МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} & (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} & (2) \end{cases}$$

Из (2):

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$$

$$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{2}{5}$$

$$\cancel{2}\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{\cancel{2}}{5} \to \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$$

Из (1)

$$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$$

1) $\sin 2\beta = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cancel{\sqrt5}} + \frac{2(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)}{\cancel{\sqrt5}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt5}} = -(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha \neq 0$$

при $\cos\alpha = 0$

$1-2\neq 0$.

$$-tg^2\alpha + 3 + 2tg\alpha = 0.$$

$$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$$

$$(tg\alpha-3)(tg\alpha+1) = 0$$

$$tg\alpha = 3 \qquad tg\alpha = -1.$$

2) $\sin 2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \quad \Big| : \cos^2\alpha\neq 0$$

при $\cos\alpha=0$

$3\neq 0$.

$$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0.$$

$$3\left(tg\alpha-\frac{1}{3}\right)(tg\alpha+1) = 0.$$

т.к. по усл. точно есть 3 знач

$$tg\alpha = \frac{1}{3} \qquad tg\alpha = -1$$

Ответ: $3;\ \frac{1}{3};\ -1$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} & (1) \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. & (2) \end{cases}$$

Из (2):

$$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45.$$

$$(x-6)^2+(6y-3)^2=90.$$

$$(x-6)^2+9(2y-1)^2=90.$$

Из (1)

$$x-12y=\sqrt{2y(x-6)-(x-6)}$$

$$x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)}$$

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-6)(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $2y-1=b$ $x-6=a.$ $x-12y=a-6b.$

$$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+9b^2=90 \end{cases} \qquad \begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab & (1) \\ a^2+9b^2=90. \end{cases}$$

* $ab\geq 0.$

(1) $a^2-13ab+36b^2=0$

$D=169b^2-144b^2=25b^2$

$a=\dfrac{13\pm 5b}{2}$

1) $a=\dfrac{13+5b}{2} \to \dfrac{169+130b+25b^2}{4}+9b^2=90.$

$169+130b+25b^2+36b^2=360$

$61b^2+130b-191=0$

$D_1=4225+11651=15876=196\cdot 81.$

$b=\dfrac{-65\pm 126}{61}.$ $\quad b_1=1.$ $\quad b_2=-\dfrac{191}{61}.$

$a_1=9$ $\quad a_2=\dfrac{793-955}{122}=\dfrac{-162}{122}=$

$=-\dfrac{81}{61}.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

№2 (продолжение)

1. $x-6=9$ $\quad 2y-1=1.$ $\quad x=15$ $\quad y=1$

2. $x-6=-\frac{81}{61}$ $\quad 2y-1=-\frac{191}{61}.$ $\quad x=\frac{285}{61}$ $\quad y=-\frac{65}{61}.$

г) $a=\frac{13-5b}{2}$

$61b^2-130b-191=0.$

$b_1=-1 \qquad b_2=\frac{191}{61}$

$a_1=9$ $\quad \varnothing$ по $*$ $\qquad a_2=-\frac{81}{61}.$ $\quad \varnothing$ по $*$ $\quad (ab\geq 0)$

Ответ: $(x=15 \quad y=1)$; $\left(x=\frac{285}{61} \quad y=-\frac{65}{61}\right)$

№3

$10x+|x^2-10x|^{\log_3 4}\geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$ $\qquad *: 10x-x^2>0$

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}\geq(10x-x^2)^{\log_3 5}.$

$10x-x^2=t$

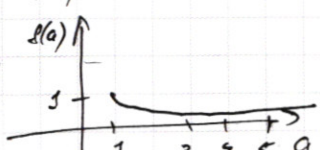
$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}\geq t^{\log_3 5}.$

1) при $t=1$ → выполн $2\geq 1.$

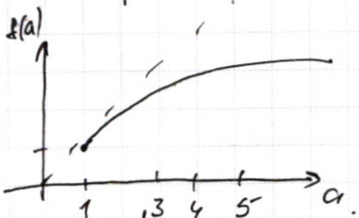
2) при $t=3$ → выполн. $7\geq 5.$

3) ~~При t~~ Пусть $f(a)=t^{\log_3 a}.$ $\quad a\geq 1$

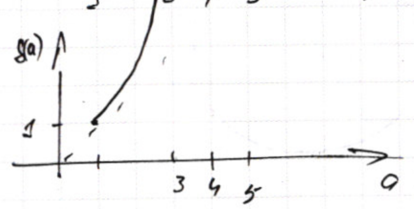
При $t\in(0;1).$:



При $t\in(1;3)$:



При $t\in(3;+\infty).$



→ тогда неравенство принимает вид.

$f(3)+f(4)\geq f(5)$

Выполн. равенство при $t=9$

при $t>9$ скорость возр. ф. увел. → неравенство выполн. не будет $f(3)+f(4)<f(5)$ при $t>9.$

при $t<9$ скорость возр. ф. меньше → неравенство будет выполн. →

~~Выполн~~. Устраивают все знач. $0<t\leq 9.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 2a = 13 \pm 5b \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$$

1) $2a = 13 + 5b$

$$\frac{169 + 130b + 25b^2}{2} + 9b^2 = 90$$

$$a^2 = \sqrt{9(10 - b^2)}$$

$$a = 3\sqrt{10 - b^2}$$

$360 - 169 = 191$

65

$3600 + 600 + 25$

191×61: 191, 1146, 11651

$11651 + 4225 = 15876$

$15876 : 3 = 5292$

$5292 : 3 = 1764$

$1764 : 9 = 196$

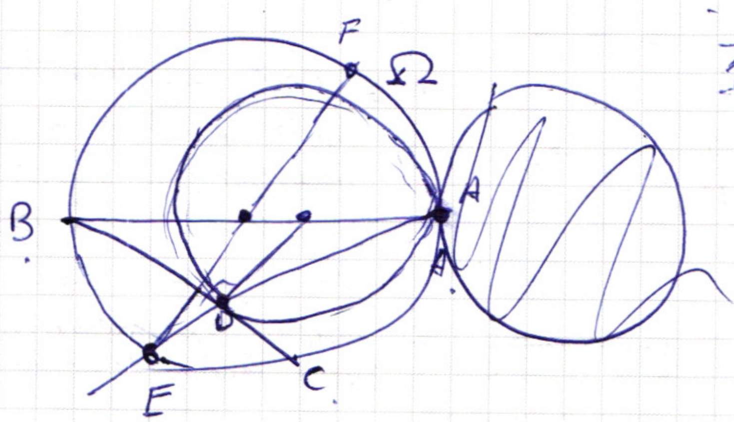
$14 \cdot 9 = 90 + 36 =$

$$\frac{13 - \frac{5 \cdot 191}{61}}{2} =$$

$61 \times 13 = 183 + 61 = 793$

$191 \times 5 = 955$

$955 - 793 = 162$



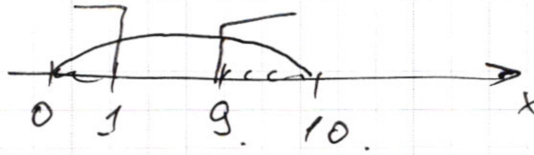
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение)

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ 10x - x^2 \le 9 \end{cases} \to \begin{cases} x^2 - 10x < 0 \\ x^2 - 10x + 9 \ge 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x(x-10) < 0 \\ (x-9)(x-1) \ge 0 \end{cases}$$



$x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$.

№6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36-3$$

Пусть $\frac{16x-16}{4x-5} = h(x)$

$-32x^2+36-3 = f(x)$.

$h(\frac{1}{4}) = 3 \quad h(1) = 0$.

$$h'(x) = \frac{16(4x-5) - 4\cdot 16(x-1)}{(4x-5)^2} < 0$$

$h(x) \downarrow$ на всём пр. $[\frac{1}{4}; 1]$.

$f(\frac{1}{4}) = 4 \quad f(1) = 1$.

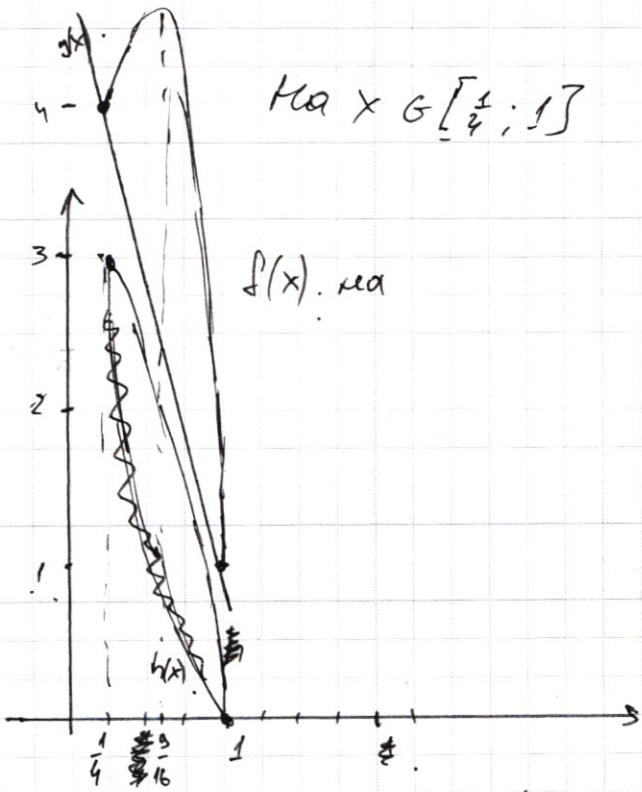
$x_в = \frac{9}{16} \quad y_в = \frac{57}{8}$ парабола ветви вниз.

возр на $x \in [\frac{1}{4}; \frac{9}{16}]$

уб. на $x \in [\frac{9}{16}; 1]$.

$$h''(x) = \frac{8\cdot 16(4x-5)}{(4x-5)^4} < 0.$$

на $[\frac{1}{4}; 1]$.



На $x \in [\frac{1}{4}; 1]$

$f(x)$. на

$ax+b$ - ур-ие прямой $g(x) = ax+b$,

прямая должна проходить.

под $f(x)$ и на $h(x)$.

~~кас. в т.~~ проверим (уш. $g(x) \le f(x)$) пр. через $(1; 1)$ и $(\frac{1}{4}; 4)$

$a = -4 \quad b = 5. \quad g(x) = -4x+5.$

Кас. ли $h(x)$? (общие т. $g(x)$ и $h(x)$.

$$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5.$$

$$-16x+16 = (4x-5)^2$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолжение)

$-16x+16 = 16x^2-40x+25$,

$16x^2-24x+9=0$.

$D_1 = 144-144=0$.

$(4x-3)=0 \quad x=\frac{3}{4}$ – 1 общ. т. с $h(x)$ →

→ $g(x)$ касается $h(x)$ и выполн. усл. $h(x) \le g(x)$

если мы будем рассм. прямые ниже $g(x) = -4x+5$.

то они будут имет участки, которые ниже $h(x)$.

при $x \in [\frac{1}{4}; 1]$, поэтому это единственная

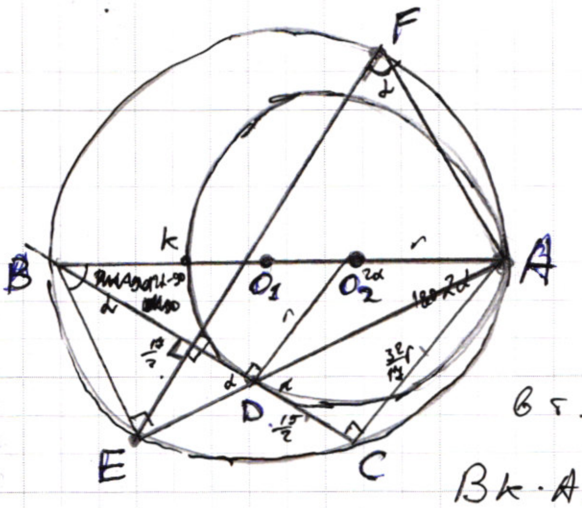
подх. прямая.

Ответ: $a=-4 \quad b=5$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.



Дано: $CD = \frac{15}{2}$ $BD = \frac{17}{2}$

Найти: R, r, $\angle AFE$, S_{AEF}

Пусть рад $\Omega - R$ рад. $\omega - r$.

Пусть $\angle ADC = \alpha$, тогда $\angle DO_2A = 2\alpha$.

O_1 – центр Ω O_2 – центр ω.

$O_1O_2 = R - r$ Пусть $AB \cap \omega$ вторично в т. k; $kO_1 = 2r - R \Rightarrow Bk = 2R - 2r$.

$Bk \cdot AB = BD^2$; т.к. $\angle DO_2A = 2\alpha$

$2(R-r) \cdot 2R = \frac{289}{4}$; $EO_1 \parallel DO_2 \Rightarrow \angle EO_1A = 2\alpha$

$\angle BO_1E = 180 - 2\alpha$

По т. косинусов из $\triangle DO_2A$ и $\triangle BDA$: $\angle DBO_1 = 2\alpha - 90$.

$$DA^2 = 2r^2(1-\cos 2\alpha) = R^2 + \frac{289}{4} - 2 \cdot R \cdot \frac{17}{2} \sin 2\alpha$$

$$2r^2(1-\cos 2\alpha) = R^2 + \frac{289}{4} - 17R \cdot \sin 2\alpha.$$

$\angle BDE = \alpha$ как верт; $\angle BEA = 90°$ т.к. AB – диам $\rightarrow \angle DBE = 90 - \alpha$.

$\angle EBA = 90 - \alpha + 2\alpha - 90 = \alpha \Rightarrow \angle EFA = \angle EBA = \alpha$ как впис. опир. на 1 хорду.

~~$\angle BCA = 90°$ т.к. AB – диам $\rightarrow \angle BAA = 2\alpha$ $AC \perp BC$ $\rightarrow$ $O_2D \perp BC$~~

~~$\rightarrow 2\alpha + 2\alpha = 180°$ как одност. у сек. AO_2~~

~~$\alpha = \frac{180}{4} = 45° \Rightarrow \angle AFE = 45°$, тогда $\triangle DCA$, $\triangle BED$, $\triangle$~~

~~Пусть~~ $\triangle BDO_2 \sim \triangle BCA \Rightarrow \frac{r}{CA} \frac{\frac{17}{2}}{16} \Rightarrow CA = \frac{32}{17} r$
по углам

из $\triangle BCA$

$$\begin{cases} 4R^2 = 256 + \frac{32^2}{289} r^2. \\ 4R^2 - 4Rr = \frac{289}{4}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} R^2 = 64 + \frac{32 \cdot 8}{289} r^2. \\ 16R^2 - 16Rr = 289. \end{cases}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

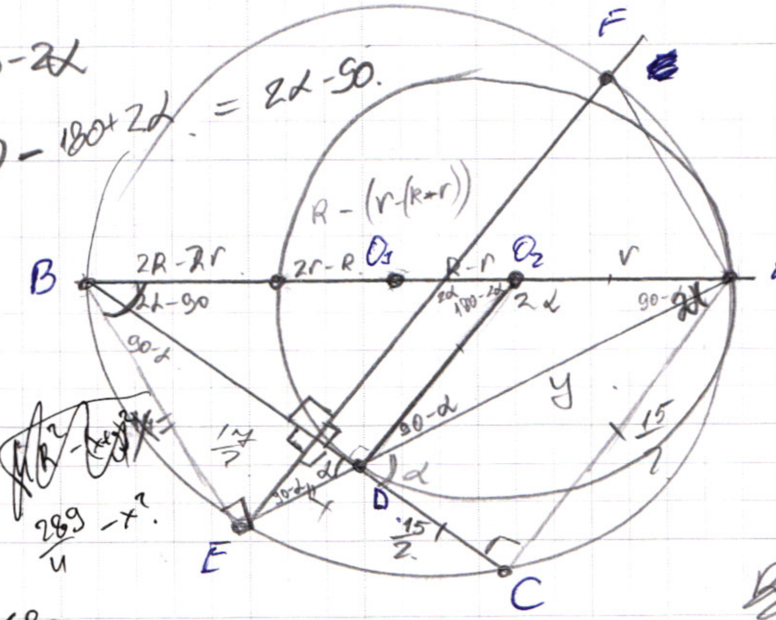
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$180-2\alpha$

$90-180+2\alpha = 2\alpha-90$

$90-180+2\alpha$

$\alpha = \frac{AC+BE}{2}$



$180-90+2\alpha-2\alpha = 9-\alpha$

$2R \cdot (2R-2r)\cdot 2R = \frac{289}{4}$

$\frac{289}{4}-x^2$

$180-\alpha+90-\alpha+2\alpha-90=180$

$180-\alpha$ $\quad R \quad 2R-$

$4624 \,|\, 4 \quad 1156$

$4624 \,|\, 16 \quad 28$

90

$y^2 = 2r^2(1-\cos 2\alpha) = R^2\left(\frac{17}{2}\right)^2 - 2\sin 2\alpha$

$90-\alpha+2\alpha-\cancel{90}+\cancel{90}+x=180$

$\alpha+x=90 \quad x=90-\alpha$

$289 \cdot 16 = 1734 + 289 = 4624$

$\cancel{x^2 = \frac{289}{4} + 4R^2-(x+y)^2 - 2\frac{17}{2}\sqrt{4R^2-(x+y)^2}}$

$x^2-\frac{289}{4} = 4R^2-(x+y)^2$

$D_1 = 64r^2+289\cdot 16 = 4624 = 289\cdot 16 = 16(4r^2+289)$

$xy = \frac{15\cdot 17}{4}$

2α

$1156 \,|\, 4 \quad 289$

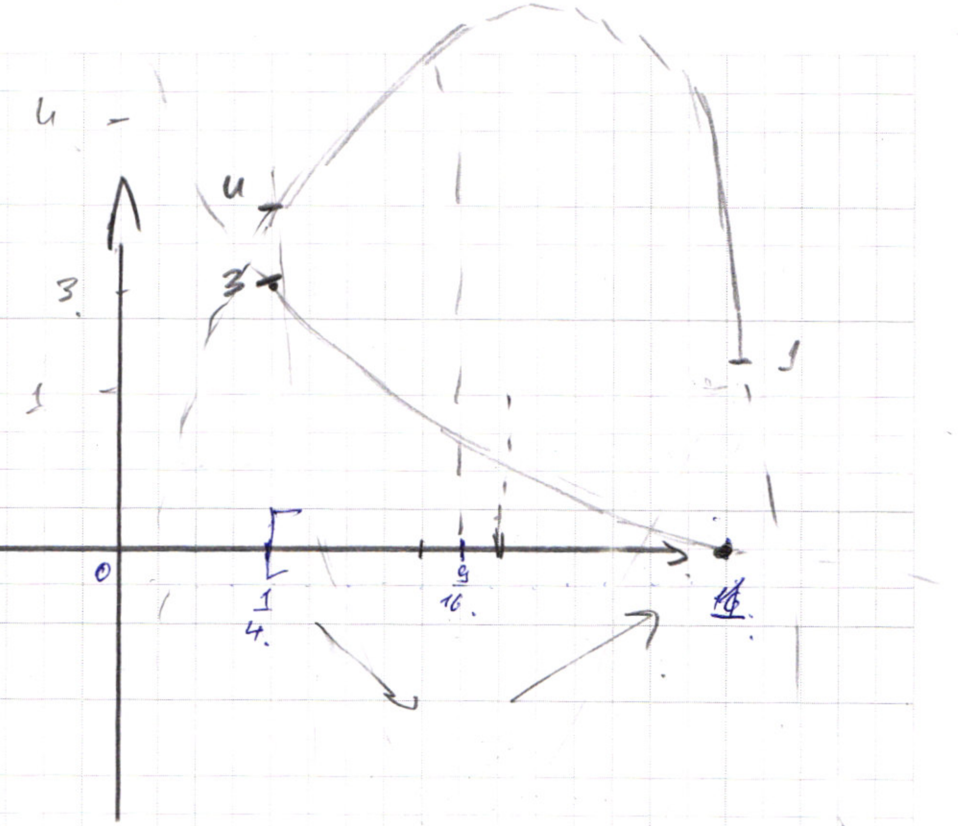
$r = \frac{16R^2-289}{16R} = R-\frac{289}{16R}$

$R = \frac{8 \pm 4\sqrt{4r^2+289}}{16} = \frac{2+\sqrt{4r^2+289}}{4}$

$90-2\alpha+90$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)



$366 - 88$
-285
081

$225 - 45 -$

$\frac{-12}{-4} = 3$

$-\frac{36}{-64} = \frac{9}{16}$

$-32\cdot\frac{81}{16\cdot16} + 36\cdot\frac{9}{16\cdot4} - 3 =$ $\frac{114}{16}$

$1 = a + b$

$4 = \frac{a}{4} + b$

$\frac{3a}{4} = -3$

$a = -4$ $b = 5$

$= -\frac{81}{8} + \frac{81\cdot2}{8} - 3 = \frac{81}{8} - 3 = \frac{81-24}{8} = \frac{61-4}{8} = \frac{57}{8} = \frac{114}{16}$

$65 - 126$

$-32\cdot\frac{1}{16} + 9 - 3 =$

$= -2 + 9 - 3 = 4$

$36 - 3 - 32$

$\cancel{x}y = \frac{191}{61}$

$\left(\frac{191}{61}\right)^2 + \frac{130\cdot191}{61}$

$\frac{\cancel{16\cdot4x} - 5\cdot16 - \cancel{4\cdot16x} + 4\cdot16}{(4x-5)^2} =$

$\frac{191\cdot321}{61} - 191$

$191\,($

$= \left(\frac{-16}{(4x-5)^2}\right)' = + 2(4x-5)\cdot4\cdot16$

$-(4x-5)^2 = 16x - 16$

$16x^2 - 40x + 25 = -16x + 16$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$D_1 = 144 - 144 =$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$.

$10x - (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 5}$.

$\cancel{(10x - x^2) +}$

$t + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$ $\quad f(a) = t^{\log_3 a}$.

$\cancel{t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5}}$

$t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} - t^{\log_3 3} \leq 0$

$t^{\frac{1}{\log_5 3}} - t^{\frac{1}{\log_4 3}}$.

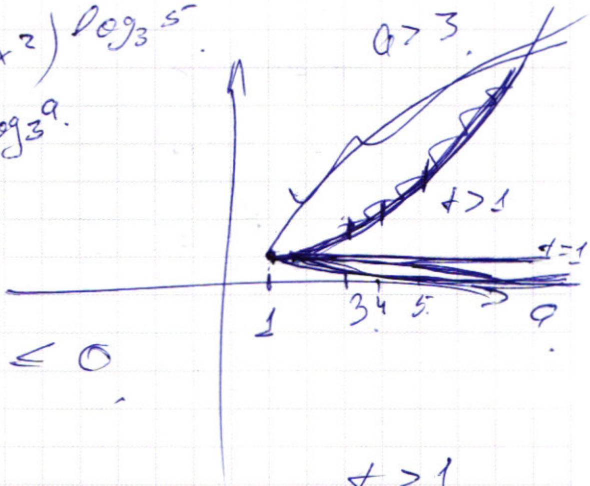
$t \geq 1$

$a^5 + b^5$

$1 + t^{\log_3 4 - 1} \geq t^{\log_3 5 - 1}$.

$1 \geq \frac{t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4}}{t}$

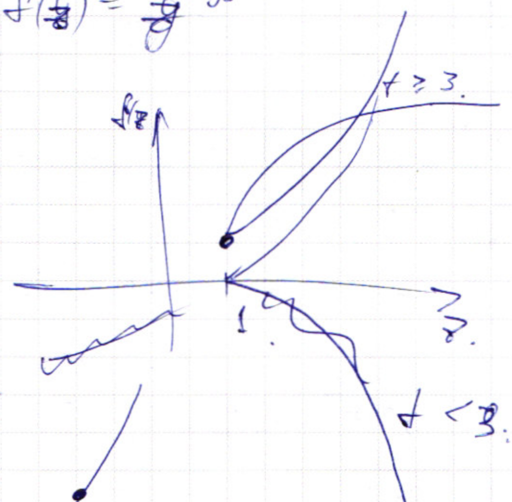
$f(t) = t^{\log_3 t}$.



$3^{\log_3 t} + 4^{\log_3 t} \geq 5^{\log_3 t}$.

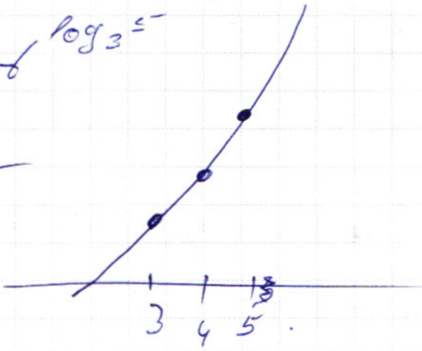
$3^{\log_3 t} + \left(\frac{5+3}{2}\right)^{\log_3 t} \geq 5$

$f(3) + f(4) \geq f(5)$



$t^{\log_3 3} + t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$\cancel{\log_3 4 = \log_3 \frac{3+5}{2}}$



$1 + 4 \geq 5$.

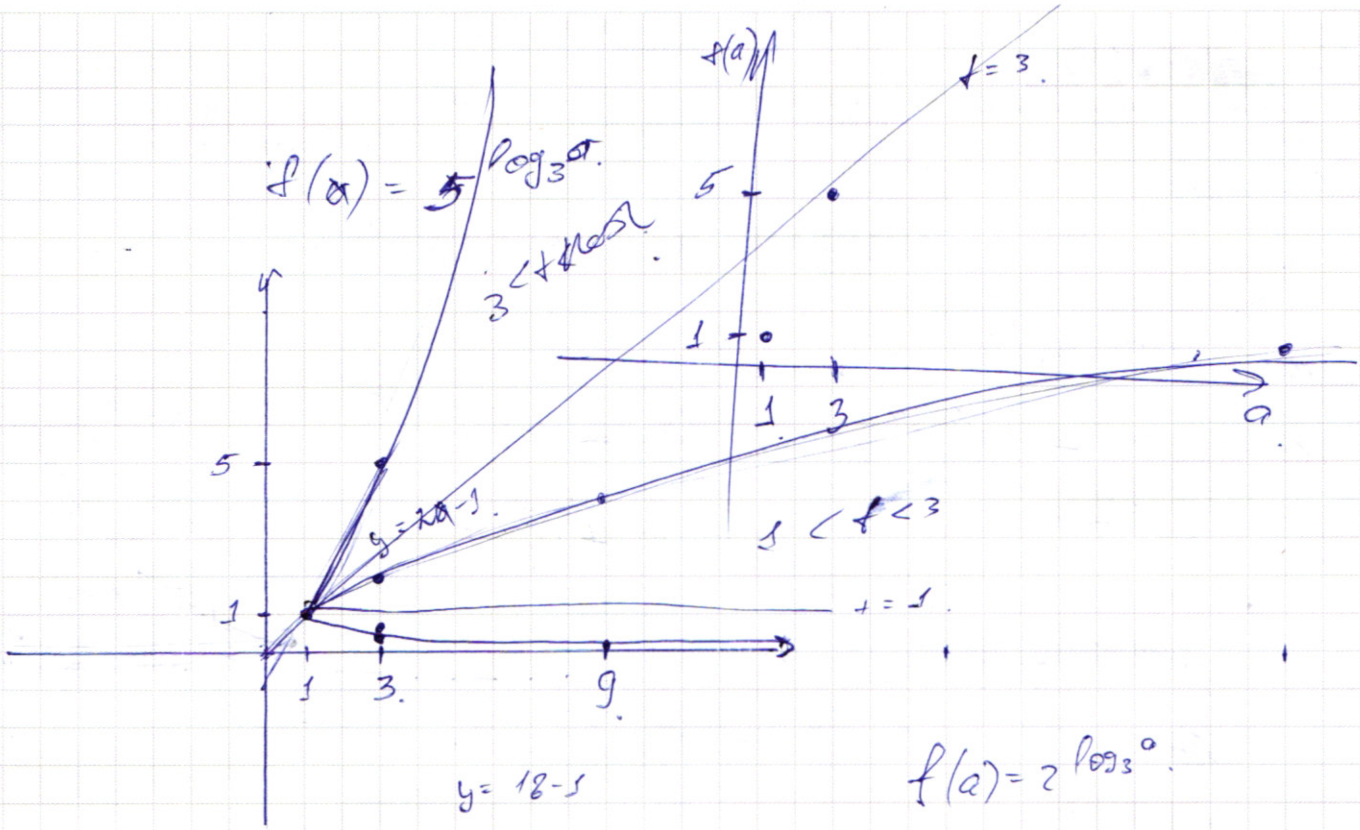
$2^{\log_3 3} + 2^{\log_3 4} \geq 2^{\log_3 5}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$t = 7$

$f(a) = \frac{4}{3}^{\log_3 a}$

$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$\begin{cases} \frac{16(x-1)}{4x-5} \le ax+b \\ ax+b \le -32x^2+36x-3 \end{cases}$

$16x-16 \le 4ax^2-5ax+4bx-5b$

$900+360+36 =$
$= 1156$
-384
772

$32 \cdot 12$: $64 + 32 = 384$

$4ax^2-5ax+4bx-16x-5b+16 \ge 0$

$4ax^2 - x(5a-4b+16)$

$\cancel{ax^2}\ 32x^2 + x(a-36)+b+3 \le 0$

$D = a^2-72a+36^2-128b-32\cdot 12 \ge 0$

$a^2 \cancel{-128b-7} - 72a - 128b + 772 \ge 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = \cancel{2\sin(\alpha+\beta)}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + 2\cos 2\alpha\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$.

$\cancel{2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}}$

$\cancel{2}\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$.

$-\frac{1}{\sqrt{5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$.

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \cancel{\sin 2\beta}$ $\quad \sin 2\beta = \to \frac{2}{\sqrt{5}}$, $\to -\frac{2}{\sqrt{5}}$.

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t+1)(t-3) =$

$= t^2 - 2t - 3$.

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} + \cos 2\alpha \cdot \frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$.

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$.

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 2\sin^2\alpha = -\sin^2\alpha - \cos^2\alpha \quad \Big| : \cos^2\alpha$.

$2tg\alpha + 2 - 2tg^2\alpha = -tg^2\alpha - 1$.

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$(t-3)(t+1) = 0$.

$tg\alpha = 3 \qquad tg\alpha = -1$.

$3t^2 + 2t - 1$

$(3t-1)(t+1) =$

$3t^2 + 2t - 1$

2) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$.

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 2\sin^2\alpha = 0 \quad | : \cos^2\alpha$.

$3tg^2\alpha - 1 + 2tg\alpha = 0$.

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$D_1 = 1 + 3 = 4 \qquad t = \frac{-1 \pm 2}{3} \qquad t_1 = \frac{1}{3} \qquad t_2 = -1$.

№2.

$$x+y=\frac{130}{61}$$
$$xy=-\frac{191}{61}$$

$18y$

$$\begin{cases} 289x^2=64\cdot289+32\cdot8y^2 \\ 16x^2-16xy=289 \end{cases}$$

$x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45$

$R^2=64+32\cdot8=$

$=64+256=320$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=0$ $\quad (6y-3)^2=36y-36y+9$

$x=6 \quad y=\frac{1}{2}$

$\frac{61-191}{61}=-130$

$400+240+36=$

676

$6-6=\sqrt{2\cdot3-6-6+6}$ ✓

$32\cdot8=256$

$$\begin{cases} (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \\ x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6 \end{cases}$$

$\frac{144}{}-\frac{676}{3}$

$16\cdot32-$

$\frac{1}{4}x^2+x+\cancel{\frac{3}{4}x^2}\,1-1+\frac{3}{4}x^2-26xy$

$61\cdot6=366$
$366-81=285$

$\frac{\sqrt3}{2}\cdot k\cdot2=26$

$k=\frac{26}{\sqrt3} \quad k^2=\frac{26^2}{3}$

32^2: $32\cdot32=64+96=1024$

$4\cdot36y^2+12y$

$256+1024=$

$2\cdot6$

$=$

$D_1=64r^2+289\cdot16=16(4r^2+289)$

$\cancel{x^2}-26xy+x+144y^2+12y-6=0$

$1280:25$, 125, 5, 3

$36\cdot3y^2-24xy+\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x^2+x+1-1-2xy$

$\cancel{\sqrt3\cdot\frac{\sqrt3\cdot6}{2}\cdot2}$

$(6\sqrt3y-\frac{\sqrt3}{2}x)^2+(\frac{1}{2}x+1)^2-1-2xy+36y^2+12y+1-1-6=0$

$3(6y-\frac{1}{2}x)^2+(\frac{1}{2}x+1)^2+(6y+1)^2=8+2xy$

$\cancel{10}$

$81^{\log_3 3}+81^{\log_3 4}>81^{\log_3 5}$

$3^4+4^4\geq5^4$

$81+256>625$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$. $p = 3$. $\to \left[\frac{p}{4}\right] = \cancel{1}$. $p = \cancel{5}6 \to \left[\frac{p}{4}\right] = 1$.

$2 \le x \le 25$

$2 \le y \le 25$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$.

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = \left[\frac{x}{4}\right] + \left[\frac{1}{4y}\right] =$

$\cancel{f\left(\frac{x}{y}\right) = \left[\frac{x}{4y}\right] = \left[\frac{x}{4}\right]}$.

$\frac{x}{y} =$

x 24 22 20
y 12 11 10.

$\frac{x}{y} \ne 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 23$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$.

$16x - 16 \le (ax+b)(4x$

$18^2 = 324$

$$\begin{array}{r} 324 \\ -\ 96 \\ \hline 228 \end{array}$$

$3 \cdot 32$

$-32x^2 + 36x - 3 = 0$

$32x^2 - 36x + 3 = 0$

$228 = 2 \cdot 114 = 4 \cdot 57 = 4 \cdot 3 \cdot 19$

$D_1 = 324 - 96 = 228$.

$x = \frac{18 \pm 4\sqrt{3 \cdot 19}}{32}$.

$\left(\frac{16(x-1)}{4x-5}\right)' = 16(4x-5) - 4 \cdot 16(x-1) = 0$

$\cancel{4x} - 5 - \cancel{4x} + 4 = 0$.

-1

$(ax+b)' = a$.

$f(x)' = -64x + 36 = 0$.

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$

$x = -\frac{36}{64} = \frac{9}{16}$

$+ \quad - \quad [>1]$

$\frac{9}{16}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{9}{16}$. 1

$\frac{16x - 16}{4x - 5}$

$\frac{1}{4}$ 1.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2

$x^{2a} - 12y = \sqrt{}$ $\quad a^2 - 6b^2 = ab$

$x^2 - 12x + 36 - 36 + 36y^2 - 36y + 9 - 3 = 45$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90.$

$2y(x-6\cancel{y}) - (x-6) = (2y-1)(x-6)$

$\begin{cases} (x-12y) = \sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ (x-6)^2 + 9(2y-1)^2 = 90 \end{cases}$

$\sqrt{x-6} = a.$

$\sqrt{2y-1} = b.$

$\begin{cases} a - 6b = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$6b^2 = 12y - 6.$

$x - 12y = a^2 - 6b^2.$

$\begin{cases} a^2 - 12ab + 36b^2 = ab. \\ a^2 + 9b^2 = 90. \end{cases}$

$ab = \frac{a^2 + 36b^2}{13}.$

$\cancel{b^2 + \frac{2a^2 + 72b^2}{13}}$

$a^2 + 9b^2 + 27b^2 = 13ab$

$a^2 + 9b^2 = 90.$

$(a+3b)^2 = a^2 + 9b^2 + \frac{6a^2 + 216b^2}{13} + 90.$

$27b^2 - 13ab + 90 = 0.$ ≥ 0

$\cancel{D = 169 - 27}$ $\quad D = 169a^2 - 27 \cdot 4 \cdot 90 \geq 0.$

$a^2 - 13ab + 36b^2 = 0.$

$a^2 \geq \frac{27 \cdot 4 \cdot 90}{169}$

$D = 169b^2 - 144b^2 = 25b^2$

$|a| \geq \frac{2}{13}\sqrt{9 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 10)}$

$a = \frac{13 \pm 5b}{2}.$

$|a| \geq \frac{18}{13}\sqrt{30}.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)