МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Из 2-го равенства по формуле суммы синусов получаем:

$2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=-\frac{2}{5}$; $\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos2\beta=-\frac{1}{5}$;

И, из 1-го равенства, здесь будет $\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos2\beta=-\frac{1}{5}$, тогда $\cos2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$.

Отсюда есть два случая: I $\sin2\beta=-\frac{2}{\sqrt5}$; II $\sin2\beta=\frac{2}{\sqrt5}$.

И ещё перепишем 1-е равенство условие по ~~[illegible]~~ синусу суммы:

$\sin2\alpha\cos2\beta+\cos2\alpha\sin2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$.

I $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right)=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\alpha-2\cos2\alpha=-1$;

$2\sin\alpha\cos\alpha-2(2\cos^2\alpha-1)=-1$; $-4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+3=0$;

При $\cos\alpha=0$ равенство неверно, поэтому делим обе части на $\cos^2\alpha$: $-4+2\operatorname{tg}\alpha+\frac{3}{\cos^2\alpha}=0$; $-4+2\operatorname{tg}\alpha+3(1+\operatorname{tg}^2\alpha)=0$;

$3\operatorname{tg}^2\alpha+2\operatorname{tg}\alpha-1=0$, откуда $\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha=\frac{1}{3}$.

II $\sin2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin2\alpha+2\cos2\alpha=-1$;

$2\sin\alpha\cos\alpha+4\cos^2\alpha-2=-1$; $4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha-1=0$;

Снова всё делим на $\cos^2\alpha$: $4+2\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{\cos^2\alpha}=0$;

$4+2\operatorname{tg}\alpha-1-\operatorname{tg}^2\alpha=0$; $\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}\alpha-3=0$;

здесь $\operatorname{tg}\alpha=-1$ или $\operatorname{tg}\alpha=3$. ИТОГО получили что $\operatorname{tg}\alpha\in\{-1,\frac{1}{3},3\}$. Другого быть не могло, и как раз ровно 3 варианта и получили, как просили в условии.

Ответ: -1; $\frac{1}{3}$; 3.

№2. Из 1-го ур-е есть ограничение: $\boxed{x-12y \geq 0}$. ☆

Если сделать эту оговорку, то дальше просто возведём в квадрат там обе части: $x^2-24xy+144y^2=2xy-12y-x+6$;

$x^2+x\cdot(1-26y)+(144y^2+12y-6)=0$; $D=1-52y+676y^2-$

$-576y^2-48y+24=25(2y-1)^2$; По формуле корней:

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{26y-1+5(2y-1)}{2} \\ x=\frac{26y-1-5(2y-1)}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=\frac{36y-6}{2} \\ x=\frac{16y+4}{2} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2 \end{array}\right.$. Так.

Теперь эти выражения икса через игрек по очереди подст. во 2-е ур-е условие.

$18y-3$: $(18y-3)^2+36y^2-12(18y-3)-36y=45$;

$324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y-45=0$;

$360y^2-360y=0$; $\left[\begin{array}{l} y=0 \\ y=1 \end{array}\right.$ И если здесь $x=18y-3$, то

будут такие пары: $(-3;0)$ и $(15;1)$, из них ограничению ☆ удовл. лишь $\boxed{(15;1)}$

$8y+2$: $(8y+2)^2+36y^2-12(8y+2)-36y-45=0$;

$64y^2+4+32y+36y^2-96y-24-36y-45=0$;

$100y^2-100y-65=0$; $20y^2-20y-13=0$;

$\left[\begin{array}{l} y=0{,}5+\sqrt{0{,}9} \\ y=0{,}5-\sqrt{0{,}9} \end{array}\right.$ Тогда пары: $(6+8\sqrt{0{,}9};\ 0{,}5+\sqrt{0{,}9})$

$(6-8\sqrt{0{,}9};\ 0{,}5-\sqrt{0{,}9})$

Здесь подходит лишь ~~одна~~ вторая пара (по ☆).

Итого две пары.

Ответ: $(15;1)$; $(6-8\sqrt{0{,}9};\ 0{,}5-\sqrt{0{,}9})$.

№3. Из-за логарифма будет одно ограничение: $10x-x^2>0$.

Откуда $\boxed{0<x<10}$. Далее. Если $10x-x^2>0$, то

$|x^2-10x|=10x-x^2$. Перепишем исходное ур-е так:

$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}-5^{\log_3(10x-x^2)} \geq 0$. По одному из

свойств логарифма:

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3 (продолжение).

... $(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$. Далее,

$(10x-x^2)^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5}\geq 0$. По тому же свойству: $3^{\log_3(10x-x^2)}+4^{\log_3(10x-x^2)}-5^{\log_3(10x-x^2)}\geq 0$;

$3^p+4^p\geq 5^p$, где $p=\log_3(10x-x^2)$. Далее, здесь делим обе части на $5^p>0$; $\boxed{\left(\frac{3}{5}\right)^p+\left(\frac{4}{5}\right)^p\geq 1}$. Слева сумма двух убывающих функций, а значит, убывающая функция. Заметим, что т.к. $(10x-x^2)\in(0;25)$ при $0<x<10$, то $p=\log_3(10x-x^2)\in(-\infty;\log_3 25)$.

Заметим, что при $p=2$ в выражении ⊛ будет равенство. Тогда нер-во ⊛ будет выполняться при $-\infty<p\leq 2$, а при $2<p<\log_3 25$ вып-ться не будет (следует из отмеченной ранее монотонности).

$-\infty<p\leq 2 \Rightarrow -\infty<\log_3(10x-x^2)\leq 2 \Rightarrow 0<10x-x^2\leq 9$

(Про ноль говорили в начале самом) $10x-x^2\leq 9$;

$x^2-10x+9\geq 0$; $(x-1)(x-9)\geq 0$; $\left[\begin{array}{l} x\geq 9 \\ x\leq 1\end{array}\right.$ С учётом ограничения в начале будет такой ответ:

Ответ: $(0;1]\cup[9;10)$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

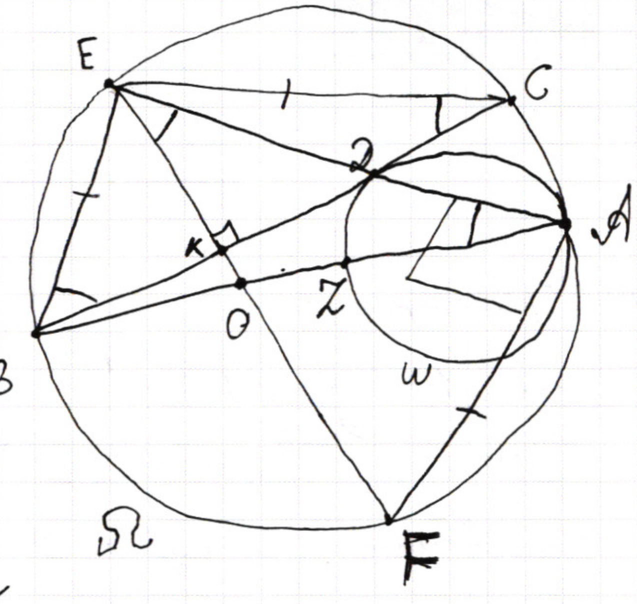
№4. Найти:

R, r (радиусы большой и малой),

$\angle AFE$, S_{AEF}.

$CD = 7{,}5$; $BD = 8{,}5$.

Решение:



из так н-ой леммы Архимеда следует, что точка E — середина дуги $\overset{\frown}{BC}$. отсюда $BE = EC$. А т.к. EF перп.-на BC, то EF — это диаметр большой окружности. Тогда $EF \cap BA = O$ — ~~рад~~ центр большой окружности. Назовём K — середину BC. (Ясно, что $K = EF \cap BC$). Тогда $BK = KC = \frac{BD+DC}{2} = 8$.

Тогда $KD = BD - BK = 8{,}5 - 8 = 0{,}5$.

Далее, $\angle EBC = \angle ECB$, т.к. $\triangle BEC$ — р/б.

$\angle EAO = \angle ECB$ (опир. на одну дугу). Далее, если O — центр, то $\triangle EAO$ — р/б, и $\angle EAO = \angle OEA$.

отсюда $\angle OEA = \angle ECB$. Тогда $tg\angle OEA = tg\angle ECB$,

и $\frac{KD}{EK} = \frac{EK}{KC}$; $EK = \sqrt{KD \cdot KC} = \sqrt{0{,}5 \cdot 8} = 2$.

отсюда $EB = \sqrt{BK^2 + KE^2} = \sqrt{64+4} = 2\sqrt{17}$. Заметим, что $AF = EB = 2\sqrt{17}$ (на них опир. равные углы). Далее,

$\angle FEA = \angle EBC = arctg\frac{EK}{BK} = arctg\frac{2}{8} = arctg\frac{1}{4}$.

Заметим: $\angle EAF = 90°$ (опир. на диаметр). Тогда $\angle EFA = 90° - \angle FEA = 90° - arctg\frac{1}{4} = \boxed{arctg\, 4}$. Далее,

$EA = AF \cdot tg\angle AFE = 2\sqrt{17} \cdot 4 = 8\sqrt{17}$. отсюда

$S_{AEF} = EA \cdot AF \cdot 0{,}5 = 8\sqrt{17} \cdot 2\sqrt{17} \cdot 0{,}5 = \boxed{136}$. Далее,

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4 (продолжение). Пусть второе пересечение AB с ω назовётся Z. Тогда по теор. о квадрате касательной: $BD^2 = BA \cdot BZ$, или $(8,5)^2 = 2R \cdot (2R - 2r)$, или $4R^2 - 4Rr - (8,5)^2 = 0$. Далее, $R = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{(EA)^2 + AF^2}}{2} = \cancel{\ldots}\ 17$. Тогда подставим это в последнее: $4 \cdot 17^2 - 4 \cdot 17 \cdot r - (8,5)^2 = 0$;

$$r = \frac{4 \cdot 17^2 - (8,5)^2}{4 \cdot 17} = 17 - \frac{\left(\frac{17}{2}\right)^2}{4 \cdot 17} = 17 - \frac{289}{4 \cdot 4 \cdot 17} =$$

$$= 17 - \frac{17}{16} = 15\frac{15}{16};$$

Ответ: радиусы: 17 и $15\frac{15}{16}$;

$\angle AFE = \operatorname{arctg} 4$; $S_{AEF} = 136$.

№6. Заметим, что $\frac{16x - 16}{4x - 5} = 4 + \frac{4}{4x - 5} = 4 + \frac{1}{x - 1,25}$.

А у ~~квадр. функции~~ параболы $y = -32x^2 + 36x - 3$ вершина $\left(\frac{9}{16}; \frac{57}{8}\right)$.

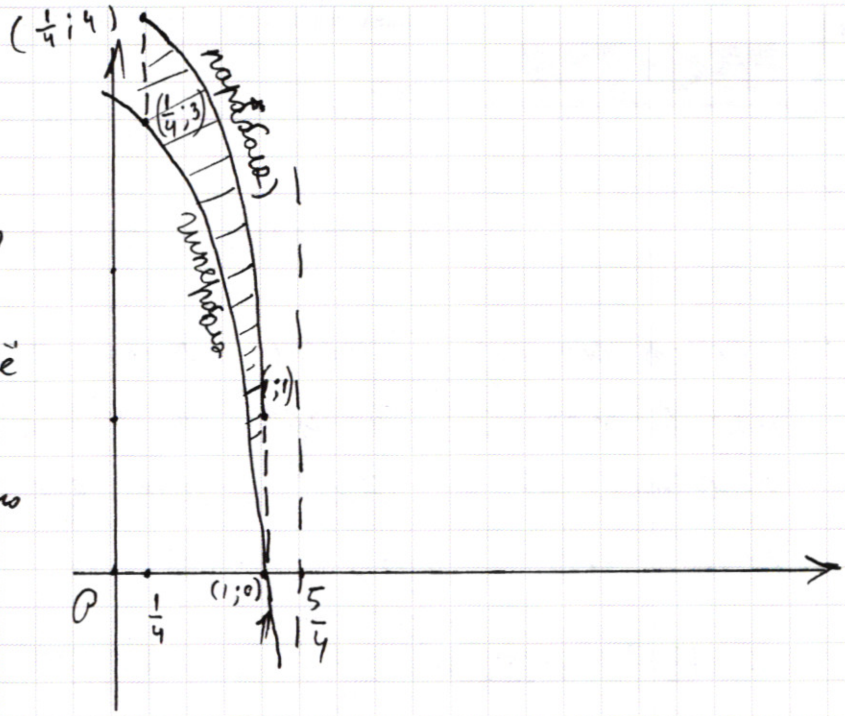
Эта парабола проходит через точки $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$ и $(1; 1)$.

А гипербола $y = 4 + \frac{1}{x - 1,25}$ проходит через точки $\left(\frac{1}{4}; 3\right)$ и $(1; 0)$. Примерно зарисуем это всё:

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6 (продолжение)

(Я немного не так нарисовал параболу, т.к. на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$ находится её вершина, а здесь она якобы монотонно убывает. Но это не влияет).



Заштрихованная фигура – в ней должна будет располагаться прямая ~~y=kx+~~ $y = ax+в$ (точнее, её отрезок при $x \in \left[\frac{1}{4};1\right]$. Возьмём для начала прямую, к-рая проходит через точки $\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $(1;1)$. Её уравнение: $y=-4x+5$. Посмотрим, пересечёт ли она гиперболу? $-4x+5=\frac{16x-16}{4x-5}$;

$$\begin{cases} 16x-16=(5-4x)(4x-5) \\ x \neq 5/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 16x-16=20x-25-16x^2+20x \\ x \neq 1{,}25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 16x^2-24x+9=0 \\ x \neq 5/4 \end{cases} \qquad \begin{cases} (4x-3)^2=0 \\ x \neq 5/4 \end{cases} ; \quad x=\frac{3}{4}.$$

Одно решение – значит прямая $y=-4x+5$ касается гиперболы, т.е. аккурат удовлетворяет исходным условиям. Ясно, что если она точь-в-точь „влезла" между параболой и гиперболой, то она такая в ответе одна.

Ответ: $(-4;5)$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5. Во-первых: т.к. $f(x\cdot 1) = f(x)+f(1) = f(x)$ при любом положит. $x \in R$, то $f(1)=0$.

Далее, легко понять, как можно посчитать для любого натур. числа функцию f: разложить интересующее число на простые множители, для каждого вычислить f, и для каждого простого множителя всё сложить. СЧИТАЕМ:

$f(2) = [2:4] = 0$; $f(3) = 0$; $f(4) = f(2)+f(2) = 0$; $f(5) = 1$; $f(6) = f(2)+f(3) = 0$; $f(7) = 1$; $f(8) = 3f(2) = 0$; $f(9) = 2f(3) = 0$; $f(10) = f(2)+f(5) = 0+1 = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 2f(2)+f(3) = 0$; $f(13) = 3$; $f(14) = f(2)+f(7) = 0+1 = 1$; $f(15) = f(3)+f(5) = 1$; $f(16) = 0$; $f(17) = 4$; $f(18) = 2f(3)+f(2) = 0$; $f(19) = 4$; $f(20) = 2f(2)+f(5) = 1$; $f(21) = f(3)+f(7) = 1$; $f(22) = f(2)+f(11) = 2$; $f(23) = 5$; $f(24) = 3f(2)+f(3) = 0$; $f(25) = 2f(5) = 2$. Сгруппируем все натуральные n в зависимости от значения $f(n)$:

n	2, 3, 4, 6, 8, 9, 12, 16, 18, 24	5, 7, 10, 14, 15, 20, 21	11, 22, 25	13	19, 17	23
значение $f(n)$	0	1	2	3	4	5

№5 (продолж.)

В этих шести группах соответственно

10, 7, 3, 1, 2, 1 чисел.

Заметим далее, что $f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y}) =$

$= f(x) + (f(1) - f(y)) = f(x) - f(y)$. Поэтому

$f(\frac{x}{y}) < 0$, когда $\underline{f(x) < f(y)}$.

~~Пусть для определённости~~ Если x взять

из группы, где $f(n) = 0$, то ~~~~ подойдёт любой y не из этой группы, поэтому

таких игроков здесь $24 - 10 = 14$. Далее, если

брать x из группы, где $f(n) = 1$, то

~~в~~ подойдут y из всех остальных групп, кроме

$f(n) = 0$. Таких игроков $24 - 10 - 7 = 7$;

Вы поняли — если брать x из $f(n) = 2$, то

игроков разных будет $1 + 2 + 1 = 4$, если из

$f(n) = 3$, то $2 + 1 = 3$, и если из $f(n) = 4$, то

1. Заметим, что каждое из пяти обведённых чисел надо домножить на

число элементов в соответствующей группе. И всё сложить.

Ответ:

$14 \cdot 10 + 7 \cdot 7 + 4 \cdot 3 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 2 =$

$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 189 + 17 = 206$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

$(10x - x^2)^{\log_3 3} + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq (10x - x^2)^{\log_3 5}$

$0 < 10x - x^2 \leq 25$

$f(\alpha) = \alpha + \alpha^{\log_3 4} - \alpha^{\log_3 5}$

$f'(\alpha) = 1 + \log_3 4 \cdot \alpha^{\log_3 4 - 1} - \log_3 5 \cdot \alpha^{\log_3 5 - 1}$

$3^p + 4^p \geq 5^p$, где $p = \log_3(10x - x^2)$

$\left(\frac{3}{5}\right)^p + \left(\frac{4}{5}\right)^p \geq 1$

$-\infty < p < \log_3 25$

$-\infty < p < 2$

$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$

$-\infty < \log_3(10x - x^2) \leq 2$

$0 < 10x - x^2 \leq 9$

$x^2 - 10x + 9 \geq 0$

$x = 1 \quad x = 9$

$x \geq 9$

$x \leq 1$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$?

Огр:

$10x - x^2 > 0$

$x(x - 10) < 0$

$0 < x < 10$

$x^{\log_n y} = y^{\log_n x}$?

$\log_n y = \log_x y^{\log_n x}$

$\log_n y = \log_n x \cdot \log_x y$

$\log_n y = \log_n y \cdot 1$

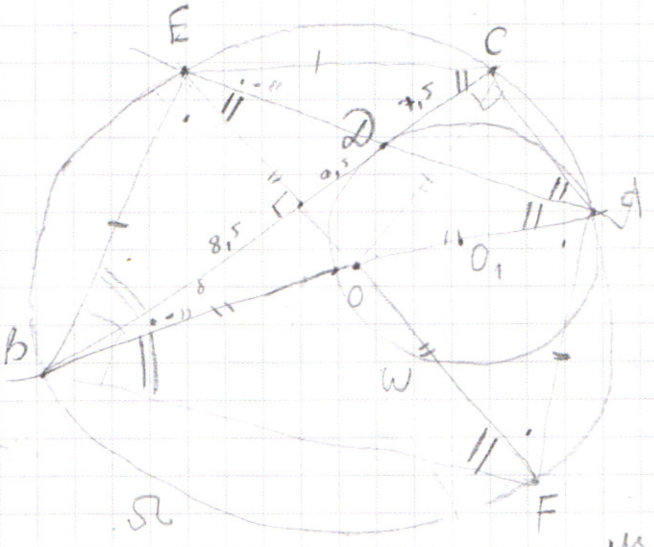
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№4.



Найти:

r, R

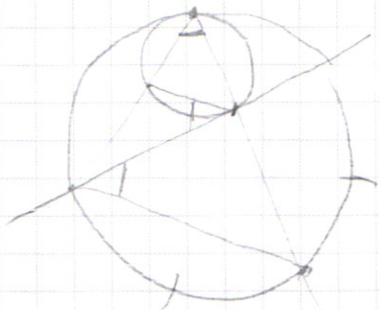
$\angle AFE$

$S_{\triangle AEF}$

$CD = 4,5$

$BD = 8,5$

Лемма Архим.:



из BEC:

$tg(1) = \frac{0,5}{вкс} = \frac{вкс}{8}$

$вкс = 2$

$\overset{\smile}{BE} = \overset{\smile}{EC}$

EF – диам.

$(8+0,5)^2 = 64 + 0,25 + 8 = 72,25$

Из теор. о квадр. кас-ной:

$BD^2 = AB \cdot (вн.\ части)$; $(8,5)^2 = 2R \cdot 2(R-r)$;

$4R^2 - 4Rr - 72,25 = 0$

$(2R - r)$

$D = 16r^2 + 16 \cdot 72,25 = 16r^2 + 1156 =$

$4R^2 - 4Rr - (8,5)^2 = 0$

$R = \frac{4r \pm \sqrt{16r^2 + 1156}}{8}$

$\times \begin{array}{r} 72,25 \\ 16 \\ \hline 43350 \\ 7225 \\ \hline 1156,00 \end{array}$

$f(x/y) =$

$= f(x) + f(\frac{1}{y}) =$

$= f(x) + f(1) - f(y) =$

$= f(x) - f(y)$

$\frac{16 \cdot 17}{2} =$

$= 8 \cdot 17 = 136$

$y - 0,5 = \sqrt{0,9}$

$y = 0,1$

$(y-0,5)^2 =$

$= \frac{18}{20} = 0,9$

$y^2 - y - \frac{13}{20} = 0$ $\quad (y-0,5)^2 - \frac{1}{4} - \frac{13}{20} = 0$

$D = 400 + 80 \cdot 13 =$

$400 + 1040 = 1440 = 12 \cdot 12 \cdot 10$

Как найти f

разлож. f напрямик;

для каждого прост. сомн.

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1. $tg\alpha$ - ? (не менее 3)

$\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$\cancel{2}\overbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}^{-\frac{1}{\sqrt5}}\cos 2\beta = -\frac{1}{5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

№2. $\begin{cases} x^2-24xy+144y^2 = 2xy-12y-x+6 \\ x^2-12x+(36y^2-36y-45)=0 \end{cases}$

$\downarrow$

$(x-6)^2-36+36y^2-36y-45=0$

$(x-6)^2 \cancel{+} 36y^2-36y-81=0$; $(x-6)^2+(6y-9)^2$

$(x-6)^2+36\left(y^2-y-\left(\frac{9}{6}\right)^2\right)=0$

$(x-6)^2+36\left(\left(y-\frac{1}{2}\right)^2\right.$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \left(\pm\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№1. $\sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

I $\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$ $\qquad tg\alpha - ?$

$\cancel{\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}}$

$tg\frac{x}{2} = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$2\sin\alpha\cos\alpha + 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 1 = 0$ $\qquad |:\cos^2\alpha$ (он $\neq 0$)

$4 + 2tg\alpha - \frac{1}{\cos^2\alpha} = 0$ $\qquad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$4 + 2tg\alpha - 1 - tg^2\alpha = 0$

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0;$ $\qquad tg\alpha = -1$, $tg\alpha = 3$

Ug - 1-20:

$x_{1,2} = \frac{26y-1 \pm 5(2y-1)}{2}$

$x_1 = \frac{36y-6}{2} = 18y-3$

$x_2 = \frac{16y+4}{2} = 8y+2$

II $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha - 2(2\cos^2\alpha - 1) = -1$

$-4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha + 3 = 0$

$-4 + 2tg\alpha + \frac{3}{\cos^2\alpha} = 0$

$-4 + 2tg\alpha + 3 + 3tg^2\alpha = 0;$ $\qquad 3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$tg\alpha = -1$

$tg\alpha = \frac{1}{3}$

$\boxed{\text{Ответ: } -1;\ \frac{1}{3};\ 3.}$

$(20+6)^2 = 400+36+240 = 676$

№2. $x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6;$

$x^2 + x\cdot(1-26y) + (144y^2 + 12y - 6) = 0$

$D = 1 - 52y + 676y^2 - 576y^2 - 48y + 24 = 100y^2 - 100y + 25 = 25(4y^2 - 4y + 1) = 25(2y-1)^2$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$y = \frac{16x-16}{4x-5} = 4 + \frac{4}{4x-5} = 4 + \frac{1}{x-1,25}$$

$$y = -32x^2 + 36x - 3 =$$

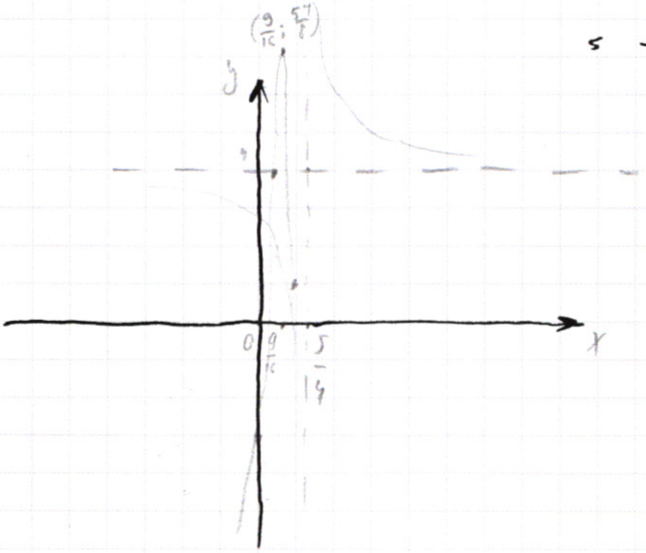
$$x_0 = \frac{-36}{-64} = \frac{9}{16} \qquad y_0 = -3 + \frac{36^2}{4\cdot 32} =$$

$$= -3 + \frac{9\cdot 36}{32} = -3 + \frac{9\cdot 9}{8} =$$

$$= \frac{81}{8\cancel{0}} - 3 =$$

$$= \frac{81-24\cancel{0}}{8\cancel{0}} =$$

$$= -\frac{159}{80}$$

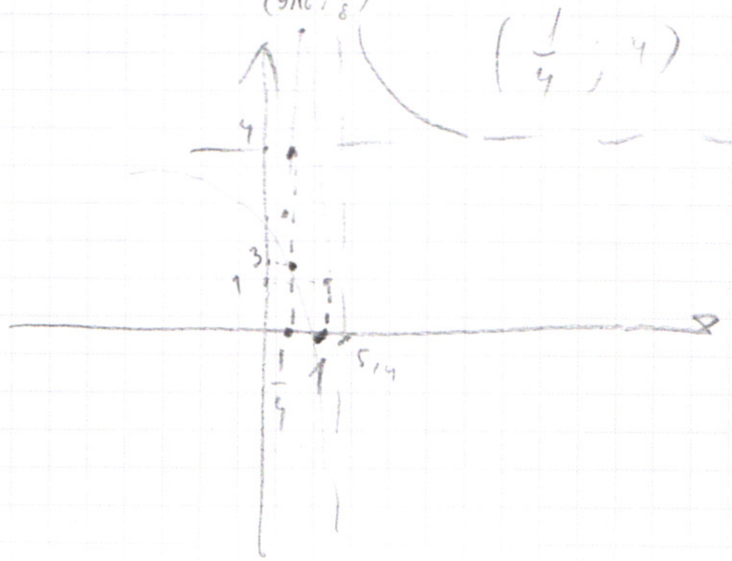


$$\frac{18}{16} = \frac{9}{8} -$$

– узла корней $\frac{57}{8} = 7\frac{1}{8}$

$$-32\cdot\frac{1}{16} + 36\cdot\frac{1}{4} - 3 = -2 + 9 - 3 = 4$$

$\left(\frac{1}{4}; 4\right)$



$y_{min}\left(\frac{1}{4}\right) =$

$= 3$

$\left(\frac{1}{4}; 3\right)$

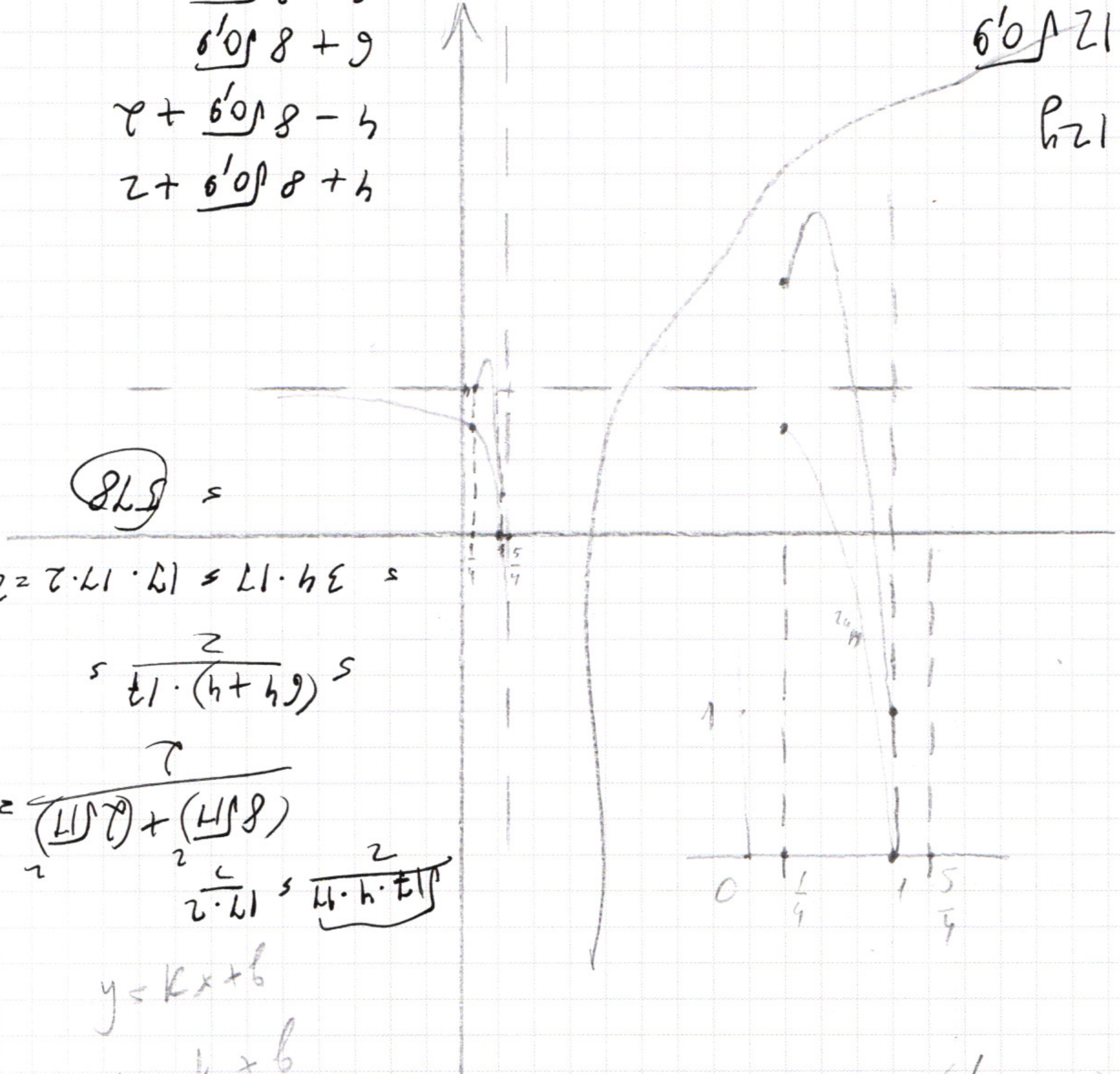
$(1; 0)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$y = kx + b$

$1 = k + b$

$4 = \frac{k}{4} + b$

$3 = -\frac{3}{4}k \; ; \quad k = -4$

$y = -4x + 5$

$b = 5$

$(1;1) \quad (\frac{1}{4};4)$

$\frac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$

$16x - 16 = (4x-5)(5-4x)$

$16x - 16 = 20x - 16x^2 - 25 + 20x$

$16x - 16 = -16x^2 + 40x - 25$

$16x^2 - 24x + 9 = 0$

$(4x-3)^2 = 0$

$x = \frac{3}{4}$

Ответ: $a = -4$
$b = 5$