-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(8y-4)^2+(6y-3)^2=90$

$64y^2-64y+16+36y^2-36y+9=90$

$100y^2-100y+25=90$

$100y^2-100y-65=0$

$20y^2-20y-13=0$

$D_1=100+20\cdot 13=360 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{10+6\sqrt{10}}{20} \\ y=\frac{10-6\sqrt{10}}{20} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{5+3\sqrt{10}}{10} \\ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{array}\right.$

Значит, $\left[\begin{array}{l} x=8\cdot\frac{5+3\sqrt{10}}{10}+2 \\ x=8\cdot\frac{5-3\sqrt{10}}{10}+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{4(5+3\sqrt{10})}{5}+2 \\ x=\frac{4(5+3\sqrt{10})}{5}+2 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{20+12\sqrt{10}+10}{5} \\ x=\frac{20-12\sqrt{10}+10}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{30+12\sqrt{10}}{5} \\ x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \end{array}\right.$

Проведем проверку:

$x\geq 12y \Leftrightarrow$ 1) $\frac{30+12\sqrt{10}}{5}\geq 12\cdot\frac{5+3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \frac{30+12\sqrt{10}}{5}\geq\frac{6(5+3\sqrt{10})}{5}$

$\Leftrightarrow \frac{30+12\sqrt{10}-30-18\sqrt{10}}{5}\geq 0 \Leftrightarrow \frac{-6\sqrt{10}}{5}\geq 0 \to \varnothing$

2) $\frac{30-12\sqrt{10}}{5}\geq 12\cdot\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \Leftrightarrow \frac{30-12\sqrt{10}-30+18\sqrt{10}}{5}\geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \frac{6\sqrt{10}}{5}\geq 0 \to$ верно.

б) $(18y-3-6)^2+(6y-3)^2=90$

$(18y-9)^2+(6y-3)^2=90$

$(9(2y-1))^2+(3(2y-1))^2=90$

$81(2y-1)^2+9(2y-1)^2=90$

$(2y-1)^2=10 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2y-1=\sqrt{10} \\ 2y-1=-\sqrt{10} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{10}+1}{2} \\ y=\frac{\sqrt{10}+1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=18\cdot\frac{\sqrt{10}+1}{2}-3 \\ x=18\cdot\frac{1-\sqrt{10}}{2}-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9(\sqrt{10}+1) - 3 \\ x = 9(1-\sqrt{10}) - 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 9\sqrt{10} + 6 \\ x = -9\sqrt{10} + 6 \end{array}\right.$

Проверка:

$x \geq 12y \Leftrightarrow$ 1) $9\sqrt{10} + 6 \geq 12 \cdot \frac{\sqrt{10}+1}{2} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 9\sqrt{10} + 6 - 6\sqrt{10} - 6 \geq 0 \Leftrightarrow 3\sqrt{10} \geq 0 \to$ верно

2) $-9\sqrt{10} + 6 \geq 12 \cdot \frac{1-\sqrt{10}}{2} \Leftrightarrow -9\sqrt{10} + 6 - 6 + 6\sqrt{10} \geq 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow -3\sqrt{10} \geq 0 \to \varnothing$

Ответ: 1) $x = 9\sqrt{10} + 6$; $y = \frac{\sqrt{10}+1}{2}$

2) $x = \frac{30 - 12\sqrt{10}}{5}$; $y = \frac{5 - 3\sqrt{10}}{10}$

(3) $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

~~(ОДЗ: $10x$)~~ $10x - x^2$ в аргументе логарифма $\Rightarrow$

$\Rightarrow$ накладываем на $10x - x^2$ ограничение $10x - x^2 > 0$

$10x - x^2 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x < 0 \Leftrightarrow x(x-10) < 0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x \in (0; 10)$. На этом промежутке модуль одно-значно раскрывается с минусом:

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t = 10x - x^2$: $t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \Leftrightarrow t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$; $t > 0$

$4^{\log_3 t} > 0 \Rightarrow$ можно на него поделить без изменения знака:

$$\frac{3^{\log_3 t}}{4^{\log_3 t}} + 1 \ge \frac{5^{\log_3 t}}{4^{\log_3 t}} \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_3 t} + 1 \ge \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_3 t}$$

$a = \log_2 t$: $\left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 \ge \left(\frac{5}{4}\right)^a$. $\frac{3}{4} < 1$; $\frac{5}{4} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow f(a) = \left(\frac{3}{4}\right)^a + 1 \downarrow$ на $D(f)$; $g(a) = \left(\frac{5}{4}\right)^a \uparrow$ на $D(g) \Rightarrow$

$\Rightarrow$ если у них есть об. точка, то она одна, при этом везде после об. точки $f(x) < g(x)$, до об. точки $f(x) > (g(x))$ (на пересечении $D(f)$ и $D(g)$).

Заметим, что при $a = 2$ выполняется равенство:

$\left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \frac{9}{16} + \frac{16}{16} = \frac{25}{16} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \Rightarrow$ решением нер-ва будет промежуток $a \le 2 \Rightarrow \log_3 t \le 2 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} t \le 9 \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 10x - x^2 \le 9 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 10x + 9 \ge 0 \\ x^2 - 10x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-1)(x-9) \ge 0 \\ x(x-10) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty) \\ x \in (0; 10) \end{cases} \Leftrightarrow$$

$\Leftrightarrow x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$; p – простое число

Найти все пары $(x; y)$: $x \in [2; 25]$; $y \in [2; 25]$; $y, x \in N$;

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(\frac{x}{y}) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$.

Пусть есть какое-то простое число p_0.

$f(p_0) = f(\frac{n \cdot p_0}{n})$; $n \in N$ $= f(n \cdot p_0) + f(\frac{1}{n}) = f(n) + f(p_0) + f(\frac{1}{n}) \Rightarrow$

$\Rightarrow f(n) + f(\frac{1}{n}) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{n}) = -f(n)$.

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{3}) = 0$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{4}) = 0$

$f(5) = [\frac{5}{4}] = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{6}) = 0$

$f(7) = [\frac{7}{4}] = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{7}) = -1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{8}) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{9}) = 0$

$f(10) = f(5) + f(2) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{5}) = -1$

$f(11) = [\frac{11}{4}] = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{11}) = -2$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{12}) = 0$

$f(13) = [\frac{13}{4}] = 3 \Rightarrow f(\frac{1}{13}) = -3$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{14}) = -1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{15}) = -1$

$f(16) = 4 \cdot f(2) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{16}) = 0$

$f(17) = [\frac{17}{4}] = 4 \Rightarrow f(\frac{1}{17}) = -4$

$f(18) = f(9) + f(2) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{18}) = 0$

$f(19) = [\frac{19}{4}] = 4 \Rightarrow f(\frac{1}{19}) = -4$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$f(20) = f(4) + f(5) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{20}) = -1$

$f(21) = f(3) + f(7) = 1 \Rightarrow f(\frac{1}{21}) = -1$

$f(22) = f(11) + f(2) = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{22}) = -1$

$f(23) = [\frac{23}{4}] = 5 \Rightarrow f(\frac{1}{23}) = -5$

$f(24) = f(4) + f(6) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{24}) = 0$

$f(25) = f(5) + f(5) = 2 \Rightarrow f(\frac{1}{25}) = -2$

Из перебора значений видно, что $f(\frac{1}{n})$; $n \in [2; 25]$ принимает:

- 10 нулей
- 8 „−1"
- 2 „−2"
- 1 „−3"
- 2 „−4"
- 1 „−5"

$\Rightarrow$ по выведенному св-ву $f(n)$; $n \in [2; 25]$ принимает:
10 нулей; 8 „1"; 2 „−2"; 1 „−3"; 2 „−4"; 1 „−5"

Будем брать одно значение у группы $f(n)$ и одно у группы $f(\frac{1}{n})$ и смотреть суммы.

„−5" – подойдет любое у n, кроме 5 $\Rightarrow$ 23

„−4" – подойдут все, кроме 5 и 4 $\Rightarrow$ 21

„−3" – любые кроме 5, 4 и 3 $\Rightarrow$ 20

„−2" – кроме 5; 4; 3 и 2 $\Rightarrow$ 18

„−1" – только нули $\Rightarrow$ 10

„0" – никто

Всего: $23 \cdot 1 + 21 \cdot 2 + 20 \cdot 1 + 2 \cdot 18 + 10 \cdot 8 =$
$= 23 + 42 + 20 + 36 + 80 = 201$

Ответ: 201 пара

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$ $(ax+b)$ – прямая !

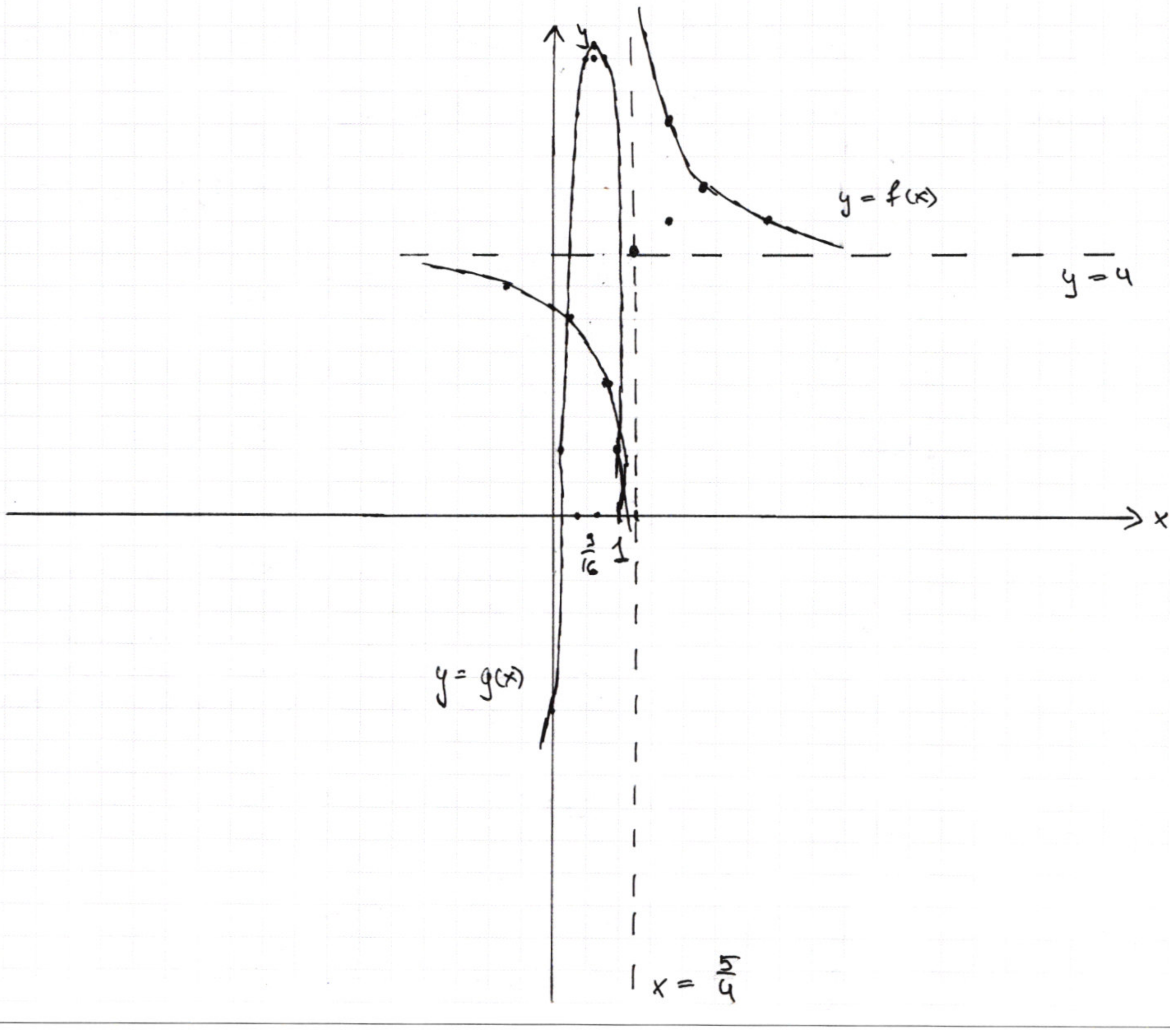
Выполнено $\forall x \in [\frac{1}{4}; 1]$; a, b – ?

$f(x) = \frac{16x-16}{4x-5}$; $f(x) = \frac{16x-20+4}{4x-5}$; $f(x) = 4 + \frac{4}{4x-5}$;

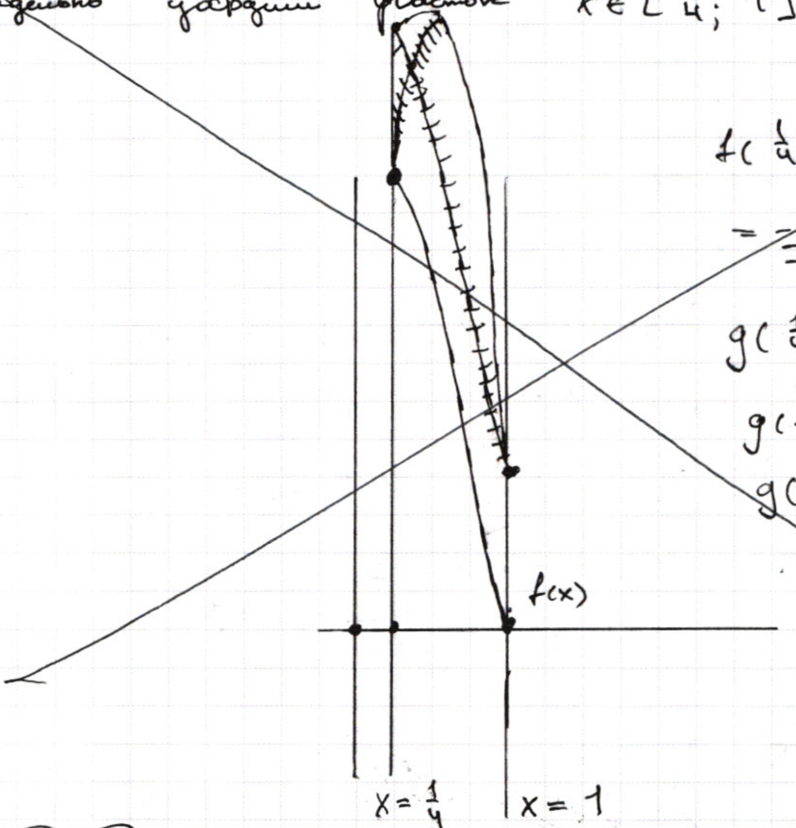
$f(x) = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$; $g(x) = -32x^2+36x-3$

$x_в = \frac{-36}{-64} = +\frac{9}{16} \Rightarrow g(x_в) = -32 \cdot \frac{81}{256} + \frac{36 \cdot 9}{16} - \frac{24}{8} =$

$= \frac{-81}{8} + \frac{162}{8} - \frac{24}{8} = \frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$



Отдельно изобразим участок $x \in [\frac{1}{4}; 1]$:



$f(\frac{1}{4}) = \frac{16 \cdot \frac{1}{4} - 16}{4 \cdot \frac{1}{4} - 5} = \frac{4-16}{1-5} =$

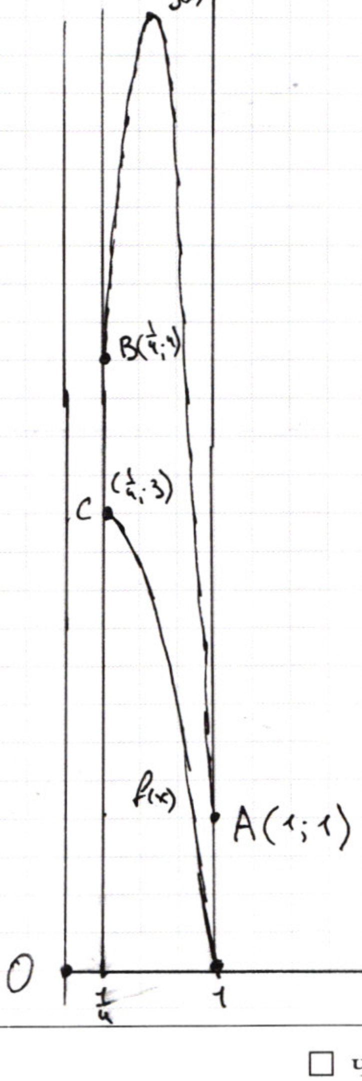
$= \frac{-12}{-4} = 3$; $f(1) = \frac{16 \cdot 1 - 16}{4 \cdot 1 - 5} = 0$

$g(\frac{1}{4}) = -32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 =$
$= -2 + 9 - 3 = 4$

$g(1) = -32 + 36 - 3 = 1$

$g(x_в) = 7\frac{1}{8}$

Отдельно покажем часть рисунка $x \in [\frac{1}{4}; 1]$



$f(\frac{1}{4}) = \frac{16 \cdot \frac{1}{4} - 16}{4 \cdot \frac{1}{4} - 5} = \frac{4-16}{1-5} = 3$

$f(1) = \frac{16 \cdot 1 - 16}{4 - 5} = 0$

$g(1) = -32 + 36 - 3 = 1$

$g(\frac{1}{4}) = -32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 = 4$

$g(x_в) = 7\frac{1}{8}$

В силу выпуклости $f(x)$ ($f(x)$ – гипербола) часть отрезка AC будет лежать ниже $f(x)$ => эта не подойдёт. Нам подойдут только две прямые: проходящая через A касательная к $f(x)$ и AB.

1) Найдем уравнение AB:

$\begin{cases} 1 = a + b \\ 4 = \frac{1}{4}a + b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ldots \end{cases}$

$$\Leftrightarrow\ 4-1=\frac{1}{4}a+b-a-b \Leftrightarrow 3=\frac{-3}{4}a \Leftrightarrow a=3\cdot\left(\frac{-4}{3}\right)=-4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b=1-a=1+4=5 \Rightarrow AB:\ y=-4x+5$$

г) Найдем об. уравнение касательной (~~проходящей~~) к $f(x)$:

$$f'(x)=\left(4+\frac{1}{x-\frac{5}{4}}\right)'=\cancel{\frac{1'\cdot\left(x-\frac{5}{4}\right)-\left(x-\frac{5}{4}\right)'\cdot 1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2}}=$$

$$=-\frac{1}{\left(x-\frac{5}{4}\right)^2} \Rightarrow y_{кас}=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)=$$

$$=\underbrace{\frac{-1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}}_{a}\cdot x+\underbrace{\frac{x_0}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}+4+\frac{1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)}}_{b}$$

$y_{кас}$ проходит через точку $A \Rightarrow 1=a+b \Rightarrow a=1-b \Rightarrow$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}=1-\frac{x_0}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}-4-\frac{1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)}$$

$$\frac{-1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}+\frac{x_0}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}=-3-\frac{1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)}$$

$$\frac{x_0-1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{-3x_0+\frac{15}{4}-1}{x_0-\frac{5}{4}}$$

$$\frac{x_0-1}{\left(x_0-\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{-3x_0+\frac{11}{4}}{x_0-\frac{5}{4}}$$

$x_0\neq\frac{5}{4} \Rightarrow$ можно умножить на $x_0-\frac{5}{4}$:

$$\frac{x_0-1}{x_0-\frac{5}{4}}=\frac{-3x_0+\frac{11}{4}}{1}$$

$$\frac{4x_0-4}{4x_0-5}=-12x_0+11$$

$$4x_0-4=(-12x_0+11)(4x_0-5)$$

$$4x_0-4=-48x_0^2+60x_0+44x_0-55$$

$$-48x_0^2+100x_0-51=0$$

$$48x_0^2+100x_0+51=0$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$D_1 = 50^2 - 48 \cdot 51 = 2500 - 2448 = 52 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_0 = \dfrac{50 + \sqrt{52}}{\cancel{(96)}\, 48} \\[2ex] x_0 = \dfrac{50 - \sqrt{52}}{\cancel{(96)}\, 48} \end{array} \right.$$

$7 < \sqrt{52} < 8 \Rightarrow 57 < 50 + \sqrt{52} < 58 \Rightarrow \dfrac{57}{48} < \dfrac{50 + \sqrt{52}}{48} < \dfrac{58}{48} > 1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ не подходит

$-8 < -\sqrt{52} < -7 \Rightarrow \dfrac{42}{48} < \dfrac{50 - \sqrt{52}}{48} < \dfrac{43}{48} \rightarrow$ подходит. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow a = \frac{-1}{\left(\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}\right)^2}; \quad b = \frac{\frac{50 - \sqrt{52}}{48}}{\left(\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}\right)^2} + 4 + \frac{1}{\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}}$$

Ответ: 1) $a = \dfrac{-1}{\left(\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}\right)^2}$; $b = \dfrac{\frac{50 - \sqrt{52}}{48}}{\left(\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}\right)^2} + 4 + \dfrac{1}{\frac{50 - \sqrt{52}}{48} - \frac{5}{4}}$

2) $a = -4$; $b = 5$.

⑥ $\frac{16x-16}{4x-5} < ax+b \le -32x^2+36x-3$

$50-\sqrt{52}$

$7 < \sqrt{52}$ 8

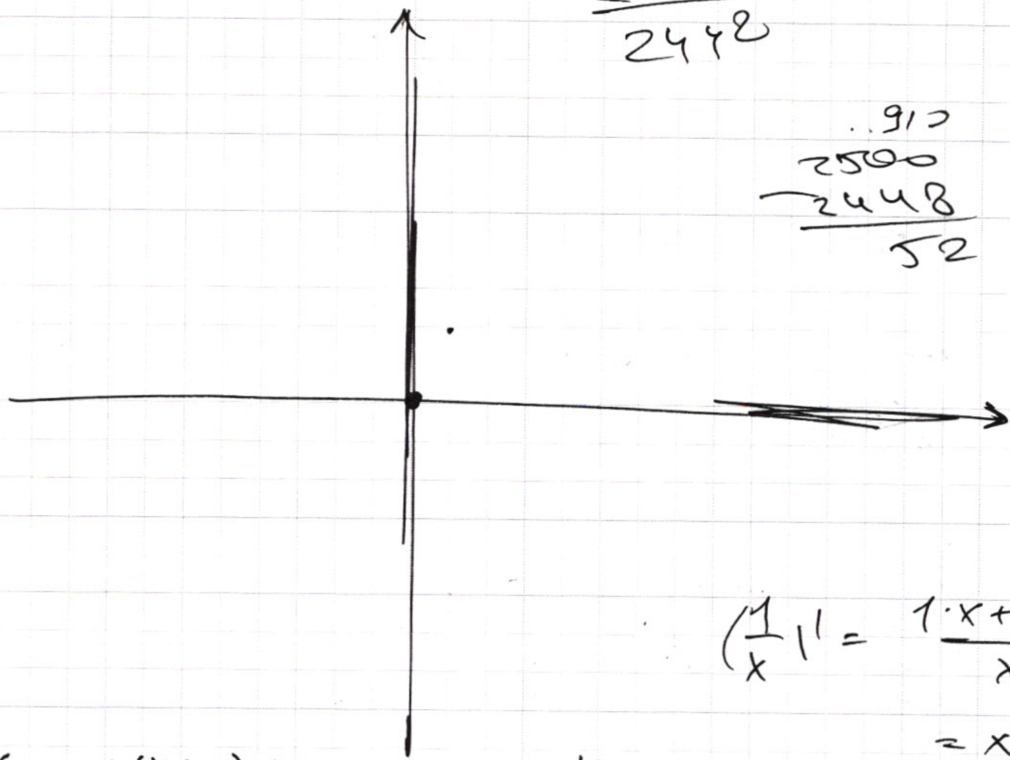
$\frac{57}{96} < \sqrt{52} < \frac{58}{96}$

$51 \times 48 = 408 + 204 = 2448$

-8 $\frac{42}{96}$

-7 $\frac{43}{96}$

$2500 - 2448 = 52$



$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5}$

$(\frac{1}{x})' = \frac{1 \cdot x + x' \cdot 1}{x^2} = \frac{x+1}{x^2} =$

$\lim f(x)$

$\frac{8-16}{2-5} = \frac{8}{3} = 2;$

$(x^{-1})' = -1 \cdot \frac{1}{x^2}$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{f(10) = f(2) + f(5) -}$

$f(\cancel{5}) = f\left(\frac{10}{2}\right) - f(10) + f\left(\frac{1}{2}\right) = f(2) + f(\cancel{5}) + f\left(\frac{1}{2}\right)$ 0 0

7 ; 14;

$f(\cancel{pk}) = f\left(\frac{npk}{n}\right) = f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) + \cancel{f(pk)} \Rightarrow$

$\Rightarrow f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) = 0$

$f\left(\frac{1}{n}\right) + f(n) = 0$

$$\begin{array}{r} \cancel{23} \\ +\cancel{42} \\ +\cancel{70} \\ +36 \\ +80 \\ \hline 201 \end{array}$$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x^{\log_3 3} + x^{\log_3 4} \geq x^{\log_3 5}$

$1 + x^{\log_3 \frac{4}{3}} \geq x^{\log_3 \frac{5}{3}}$

$x^{\log_3 (\frac{5}{3})} - x^{\log_3 (\frac{4}{3})} \leq 1$

$\cancel{(\frac{5}{3})^{\log_3}} > 0$ ≥ 0 >0 <0

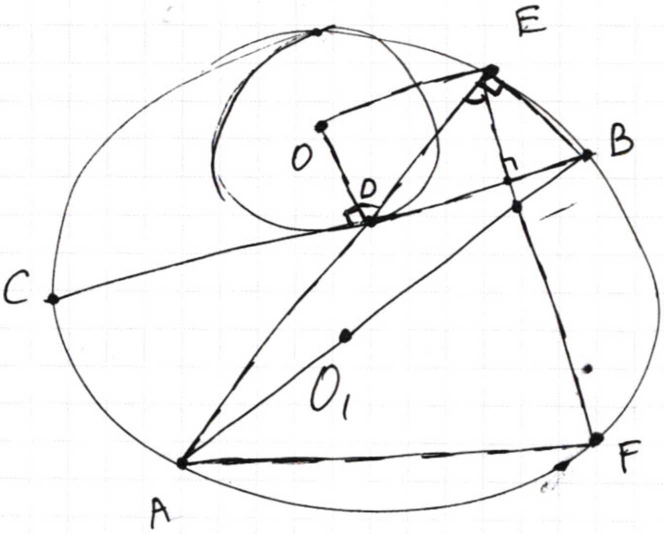
$(x^{\log_3 \frac{5}{3}}) \ln(\log_3 \frac{5}{3}) - \cancel{\log} (x^{\log_3 \frac{4}{3}}) \ln(\log_3 \frac{4}{3})$

$x^{\log_3 \frac{4}{3}} (x^{\log_3 \frac{5}{4}} \cdot \ln(\log_3 \frac{5}{3}) - \ln(\log_3 \frac{4}{3})$

$x^{\log_3 \frac{5}{4}} = \frac{\ln(\log_3 \frac{4}{3})}{\ln(\log_3 \frac{5}{3})}$ $\log_a b = \log c$

$x^{\log_3 \frac{5}{4}} = \log_{\log_3 \frac{5}{3}} \log_3 \frac{4}{3}$

$\frac{9}{10} + \frac{16}{10} = \frac{25}{10} =$



$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$

$r_1 ; r_2 = ?$

$\angle AFE = ?$

$S \Delta AFE ?$

$CD \cdot BD = EB \cdot AD =$

$\Rightarrow ED \cdot AD =$

$\log_3 \cancel{(3{\cdot}4)}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$; p – простое.

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$

$f(\frac{x}{y}) < 0$

$f(x/y) = f(x \cdot \frac{1}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(3) = f(3 \cdot 1) = f(3) + f(1)$

$f(3) = [$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\frac{16x-20+4}{4x-5} \le ax+b < -32x^2+36x-3$

$4 + \frac{4}{4x-5} \le ax+b < -32x^2+36x-3$

$-32x^2+36x-3=0$

$f(f(4)) = f(\cancel{4})$

D

$\cancel{2; 3; 4}$.

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$; p – простое

$\underbrace{2; 3}_{=0}; \underbrace{5; 7}_{=1}; \overset{=2}{11}; \overset{=3}{13}; \overset{=4}{17};$

$\underset{4}{\overset{\shortparallel}{19}}; \underset{5}{\overset{\shortparallel}{23}}$

$f(p^n) = n \cdot [\frac{p}{4}]$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(3) = [\frac{3}{4}] = 0$

$f(3) = f(\frac{6}{2}) = f(6) + f(\frac{1}{2}) = \overset{=0}{f(3)} + \overset{=0}{f(2)} + f(\frac{1}{2}) =$

$f(\frac{1}{2}) = 0$

$f(4) = f(\frac{8}{2}) = \overset{=0}{f(8)} + f(\frac{1}{2})$

$0 \quad 0$

$f(3) = f(\frac{6}{2}) = f(6) + f(\frac{1}{2}) = f(3) + f(2) + f(\frac{1}{2}) =$

$f(\frac{1}{2})$

$f(5) = f(\frac{10}{2}) = f(10$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$4 < \sqrt{19} < 5$

$-100 < -5 - 20\sqrt{19} < -80$

$-805 \quad 5 - 20\sqrt{19} < -85$

11
$\times 144$
4
576

$t \pm 10\sqrt{1-t^2} = -5$

$5 + t = 10\sqrt{1-t^2}$

$t^{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)} + t^{\log_3\left(\frac{7}{3}\right)}$

$\times 288$
2
576

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x - x^2 + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $\quad (\ln x)' =$

$t + |t|^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$a^x \cdot \ln(\log_3\left(\frac{4}{3}\right)$

$\times 26$
26
$+ 156$
52
676

$(x - 12y)^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$\cancel{x^2 - 24yx}$

$\cancel{x^2 - 24xy + 144y^2 - 12y - x}$

$x^2 - 24xy + 144y^2 - 2xy + 12y + x - 6 = 0$

$x^2 - 26xy + x + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$x^2 - x(26y - 1) + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$D = (26y - 1)^2 - 4(144y^2 + 12y - 6) = 0$

$= 676y^2 - 52y + 1 - 576y^2 + 48y - 24$

$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5} \quad | : t^{\log_3 3}$

$1 + t^{\log_3 4 - \log_3 3} \geq t^{\log_3 5 - \log_3 3}$

$1 + t^{\log_3\left(\frac{4}{3}\right)} \geq t^{\log_3\left(\frac{5}{3}\right)}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{5}} = \pm\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta) - \sin(2\alpha+4\beta) + \sin\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+2\beta-2\alpha-4\beta}{2}\cdot$

$\cdot\cos\left(\frac{2\alpha+2\beta+2\alpha+4\beta}{2}\right) - \sin\alpha = -2\sin2\beta\cos(2\alpha+3\beta)-$

$-\sin\alpha =$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin((2\alpha+2\beta)+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right)$

~~$\sin(2\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(4\alpha+$~~

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{2}{5}$ (2)

(2): $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos2\beta =$

$400\cdot20 = 8000-400 = 7600$

$\begin{array}{r|l} 304 & 8 \\ -24 & 38 \\ 64 & \end{array}$ $18\cdot19$

~~$\sin 2\alpha 2+$~~

$\frac{1}{5}\sin2\alpha \pm 2\cos2\alpha = -1$

$\sin2\alpha \pm 10\cos2\alpha = -5$

$\begin{array}{r|l} 304 & 16 \\ -16 & 1 \\ 44 & \end{array}$

$\sin2\alpha \pm\sqrt{1-\sin^2 2\alpha}\cdot10 = -5$

1) $\sin2\alpha + 10\sqrt{1-\sin^2 2\alpha} = -5$

$t + 10\sqrt{1-t^2} = -5$

$10\sqrt{1-t^2} = -5-t \Leftrightarrow \begin{cases} 10(1-t^2) = (-5-t)^2 \\ -5-t \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 10-10t^2 = t^2+10t+25$

$11t^2+10t+15=0 \quad D = 25-15\cdot11 < 0.$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

6 $\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

Выполнено для любого $x \in [\frac{1}{4}; 1]$; $a ; b = ?$

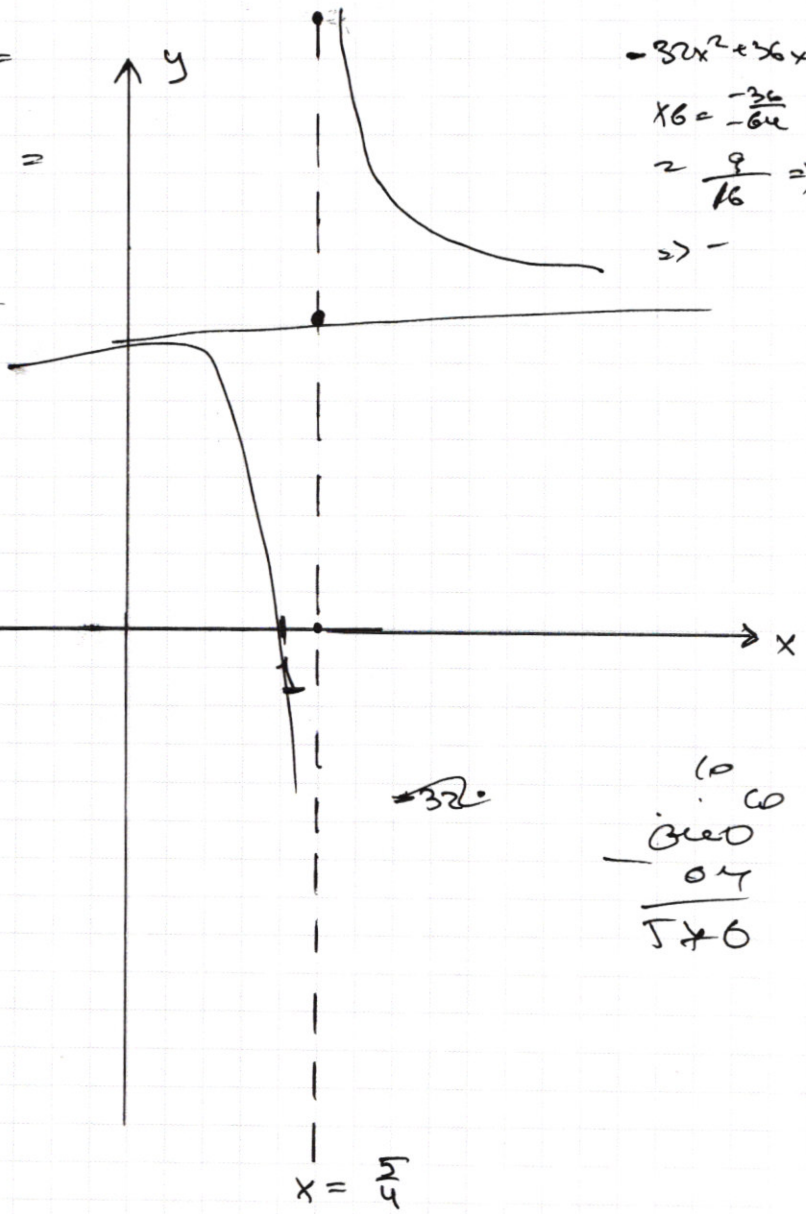
$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-\frac{5}{4}}$

$-32\cdot\frac{81}{256} + \frac{36\cdot 9}{16} - 3 =$

$= \frac{-81}{8} + \frac{18\cdot 9}{8} - \frac{24}{8} =$

$= \frac{-81-24+162}{8} =$

$= \frac{57}{8} \approx 7$



$-32x^2+36x-3$

$x_в = \frac{-36}{-64} =$

$= \frac{9}{16} \Rightarrow$

$\Rightarrow -$

$-32\cdot$

10
60
640
− 64
576

$-2^5\cdot\frac{9}{28} + 36\cdot 16 - 3 =$

$= \frac{-9}{23} + 9\cdot 2^2.$

$-\frac{81}{8} + 9\cdot 64 - 3$

$576 -$