МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\sin((2\alpha+2\beta)+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta + \sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta -$

$- \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cos^2 2\beta = \frac{4}{5} \Rightarrow \sin^2 2\beta = \frac{1}{5}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ или $-\frac{1}{\sqrt{5}}$ – 2 случая

1. $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$,

$\sin 2\alpha \cdot\frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha) = 0$

$\cos\alpha \neq 0$ т.к. $tg\,\alpha$ определен, поэтому $2\sin\alpha+\cos\alpha = 0$

$2\sin\alpha = -\cos\alpha$

$2\,tg\,\alpha = -1$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$

2. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} + \cos 2\alpha \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$ $\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0 \\ \sin = -2\cos\alpha \Rightarrow tg\,\alpha = -2 \end{array}$

Итого, есть 3 возможных значения $tg\,\alpha$: $-\frac{1}{2}$; 0; -2

по условию возможных значений не меньше 3ех, поэтому они все достижимы.

Ответ: -2; $-\frac{1}{2}$; 0

$\square$ черновик $\boxtimes$ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$

$xy-x-2y+2=x(y-1)-2(y-1)=(x-2)(y-1)$

Пусть $a=x-2$ $b=y-1$, тогда

$x=a+2$, $y=b+1$

$\begin{cases} a+2-2(b+1)=\sqrt{ab} \\ (x^2-4x+4)+9(y^2-2y+1)=25 \end{cases}$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \end{cases}$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$

Пусть $b=0$, тогда $a-2\cdot 0=\sqrt{a\cdot 0}$, $a=0$ и не выполнено, $a^2+9b^2=25$, значит $b\neq 0$

Пусть $t=\frac{a}{b}$ => $a=t\cdot b$

$\begin{cases} tb-2b=\sqrt{tb^2} \\ (t^2+9)b^2=25 \end{cases}$

есть 2 случая: 1. $b>0$

$(t-2)b=\sqrt{t}\,b$, $t-2=\sqrt{t}$, $t-\sqrt{t}-2=0$, $\left[\begin{array}{l} \sqrt{t}=-1 \\ \sqrt{t}=2 \end{array}\right.$

$\sqrt{t}\geq 0$ => корень 1 не подходит

$t=2^2=4$, $25b^2=25$ $b=1$ (т.к. $b>0$)

$a=tb=4$, $x=a+2=6$, $y=b+1=2$.

2. $b<0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$(t-2)b = \sqrt{t}\cdot|b| = -\sqrt{t}\cdot b$, $t-2=-\sqrt{t}$, $t+\sqrt{t}-2=0$

$\sqrt{t} = \left[\begin{array}{l} -2 \\ 1 \end{array}\right.$ $\sqrt{t}\geq 0 \Rightarrow$ -2 не подходит, $t=1$

$10b^2=25$, $b^2=\frac{5}{2}$ $b=-\sqrt{\frac{5}{2}}$ т.к. $b<0$ $a=tb=-\sqrt{\frac{5}{2}}$,

$x=a+2 = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}$ $y=b+1=1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

переходы были равносильными, значит эти две пары $x\,y$ являются решениями

Ответ: $x, y = 6, 2$ или $x, y = 2-\sqrt{\frac{5}{2}}, 1-\sqrt{\frac{5}{2}}$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}$$

пусть $t=x^2+18x$

$$5^{\log_{12}t}+t\geq |t|^{\log_{12}13}$$

t стоит под log $\log_{12}t$, значит $t>0$, а $|t|=t$

$$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}$$

$t=12^{\log_{12}t}$

$$t^{\log_{12}13} = \left(e^{\ln t}\right)^{\frac{\ln 13}{\ln 12}} = \left(e^{\ln 13}\right)^{\frac{\ln t}{\ln 12}} = 13^{\log_{12}t}$$

Пусть $u=\log_{12}t$ $5^u+12^u\geq 13^u$

$\left(\frac{5}{12}\right)^u+1\geq\left(\frac{13}{12}\right)^u$

при $u\leq 2$ $\left(\frac{5}{12}\right)^u+1\geq\left(\frac{5}{12}\right)^2+1=\left(\frac{13}{12}\right)^2\geq\left(\frac{13}{12}\right)^u$ - нер-во верно

при $u>2$ $\left(\frac{5}{12}\right)^u+1\leq\left(\frac{5}{12}\right)^2+1=\left(\frac{13}{12}\right)^2\leq\left(\frac{13}{12}\right)^u$ - нер-во неверно

поэтому $u\leq 2$, $\log_{12}t\leq 2$ $0<t\leq 12^2=144$, $\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases}$

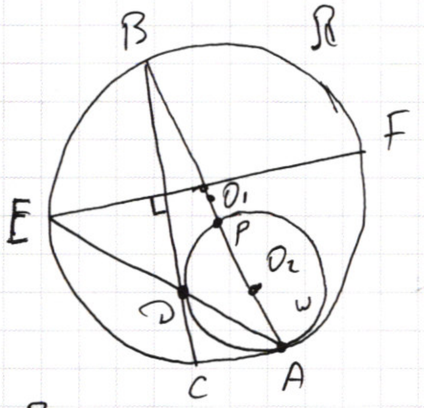
$x^2+18x>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x<-18 \\ x>0 \end{array}\right.$

$x^2+18x\leq 144 \Rightarrow$ $x^2+18x\leq 0 \Rightarrow \begin{cases} x\leq 6 \\ x\geq -24 \end{cases}$

Итого $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$ Ответ: $x\in[-24;-18)\cup(0;6]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



$CD = 8$

$BD = 17$

r, R – ?

$\angle AFE$ – ?

$S_{\triangle AEF}$ – ?

1. Пусть O_1 – центр окр-ти Ω, O_2 – центр ω
AB – диаметр, значит $\angle ACB = 90°$ BD – касательная, значит $\angle O_2DB = 90$

2. В $\triangle ACB$ и $\triangle O_2DB$ $\angle ACB = \angle O_2DB = 90$ и $\angle ACB$ – общ, поэтому $\triangle ACB \sim \triangle O_2DB$ (по 2ум углам)

3. Пусть R – радиус Ω, r – радиус ω. Тогда $AB = 2R$, $BO_2 = AB - AO_2 = 2R - r$ из подобия $\frac{AB}{O_2B} = \frac{BC}{BD}$ $BC = 8 + 17 = 25$
$\frac{2R}{2R - r} = \frac{25}{17}$ $34R = 50R - 25r$ $25r = 16R$

4. Пусть P – точка ∩ AB с ω не совпадающая с A, тогда $BP = BA - AP = 2R - 2r$ BA – секущая к ω BD – кас-ая к ω, поэтому $BD^2 = BP \cdot BA$ $17^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$ $R = \frac{25}{16} r$ =>
$17^2 = \frac{50}{16} r \cdot (\frac{50}{16} r - 2R) = \frac{25}{8} \cdot \frac{9}{8} r^2 = \frac{225}{64} r^2$
$17 = \frac{15}{8} r$ $r = \frac{136}{15}$ => $R = \frac{25}{16} r = \frac{85}{6}$

5. при положении ~~коэф~~ центрам A и коэф-ом $\frac{R}{r}$ ω перейдет в Ω так как ω и Ω касаются внутр. образом, при этом $P \to E$, а $O_2 \to O_1$, сл-но $O_1E \parallel O_2D \perp BC$, значит $BC \perp O_1E$,

Сл-но O_1 лежит на EF, EF — диаметр Ω, $\angle AFE = \frac{\angle AO_1E}{2}$, т.к. $\angle AFE$ — вписанной, а $\angle AO_1E$ — центральный

6. то есть если $\angle AFE = \alpha$, то $\angle AO_1E = 2\alpha$

$\angle EO_1B = 180 - \angle AO_1E = 180 - 2\alpha$

$\angle ABC = 90 - \angle BO_1E = 90^\circ - (180^\circ - 2\alpha) = 2\alpha - 90$

$O_2D = r = \frac{136}{15}$ $\quad O_2B = 2R - r = \frac{85}{3} - \frac{136}{15} = \frac{289}{15}$, $\sin\angle ABC = \frac{O_2D}{O_2B} = \frac{136}{289}$

$2\alpha - 90 = \arcsin\frac{136}{289}$ $\quad \cos 2\alpha = -\sin(2\alpha - 90) = -\frac{136}{289}$

$2\alpha = \arccos\left(-\frac{136}{289}\right)$ (т.к. $0<\alpha<90$, $0<2\alpha<180$)

$\alpha = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{136}{289}\right)$

$\angle AFE = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{136}{289}\right) = \frac{1}{2}\arccos\left(-\frac{8}{17}\right)$

7. $S_\triangle AEF = S_\triangle AO_1E + S_\triangle AO_1F = 2S_\triangle AO_1E$ (т.к. AO_1 — медиана в $\triangle AEF$, $S_\triangle AO_1E = S_\triangle AO_1F$)

$S_\triangle AO_1E = \frac{1}{2}\cdot AO_1 \cdot O_1E \cdot \sin\angle AO_1E = \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha$

$\sin\angle BO_1E = \sin(180 - 2\alpha) = \sin 2\alpha$

$\sin\angle BO_1E = \frac{BQ}{BO_1}$, где Q — точка $\cap$ BC и O_1E

$BQ = \frac{BC}{2}$ т.к. в равнобедр. $\triangle$-ке BO_1C $BO_1 = O_1C$ O_1Q — высота, а значит и медиана $BQ = \frac{25}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{25}{2} : \frac{85}{6} = \frac{15}{17}$ $\quad S_\triangle AO_1E = \frac{R^2}{2}\cdot\frac{15}{17}$; $S_\triangle AFE = 2S_\triangle AO_1E =$

$= R^2 \cdot \frac{15}{16} = \left(\frac{85}{6}\right)^2 \cdot \frac{15}{16} = \frac{6375}{36}$

Ответ: радиус Ω: $\frac{85}{6}$, а радиус ω: $\frac{136}{15}$

$\angle AFE = \frac{1}{2}\arccos -\frac{8}{17}$ $\quad S_\triangle AEF = \frac{6375}{36}$

№ 5

для $x \geq 1$ и $x \leq 24$, $y \geq 1$ и $y \leq 24$

$f(x) = f\left(\frac{yx}{y}\right) = f(y) + f\left(\frac{x}{y}\right)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y)$, то есть $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, сл-но $f(x) - f(y) < 0$

сл-но $f(x) < f(y)$. Найдем $f(x)$ при ≥ 1 ≤ 24:

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$

$f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$

$f(7) = \left[\frac{7}{4}\right] = 1$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3$

$f(17) = \left[\frac{17}{4}\right] = 4$

$f(19) = \left[\frac{19}{4}\right] = 4$

$f(23) = \left[\frac{23}{4}\right] = 5$

$f(1) = 0$ т.к. $f(2) = f(2 \cdot 1) = f(2) + f(1)$, $f(1) = 0$

для составных найдем f из значений простых из $f(ab) = f(a) + f(b)$, получим следующее:

~~1~~ 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

*

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
$f(x)$	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4	0	4

x	20	21	22	23	24
$f(x)$	1	1	2	5	0

Далее речь только про аргументы f (от 1 до 24). То есть при семи значениях x $f(x) = 1$

при двух значениях x $f(x) = 2$

при одном значении x $f(x) = 3$

при двух значениях x $f(x) = 4$

при одном значении x $f(x) = 5$

при остальных 11-ти значениях x $f(x) = 0$

При любом из 11ти значений x с $f(x) = 0$ есть $7+2+1+2+1 = 13$ значений y с $f(y) > 0$, при семи значениях x с $f(x) = 1$ есть $2+1+2+1 = 6$ значений y с $f(y) > 1$, при одном значении с $f(x) = 2$ есть $1+2+1 = 4$ значений y с $f(y) > 2$, при одном значении x с $f(x) = 3$ есть $2+1 = 3$ значений y с $f(y) > 3$, при двух значениях x с $f(x) = 4$ есть 1 значение y с $f(y) > 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) = -1$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0\\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0\end{array}\right.$ $\Rightarrow \sin\alpha = 0 \Rightarrow tg\,\alpha = 0$

$2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \Rightarrow \sin\alpha = -2\cos\alpha \Rightarrow$

$tg\,\alpha = -2$

Итого есть 3 возможных значения $tg\,\alpha$: $-\frac{1}{2}; 0; -2$

по условию возможных значений не меньше 3ех,

поэтому они все достижимы

Ответ: $-2; -\frac{1}{2}; 0$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

0 0 1 1 2 3 4 4 5

7 : 1

7 : 2

1 : 3

2 : 4

1 : 5

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11

0 0 0 1 0 1 0 0 1 2 0

$11\cdot13 + 7\cdot6 + 2\cdot4 + 3\cdot1 + 1\cdot2 = 198$

143 42 8 3 2

185

13

$\boxed{198}$

$\begin{array}{r}13\\+11\\\hline 13\end{array}$ 13

$O_2DB = 90$

$\frac{2R}{2R-r} = \frac{25}{17}$ $25r = 16R$

$BD^2 = BP \cdot BA$

$17^2 =$

$5^4 + 12^4 \geq 13^4$ $\left(\frac{5}{12}\right)^4 + 1 \geq \left(\frac{13}{12}\right)^4$

при $u \leq 2$ $\left(\frac{5}{12}\right)^u + 1 \geq \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1$ ✓

при $u > 2$ $\left(\frac{5}{12}\right)^u + 1 \leq \left(\frac{5}{12}\right)^2 + 1$ ✗

$u \leq 2$ $\log_{12} t \leq 2$

$\begin{cases} x^2 + 18x > 0 \\ x^2 + 18x \leq 144 \end{cases}$ $x(x+18) > 0$

$D = 18^2 + 4\cdot144 = 324 + 576 =$

$\begin{array}{r}18\\\times18\\\hline144\\18\\\hline324\end{array}$

$\begin{array}{r}144\\\times4\\\hline576\end{array}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики) при одном значении x с $f(x)=5$ ~~есть~~ нет таких y, что $f(y)>5$, поэтому число требуемых пар равно

$11\cdot 13+7\cdot 6+2\cdot 4+1\cdot 3+2\cdot 1=198$

Ответ: 198

№ 6

$$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17 \qquad x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right]$$

$f(x)=\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le -8x^2-30x-17$ при $x=-\frac{11}{4}$:

$b+a\left(-\frac{11}{4}\right)\le -8\left(-\frac{11}{4}\right)^2-30\left(-\frac{11}{4}\right)-17=5$

при $x=-\frac{5}{4}$: $a\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+b\ge\frac{12\left(-\frac{5}{4}\right)+11}{4\left(-\frac{5}{4}\right)+3}=2$

при $x=-\frac{3}{4}$: $a\left(-\frac{3}{4}\right)+b\le -8\left(-\frac{3}{4}\right)^2-30\left(-\frac{3}{4}\right)-17=1$

почему можем подставить $-\frac{3}{4}$, т.к. ф-ия $ax+b$ и $-8x^2-30x-17$ непрерывны, $ax+b\le -8x^2-30x-17$ при $x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$, поэтому нер-во выполнено и для x предела слева в т. $-\frac{3}{4}$ эти пределы совпадают со значениями т. $-\frac{3}{4}$

$$\begin{cases}-11a+4b\le 20\\-5a+4b\ge 8\\-3a+4b\le 4\end{cases}$$

$8\le -5a+4b=\frac{3}{4}(-3a+4b)+\frac{1}{4}(-11a+4b)\le\frac{3}{4}\cdot 4+\frac{1}{4}\cdot 20=8$

$8=8$ верно

$$\begin{cases}-11a+4b=20\\-5a+4b=8\\-3a+4b=4\end{cases}\qquad a=-2,\quad b=-\frac{1}{2},\quad ax+b=-2x-\frac{1}{2}$$

осталось проверить, что эта прямая подходит

$\frac{12x+11}{4x+3}\le -2x-\frac{1}{2}$ $\quad x\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$ $\quad 12x+11\ge -8x^2-8x-\frac{3}{2}$

$8x^2+20x+\frac{25}{2}\ge 0$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x \sin y$

$\sin((2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin((2\alpha+2\beta)-2\beta) = -\frac{4}{5}$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta +$

$+\sin(2\alpha+2\beta)\cos\beta - \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad 2\alpha+2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9$

$(x-2)^2+(3y-3)^2 = 25$ – окр-ть

$xy-x-2y+2 = x(y-1)-2(y-1) = (x-2)(y-1)$

$\cancel{x-2y}$

$x^2-4xy+4y^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$ очевидно

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=25 \end{cases}$$

85
285
425
85
6375

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

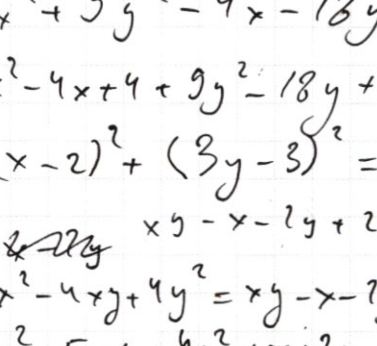
$\cancel{\log_{12}}\ 5^{\log_{12}(x^2+18x)} - |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq -x^2-18x \qquad t = x^2+18x$

$x^2+8x^{\log_{12}5} - |x^2+18x|^{\log_{12}13} \geq -x^2-18x \qquad 5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$|x+\frac{2}{5}|$

$\cancel{5}^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}13} = 13^{\log_{12}t}$



r, R – ?

$\angle AFE$ – ?

$S_{\triangle AEF}$ – ?

$BD^2 = BK\cdot BA$

$17^2 = BK\cdot 2R$

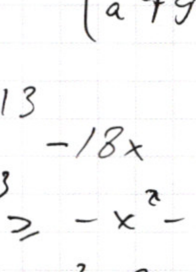
$R = \frac{25}{16}r$

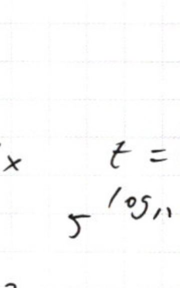
$\frac{12x+11}{4x+3} \leq ax+b \leq -8x^2-30x-17$

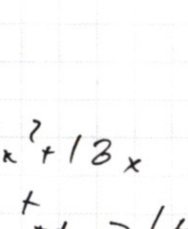
$17^2 = \frac{50}{16}r\left(\frac{50}{16}r-2R\right) = \frac{25}{64}r^2$

$17 = \frac{15}{8}r \quad r = \frac{136}{15} \quad R = \frac{85}{6}$

$t = \log$







$\angle AFE\ \alpha$

$S_{AO_1E} = \frac12 AO_1 O_1E\sin AO_1E = \frac{R^2}{2}\sin 2\alpha$

$\sin BO_1E = \frac{BQ}{BO_1}$ $\quad \sin 2\alpha = \frac{25}{2}\cdot\frac{6}{85} = \frac{15}{17}$

$S_{A\cancel{F}E} = R^2\frac{15}{16} = 2S_{AO_1E} = \frac{R^2\cdot 15}{2\cdot 17}$

$\frac{85}{6}\cdot\frac{15}{16} =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$16x^2+40x+25 \geq 0$

$(4x+5)^2 \geq 0$ – верно

$-2x-\frac{1}{2} \leq -8x^2-30x-17$

$x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$8x^2+8x+\frac{33}{2} \leq 0$

$16x^2+56x+33 \leq 0$

$(4x+11)(4x+3) \leq 0$

$\left(x+\frac{11}{4}\right)\left(x+\frac{3}{4}\right) \leq 0 \qquad x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right]$

т.е. при $x \in \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$, $-2x-\frac{1}{2} \leq -8x^2-30x-17$ – верно

Ответ: $a=-2$

$b=-\frac{1}{2}$

№7

Пусть сфера с центром $(0;0;0)$ и радиусом r.

Пусть a, b, c, d – радус-векторы точек A, B, C, D.

Т.к. A и середины ребер, кроме AD лежат на сфере, то $|a| = r$

$\left|\frac{a+b}{2}\right| = r \quad \left|\frac{a+c}{2}\right| = r \quad \left|\frac{b+c}{2}\right| = r \quad \left|\frac{b+d}{2}\right| = r \quad \left|\frac{c+d}{2}\right| = r$,

где $|b|$ – длина вектора B по условию $AB=1$

$BD=2 \quad CD=3$, т.е. $|b-a|=1 \quad |c-b|=2 \quad |d-c|=3$,

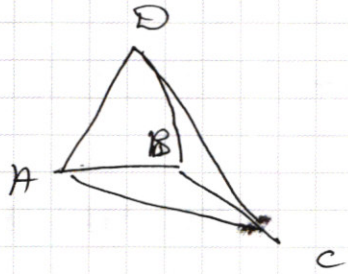
надо найти BC, т.е. $|c-b|$ с учетом $|b|^2=(b,b)$,

где (d,d) – скалярное пр-ие векторов

получим $(a, a) = r^2$

$$\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right) = r^2$$

$$\left(\frac{a+d}{2}, \frac{a+d}{2}\right) = r^2$$



$AB = 1$

$BD = 2$

$CB = 3$

BC – ?

r – ?