МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5.

$f(a)+f(b)=f(ab)$

$f(a)=f(1)+f(a) \Rightarrow f(1)=0.$

$f(1)=0$ (1)

$f(2)=\left[\frac{2}{4}\right]=0$ (2)

$f(3)=\left[\frac{3}{4}\right]=0$ (3)

$f(4)=f(2)+f(2)=0$ (4)

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=1$ (1)

$f(6)=f(2)+f(3)=0$ (5)

$f(7)=\left[\frac{7}{4}\right]=1$ (2)

$f(8)=f(4)+f(2)=0$ (6)

$f(9)=f(3)+f(3)=0$ (7)

$f(10)=f(2)+f(5)=1$ (3)

$f(11)=\left[\frac{11}{4}\right]=2$ (1)

$f(12)=f(4)+f(3)=0$ (8)

$f(13)=\left[\frac{13}{4}\right]=3$ (1)

$f(14)=f(7)+f(2)=1$ (4)

$f(15)=f(3)+f(5)=1$ (5)

$f(16)=f(8)+f(2)=0$ (9)

$f(17)=\left[\frac{17}{4}\right]=4$ (1)

$f(18)=f(2)+f(9)=0$ (10)

$f(19)=\left[\frac{19}{4}\right]=4$ (2)

$f(20)=f(5)+f(4)=1$ (6)

$f(21)=f(3)+f(7)=1$ (7)

$f(22)=f(11)+f(2)=2$ (2)

$f(23)=\left[\frac{23}{4}\right]=5.$ (1)

$f(24)=f(3)+f(8)=0.$ (11)

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$ тк $f(1)=0 \Rightarrow$

$-f(y)=f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=\underline{f(x)-f(y)}<0$

1) $f(x)\geq 0$ при $x\in[1;24]$

$f(x)=0$ | 11 x дают это значение

$f(x)=1$ | 7 x дают это значение

$f(x)=2$ | 2 x дают это значение

$f(x)=3$ | 1 x даёт это значение

$f(x)=4$ | 2 x даёт это значение

$f(x)=5.$ | 1 x даёт это значение

$11+7+2+1+2+1=$

$=24$ (все значения посчитаны)

$\Rightarrow$

$f(x)-f(y)<0 \Leftrightarrow f(x)<f(y) \Rightarrow$

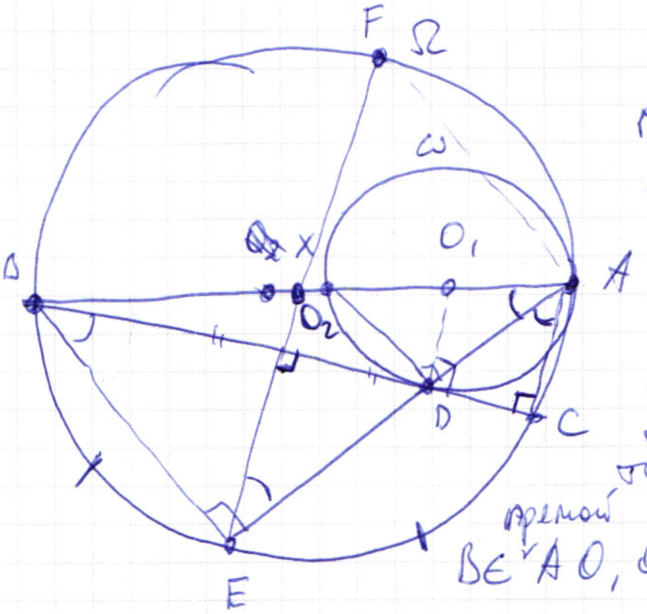
$11\cdot(7+2+1+2+1)+7\cdot(2+1+2+1)+2\cdot(1+2+1)+$
$+1\cdot(2+1)+2\cdot 1=11\cdot 13+7\cdot 6+2\cdot 4+1\cdot 3+2=143+42+8+5=$
$=198$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Ответ: 198 пар $(x;y)$

№4



$CD = 8$ $BD = 17$

r - ?; R - ? $\angle AFE$ - ? S_{AEF} - ?

пусть O_1, O_2 - центры ω и Ω соответственно

1) $O_1 O_2 A$ лежат на одной прямой т.к. A точка касания ω и Ω а O_1 центр ω, а O_2 центр Ω тогда AO_1O_2 - диаметр =>

BE прямой AO_1O_2

тогда пусть X точка пересечения AB и ω тогда AX - диаметр ω тогда $\angle XDA = \angle BEA = 90° = \angle BCA$.

$\angle AXD = \angle ADC = \angle BDE$ тогда

$\angle EBD = 180° - 90° - \angle BDE = 180° - 90° - \angle ADC = \angle DAC$

$= 180° - 90° - \angle DXA = \angle XAD$ =>

$\angle BAD = \angle DAC$ => $\smile BE = \smile EC$

~~$\Delta DCA = \Delta DAX$ (по 2 углам) ($\angle ADC$, $\angle DAC$ и стороне AD)~~

$\deg B$ отн ω $= BD^2 = BX \cdot BA = (2R - 2r) \cdot 2R$

2) $O_1D \perp BC$, $AC \perp BC$ => $O_1D \parallel AC$ =>

$\frac{BO_1}{O_1A} = \frac{BD}{DC}$ $\frac{BD}{DC} = \frac{2R - r}{r}$ => $17r = 8(2R - r)$ =>

$\frac{25}{16} r = R$ тогда =>

$17^2 = \left(\frac{25}{8} - 2\right) r \cdot \frac{25}{8} r = \frac{9 \cdot 25}{8^2} r^2$ => $r = \frac{17 \cdot 8}{3 \cdot 5} = 9\frac{1}{15}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда $R = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{16}2} \cdot \frac{17 \cdot \cancel{8}}{3 \cdot \cancel{8}} = \frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$.

$\angle AFE = \angle ABE$

$XD \parallel BE$ тк $XD \perp AE$ и $BE \perp AE \Rightarrow$

$\frac{AX}{XB} = \frac{AD}{DE}$ степ. точ D отн $\Omega = -BD \cdot PC$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -ED \cdot DA \Rightarrow$

$ED \cdot DA = BD \cdot DC$
$\qquad\qquad\quad 17 \quad 8$

$AX \cdot DE = AD \cdot XB \Rightarrow ED = \frac{XB}{AX} \cdot AD \Rightarrow$

$AD^2 \cdot \frac{XB}{AX} = BD \cdot DC$ $\qquad XB = 2R - 2r$
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad AX = 2r$

$AD = \sqrt{\frac{BD \cdot PC \cdot AX}{XB}} = \sqrt{\frac{17 \cdot 8 \cdot 136 \cdot 2 \cdot \cancel{15}}{\cancel{15} \cdot \cancel{153} \cdot 8}} = \frac{8}{3}\sqrt{34}$ $\quad 2\frac{2}{3}$

$ED = \frac{\cancel{15} \cdot \cancel{153}^{9}}{\cancel{136}_{8} \cdot 2 \cdot \cancel{15}} \cdot AD = \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{3}\sqrt{34} = \boxed{2\sqrt{34}}$

$\angle EBA = \arcsin \frac{\frac{14}{3}\sqrt{34}}{85} = \arcsin \frac{14}{85}\sqrt{34}$

$S_{AFE} = \sin\angle FEA \cdot \frac{1}{2} \cdot EA \cdot EF$

$\sin\angle FEA = \sin\angle EBC = \angle BAE \Rightarrow \sin\angle FEA = \sin\angle BAE = \sqrt{1 - \frac{AD^2}{AX^2}}$
сопрне

$EF = AD$ тк 1) $EB = EC$ 2) $EF \perp BC \Rightarrow$ проходит через середину BC и $\perp BC \Rightarrow$ проходит через $O_2 \Rightarrow EF$ — диаметр $\Rightarrow$

$$S_{AFE} = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{\frac{\cancel{8^2}}{\cancel{3^2}} \cdot 34 \cdot \cancel{2}}{2^2 \cdot \frac{17^2 \cdot 8^2}{3^2 \cdot 5^2}}} \cdot \frac{14}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{17 \cdot 5}{\cancel{2} \cdot 3} \cdot \cancel{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{1 - \frac{25}{34}} \cdot \frac{\overset{7}{\cancel{14}}}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{17 \cdot 5}{3} = \sqrt{\frac{9}{34}} \cdot \frac{7}{3}\sqrt{34} \cdot \frac{17 \cdot 5}{3} =$$

$$= \frac{7 \cdot 17 \cdot 5}{3} = \frac{35 \cdot 17}{3} = \frac{595}{3} = 200 - \frac{5}{3} = 198 + \frac{1}{3}$$

Ответ: $r = 9\frac{1}{15}$, $R = 14\frac{1}{6}$, $\angle AFE = \arcsin\frac{14}{85}\sqrt{34}$,

$S_{AFE} = 198\frac{1}{3}$.

№3.

$$5^{\log_{12}(x^2+8x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

1) $5^{\log_{12}(x^2+8x)} \Rightarrow \log_{12}(x^2+8x) \Rightarrow x^2+8x>0$

перепишем условие с учётом этого. и заменим $x^2+8x = t. > 0$

$$5^{\log_{12} t} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0.$$

Воспользуемся свойством логарифма $a^{\log_b c} = c^{\log_b a} \Rightarrow$

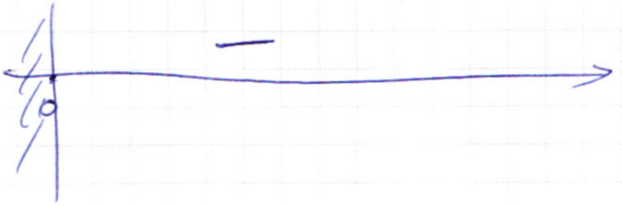
$$t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0 \quad \text{т.к. } t>0 \quad |:t. \Rightarrow$$

$$f(t) = t^{\log_{12}5 - 1} + 1 - t^{\log_{12}13 - 1} \geq 0.$$

$$f'(t) = \underbrace{(\log_{12}5 - 1)}_{<0} t^{\log_{12}5 - 2} - \underbrace{(\log_{12}13 - 1)}_{>0} t^{\log_{12}13 - 2}$$

$\log_{12}5 < 1 \Rightarrow \log_{12}5 - 1 < 0$. $\log_{12}13 > \log_{12}12 = 1 \Rightarrow \log_{12}13 > 0. \Rightarrow$

при всех $t>0$ $f'(t)<0 \Rightarrow$



$\Rightarrow$ максимум 1 решение у $f(t)$ т.к. $f'(t)$ строго убывает при $t>0 \Rightarrow$ $f(t)$ строго убывает

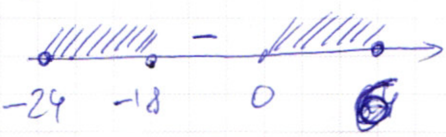
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(144) = 0 = \left(12^{\log_{12} 5}\right)^2 + 12^2 - \left(12^{\log_{12} 13}\right)^2 =$

$= 5^2 + 12^2 - 13^2 = 169 - 169 = 0 \Rightarrow$

при всех $t \le 144$ есть решения вернем t

$$\begin{cases} 0 < x^{\cancel{2}}(x+18) \\ x\cancel{t}(x+18) \le 144 \end{cases}$$



$x(x+18) \le 144$ $\Rightarrow$

$0 < x(x+18)$

$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$.

Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$.

№1

$$\begin{cases} \sin 2\alpha+2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}, (1) \\ \sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}, (2) \end{cases}$$

Воспользуемся формулой $\sin x \cos y = \frac{\sin(x-y) + \sin(x+y)}{2}$ к (2). получим

$x+y = 2\alpha + 4\beta \Rightarrow x = 2\alpha + 2\beta$
$x - y = 2\alpha \qquad y = 2\beta$.

$\Rightarrow (2) \Rightarrow 2\sin 2\alpha+2\beta \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ (3)

подставим (1) в (3)

$-\frac{1}{\sqrt{5}} 2\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{\sqrt{5}}{5}$.

1) ~~sin2β =~~

тогда распишем по формуле $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$ (1)

~~sin2α~~

$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (4)

по формуле $\sin 2x = \frac{2tgx}{1+tg^2x}$, $\cos 2x = \frac{1-tg^2x}{1+tg^2x}$ подставим в (4)

получим

~~$1+tg^2\alpha$~~

$\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}\cos 2\beta + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (5) $\Big|$ тк $1+tg^2\alpha \geq 1$ - $\cdot\,|\,1+tg^2\alpha$.

$2tg\alpha\cos 2\beta + (1-tg^2\alpha)\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}(1+tg^2\alpha)$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}}$. тогда

$2tg\alpha\cdot\frac{2\sqrt{5}}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}tg^2\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{5}} - \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}tg^2\alpha} \Rightarrow$

$tg\alpha\cdot\frac{4\sqrt{5}}{5} = -\frac{2}{\sqrt{5}} \Rightarrow$

$tg\alpha = -\frac{1}{2}$.

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$, тогда

$\frac{4}{\sqrt{5}}tg\alpha - \cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}} + \frac{1}{\sqrt{5}}tg^2\alpha = -\cancel{\frac{1}{\sqrt{5}}} - \frac{1}{\sqrt{5}}tg^2\alpha$;

$\frac{2}{\sqrt{5}}tg^2\alpha + \frac{4}{\sqrt{5}}tg\alpha = 0 \Rightarrow$

$\frac{2}{\sqrt{5}}tg\alpha(tg\alpha + 2) = 0 \Rightarrow$

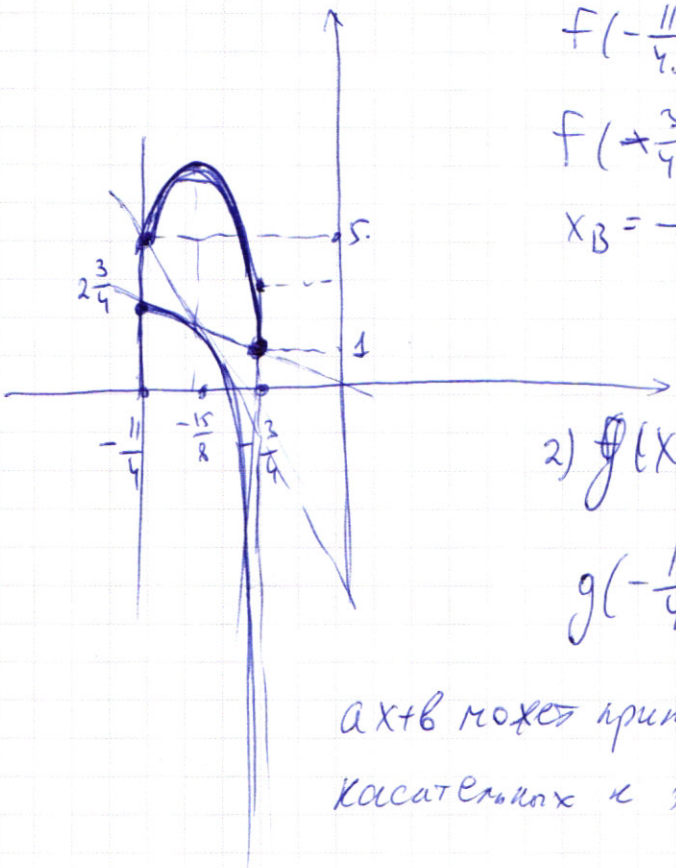
$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

Ответ: $\{0; -2; -\frac{1}{2}\}$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6.

Решим графически



1) $-8x^2-30x-17=f(x)$

$f(-\frac{11}{4}) = \frac{11\cdot15-11^2-34}{2} = \frac{165-121-34}{2} = 5.$

$f(-\frac{3}{4}) = \frac{3\cdot15-3^2-34}{2} = \frac{2}{2} = 1$

$x_B = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$ $\quad -\frac{15}{8} \in [-\frac{11}{4}; \frac{3}{4})$

2) $g(x) = \frac{12x+11}{4x+3} = 3+\frac{2}{4x+3}$

$g(-\frac{11}{4}) = 3+\frac{2}{-11+3} = 3-\frac{1}{4} = 2\frac{3}{4}$

ax+b может принимать значения от касательных к этим графикам

1) кас из точки $(-\frac{11}{4};5)$ к $3+\frac{2}{4x+3}$

$g'(a)(x-a)+g(a)=y$

$-\frac{8}{(4a+3)^2}\cdot(x-a)+3+\frac{2}{4a+3}=y$ (т.к проходит через $-\frac{11}{4};5$)

$-\frac{8}{(4a+3)^2}\cdot(-\frac{11}{4}-a)+3+\frac{2}{4a+3}=5. \Big| \cdot(4a+3)^2$ $\quad a\in(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

$8(\frac{11}{4}+a)+\cancel{3(4a+3)^2}+2(4a+3)=\cancel{5}\,2(4a+3)^2$; $(4a+3)=t$ тогда

$t^2-2t-8=0$ $\quad \left[\begin{array}{l} t=-2; \\ t=4; \end{array}\right.$ $\quad 4a+3=4 \Rightarrow a=\frac{1}{4} \notin a\in(-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

$4a+3=-2 \Rightarrow \boxed{a=-\frac{5}{4}}$

Тогда построим 2 касательную

$g'(a)(x-a)+g(a)=y \quad (x;y)=\left(-\frac{3}{4};1\right)$

$\frac{8}{(4a+3)^2}\cdot\left(\frac{3}{4}+a\right)+3+\frac{2}{4a+3}=1 \quad \Big|\cdot(4a+3)^2.$

$4a+3=t$

$6+8a+2(4a+3)^2+2(4a+3)=0$ тогда

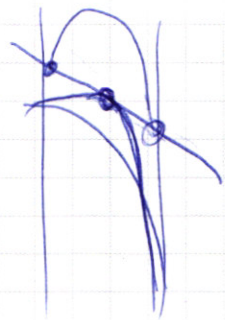
$2t^2+4t=0$

$\left[\begin{array}{l} t=0 \\ t=-2 \end{array}\right.$ если $t=0$ то $4a+3=0 \Rightarrow a=-\frac{3}{4}$ но $a\in\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right) \Rightarrow$

$t=-2 \Rightarrow a=-\frac{5}{4}.$

$\Rightarrow$ тк точка касания в 2 крайних точках совпадает $\Rightarrow$ прямые совпадают $\Rightarrow$ такая пара 1 найдёмее:

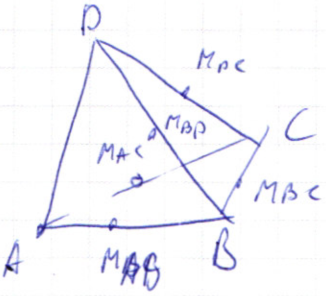
$\frac{8}{\left(4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+3\right)^2}\left(x+\frac{5}{4}\right)+3+\frac{2}{4\cdot\left(-\frac{5}{4}\right)+3}=$



$=2x+\frac{5}{2}+3-1=2x+4\frac{1}{2}$

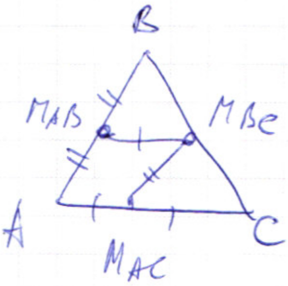
Ответ: $\{(2;4{,}5)\}$.

№7.



$AB=1, BD=2, CD=3 \quad BC-?$, $\min(r_{\text{опис}})-?$

рассмотрим плоскость ABC её пересекает шар в 4 точках $\Rightarrow$ в этой плоскости эти 4 точки лежат на 1 окружности



$\Rightarrow AM_{AB}M_{BC}M_{AC}$ – ⊙

С другой стороны тк $M_{AC}M_{BC}$ – средняя линия $\Rightarrow M_{AC}M_{BC} \parallel AM_{AB}$ и $AM_{AC} \parallel M_{AB}M_{BC} \Rightarrow AM_{AB}M_{AC}M_{BC}$ – параллелограмм $\Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 8
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

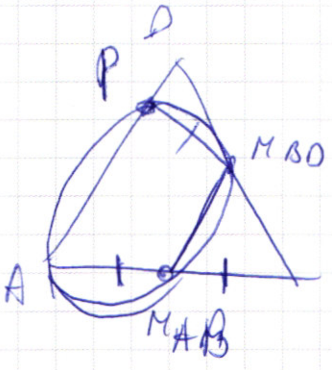
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Вписанный в окружность параллелограмм это прямоугольник
$\Rightarrow \angle BAC = 90^\circ$

тогда центр шара с одной стороны лежит на прямой проходящей через центр прямоугольника $AM_{AC}M_{BC}M_{AB}$ $\perp ABC$ плоскости,

а с другой

Рассмотрим плоскость ADB



т.к. $AD \parallel M_{AB}M_{BD} \Rightarrow$
$PM_{BD} = AM_{AB}$ т.к. $AM_{AB}M_{BD}P \in$ О
тогда $\angle M_{CD}PM_{DM} = 90^\circ$ т.к.
Отражено симметрично от прямой проходящей через середину AP и $\perp AD$.

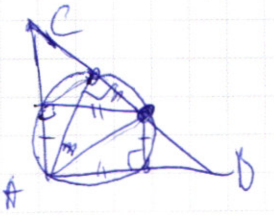
тогда $BC = 2\sqrt{PM_{CD}^2 + PM_{DM}^2} = 2\sqrt{\left(\frac{AC}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} \Rightarrow \sqrt{AC^2 + 1^2}$

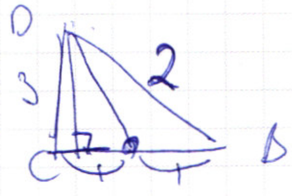
узнаем AC

~~[illegible]~~ $AM_{AC}HM_{BC}M_{AB} \to$ О тогда

степень точки B отн O $= \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}BC \cdot \left(\frac{1}{2}BC + M_{BC}H\right)$

тогда





ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin 2\alpha + 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\boxed{\sin x \cos y = \frac{\sin x - y + \sin x + y}{2}}$

$\sin\alpha\cos\beta - \cancel{\sin\beta\cos\alpha} + \sin\alpha\cos\beta + \cancel{\sin\beta\cos\alpha}$

$2\alpha + 4\beta = x + y$

$2\alpha = x - y$

$x = 2\alpha + 2\beta$

$y = 2\beta$

$2\sin 2\alpha + 2\beta \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

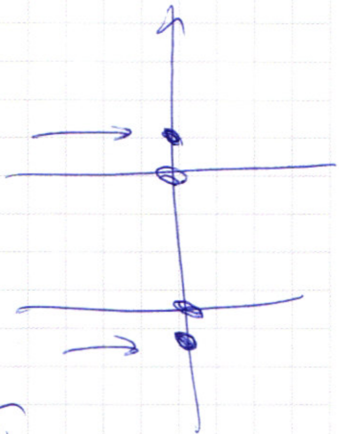
$-\frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

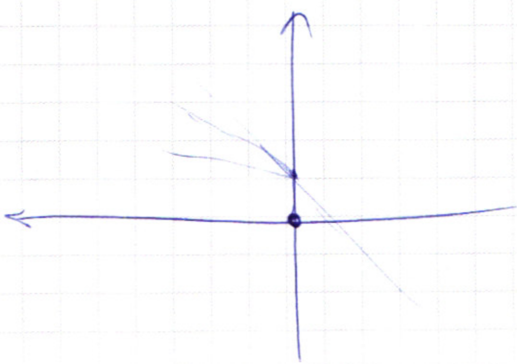
$$\boxed{\begin{gathered}\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5} \\ \sin 2\beta = \pm\frac{\sqrt{5}}{5}\end{gathered}}$$

$\sin 2\alpha + 2\beta = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

$(3a + 4b - 12)^2 - 4\cdot(3b-11)\cdot 4a > 0$

$3a + 4b - 12$





$4x + 3 \geq 0$ на $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}] =)$

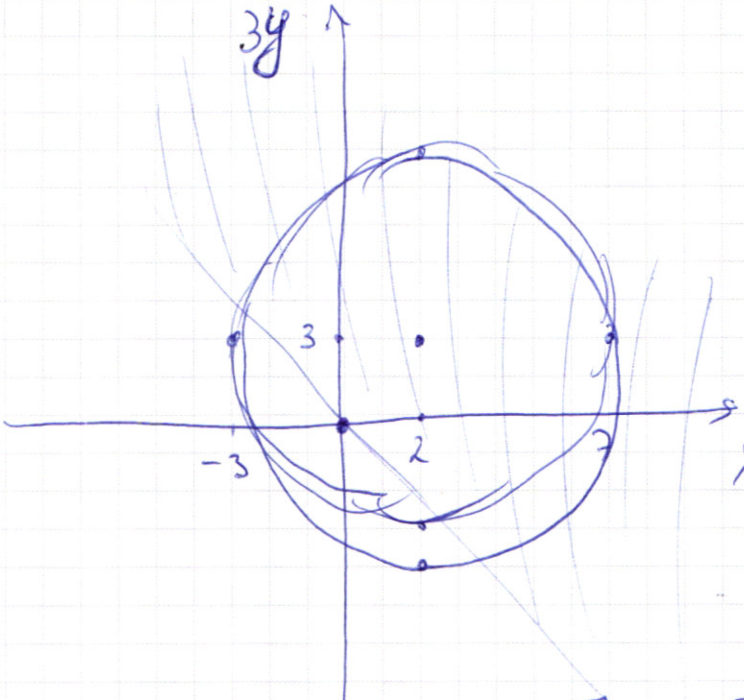
$4x + 3$

$12x + 11 \geq (4x+3)(ax+b)$

$4ax^2 + (3a + 4b - 12)x + 3b - 11$

$\begin{array}{r} 35 \\ \times 17 \\ \hline 245 \\ 35 \\ \hline 595 \end{array}$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25.$



$xy-2y^2+2y^2$

$(x-2y)y+$

$2y^2-x-2y+2.$

$+x-\cancel{x}$

$(x-2y)+2y^2-2x+2$

$\boxed{x-2y\geq 0}$

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}.$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2.$

x^2-x

$x(x-1)+4y^2-2y$

$2y(2y-1)$

$$\begin{cases}(x-2)(y-1)=(x-2y)^2\\ x-2y\geq 0\end{cases}$$

$x^2+4y^2-5xy+x+2y+2.$

$x(x+5y+1)+\cancel{4y^2-2y}+1$

$x(x-2y+1)+2(2y)^2$

$2y(2y-1{,}5x+1)$

$xy-2x+x-2y+2.$

$x(y-2)+2.$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

α, β - углы

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

$\sin 2\alpha \cos 2\beta+\sin 2\beta \cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin 2\alpha \cos 4\beta+\sin 4\beta \cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$.

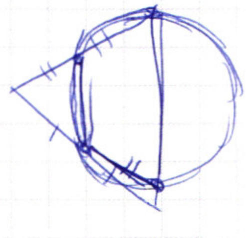
Все tgα если извесно что tg ∃ и tgα имеет ≥ 3 значения

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \end{cases}$$

tgα - определён

$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \Rightarrow \cos\alpha \neq 0$

$\sin x \cos y=\frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$.



$x+y=2\alpha+4\beta$ $2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta=-\frac{4}{5}$

$x-y=2\alpha$.

$x=2\alpha$

$y=2\beta$.

$\cos 2\beta=\frac{2}{5}\cdot\sqrt{5}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$.

$\boxed{\cos 2\beta=\frac{2\sqrt{5}}{5}.}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha =$

$=$

$\frac{2\sin\cos}{\cos^2+\sin^2} =$

$\sin x\cos y = \frac{\sin(x-y)+\sin(x+y)}{2}$

$x-y=2\alpha \qquad x=2\alpha+2\beta$

$x+y=2\alpha+4\beta \qquad y=2\beta$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\boxed{\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha}}$

$\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha$

$tg\,2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$\sin 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\frac{2\frac{\sin}{\cos}}{1-\frac{\sin^2}{\cos^2}}$

$\frac{2}{\cancel{\sqrt{5}}}\sin 2\alpha + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}} = -\frac{1}{\cancel{\sqrt{5}}}$

$\frac{\cos^2-\sin^2}{\cos^2}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\frac{2\sin\cos}{\cos^2-\sin}$

$2\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \;\Big|\cdot 1+tg^2\alpha$

$4tg\alpha + 1 - \cancel{tg^2\alpha} = -1 - tg^2\alpha \qquad 2tg\alpha+1=0$

$\boxed{tg\alpha = -\frac{1}{2}}$

$121+34=155$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

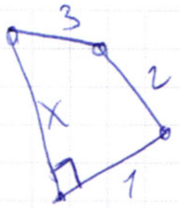
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

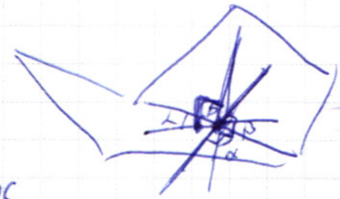
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

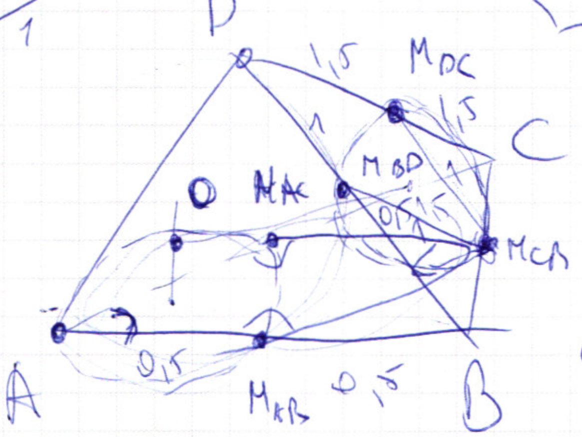
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА





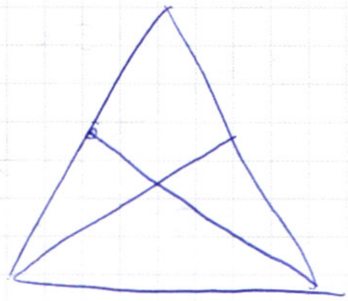


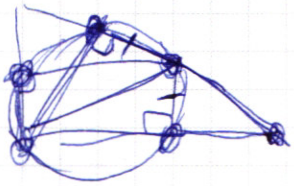
AB=4

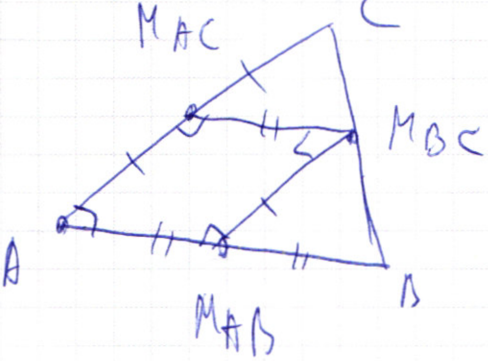
BD=2

CD=?

BC-?





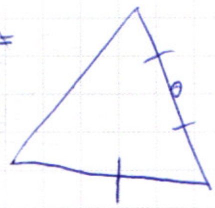


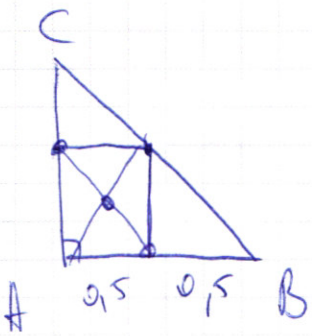
$A\,M_{AC}\,M_{BC}\,M_{AP}$ - 10кр

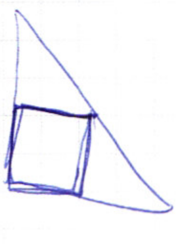
с другой параллелограмм

-> $A\,M_{AC}\,M_{BC}\,M_{AB}$ – прямоугольник

тк ~~BD~~=





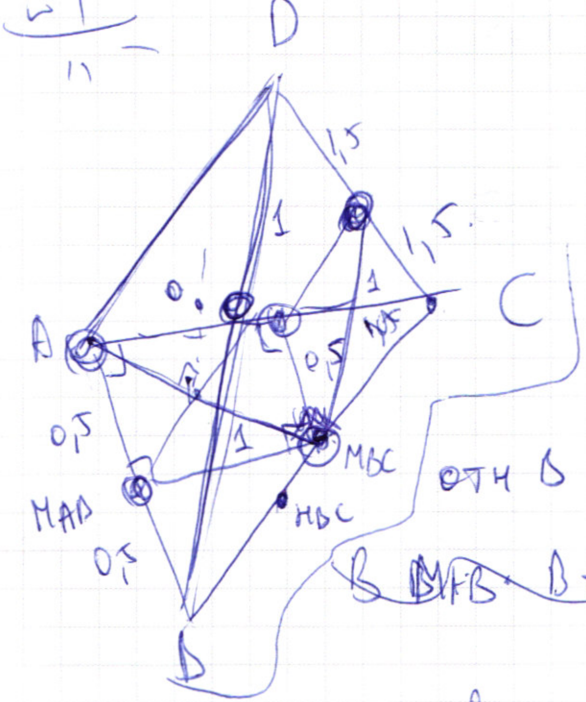


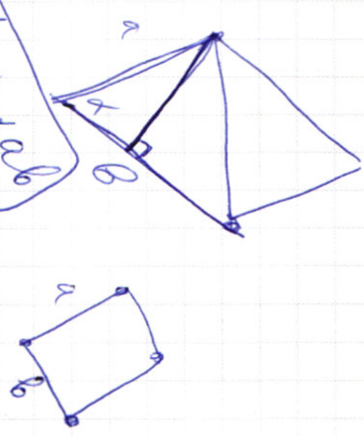
☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



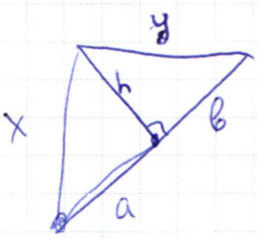


$B_{HBC} \cdot B_{MBC} = 0{,}5.$

$\frac{9}{4}r \cdot \frac{17}{4}r = 17^2$

$\frac{9}{16}r^2 = 17$

$r = \frac{\sqrt{17} \cdot 4}{3}$



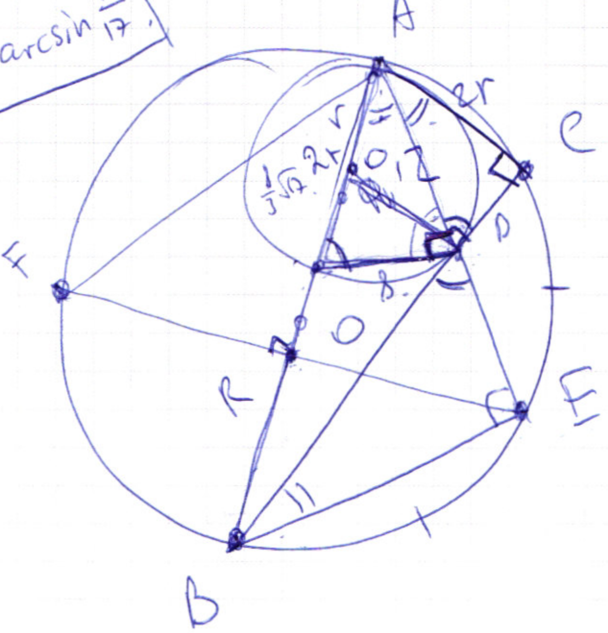
$\frac{2R}{2r} = \frac{17}{8}$ $\quad R = \frac{17}{8}r$

$\boxed{r = \frac{4}{3}\sqrt{17} \quad R = \frac{17}{6}\sqrt{17}}$

$\frac{3}{\sqrt{17}}$

$\boxed{\arcsin\frac{3}{\sqrt{17}} + \arcsin\frac{8}{17}}$

S_{AEF}



$R?\ r?$ $\quad \frac{17}{4}r - 2r$

$BD = 17 \quad \frac{9}{4}r \cdot 2R = BD^2$

$CD = 8$

$AD \cdot DE = BD \cdot CD$

$\deg(B;\omega) =$

$= (2R - 2r) \cdot 2R =$

$= BD^2.$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

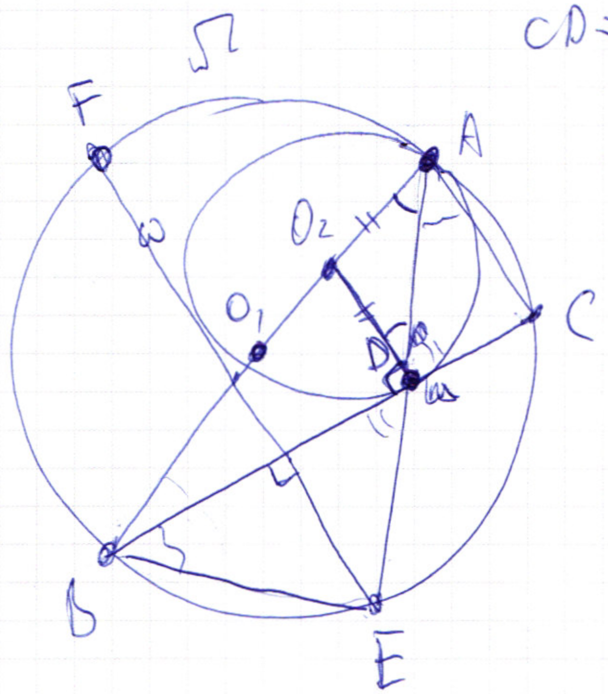
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$CD=8$ $BD=17$

$\angle AFE-?$

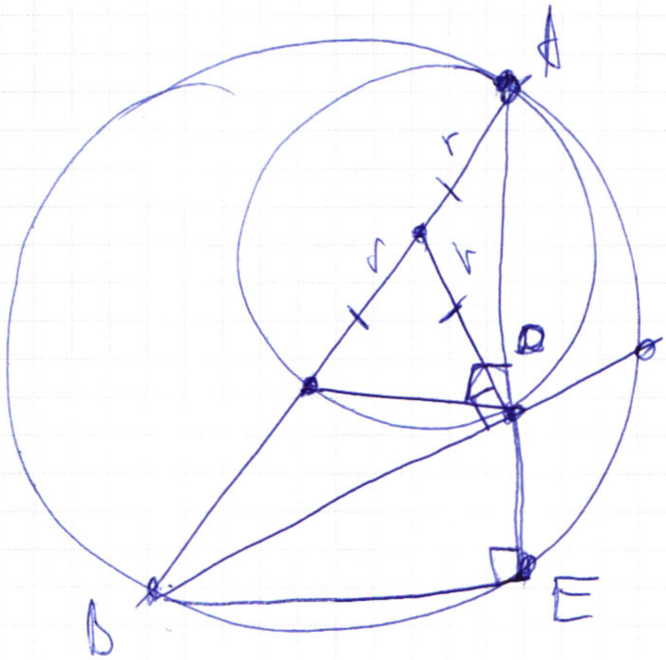
$r_\Omega, r_\omega-?$

$S_{AFE}-?$

$CD=8$ $BD=17$.

отн D $BD\cdot DC=DE\cdot DA$

$\frac{BD}{DE}=\frac{DA}{DC}$



$2R\cdot(2R-2r)=17^2$

$\underbrace{R(R-r)}=\left(\frac{17}{2}\right)^2$

$\frac{2R}{2R-2r}=\frac{AD}{DE}$

$AD\cdot DE$

$\frac{r}{R-r}=\frac{AD}{DE}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$ax+b$ - линейное =>

~~$ax+b$~~

$a\cdot -\frac{11}{4}+b \to min$

$a\cdot -\frac{3}{4}+b \to$ макс

} или наоборот

$3+\frac{2}{4x+3} \leq \quad \leq -8x^2-30x-17.$

$$\begin{cases} 3+\frac{2}{4x+3} \leq ax+b \\ ax+b \leq -8x^2-30x-17. \end{cases}$$

$8x^2+(30+a)x+(17+b) \leq 0.$

$D=(30+a)^2-4\cdot(17+b)\cdot 8$ ~~или~~ . решений много => >0.

$(30+a)^2-\cancel{32}(17+b)>0$

при $x\in[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4})$

$4x+3<0$ =>

$x=\frac{-30-a\pm\sqrt{D}}{16}$

~~$42x+9$~~

$\frac{-30-a\pm\sqrt{D}}{16} \leq -\frac{11}{4}$

$12x+11 \geq (a\cancel{x}+b)(4x+3)$

$0 \geq 4ax^2+(4b+3a-12)x+3b-11$

$\frac{-30-a+\sqrt{D}}{16} \geq \frac{3}{4}$

D

136

$2R-2r$

$2(R-r)$ $\cdot 2$

$17\times 8=136.$

$\frac{136}{15}$

$2\left(\frac{85}{6}\cdot 5-\frac{136}{15}\right)$

$\cdot 10$

425

-272

153

$\cancel{2}\left(\frac{425-272}{\cancel{30}\,15}\right)$

$\frac{153}{15}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

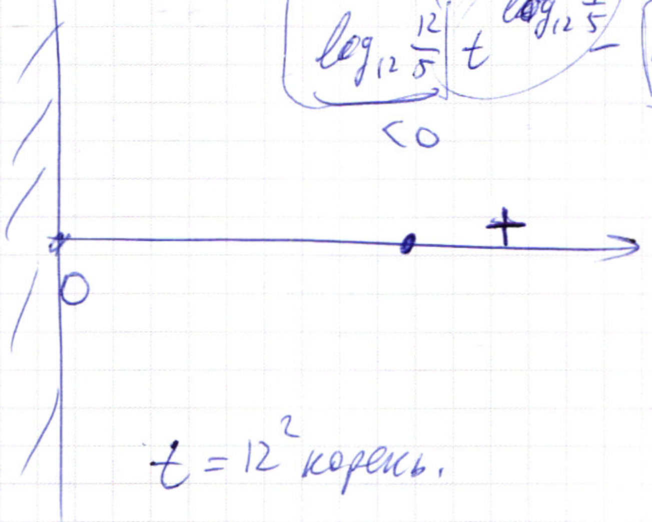
$\log$

$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}} - t^{\log_{12}\frac{13}{5}} = f(x)$ $x \geq 0$ deg больше

≥ 0

$\boxed{\log_{12}\frac{12}{5}}\, t^{\log_{12}\frac{1}{5}} - \boxed{\log_{12}\frac{13}{5}}\, t^{\log_{12}\frac{13}{60}}$

<0 <0



$\left(12^{\log_{12}13}\right)^2$

13^2

$\downarrow$

$\boxed{\frac{\ln 5}{\ln 12}}$

$t = 12^2$ корень.

$t^{\log_{12}5} + t - t^{\log_{12}13} \geq 0.$

$\vee$

t

25 144 169

$t^{\frac{\ln 5}{\ln 12}} + t^1 - t^{\frac{\ln 13}{\ln 12}} \geq 0.$

$t^{\frac{\ln 5}{\ln 12}} + t \geq 2\sqrt{t^{\log_{12}5\cdot 12}}$ $\boxed{2t^{\frac{\log_{12}60}{2}} \geq} t^{\frac{\ln 13}{\ln 12}}.$

$\log_{12}60 \geq 2\log_{12}169$

полож отриц

$t^{\log_{\frac{5}{12}12}} + 1 - t^{\log_{12}\frac{13}{12}} \geq 0.$

$(\log_{12}5 - 1)\, t^{\log_{12}5 - 2}$

$\boxed{\log_{12}\frac{5}{12}\, t^{\log_{12}\frac{5}{144}} - \log_{12}\frac{13}{12}\, t^{\log_{12}\frac{13}{144}}}$

$-(\log_{12}13 - 1)\, t^{\log_{12}13 - 2}$ $\uparrow$ отриц

$\frac{13}{144} - \log_{12}\frac{13}{12}.$

$\uparrow$

полож

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}$

$x^2+18x>0 \Rightarrow x\in(-\infty;-18)\cup(0;\infty)$

$\Rightarrow$ модуль можно убрать

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$

$x^2+18x=t$

$5^{\log_{12}t}+t\geq t^{\log_{12}13}.$

$\cancel{5^{\log_{12}t}\geq t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)}$

$\boxed{a^{\log_b c}=c^{\log_b a}}$ $/\ln$

$\log_b a\cdot\log_b c$

$x^2+18x^{\log_{12}5}+(x^2+18x$

$\boxed{t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}\geq t^{\log_{12}13}}$

$x^a+x^b-x^c\geq 0$

$x^a(1+x^{b-a}-x^{c-a})\geq 0 \Leftrightarrow \boxed{1+x^{b-a}-x^{c-a}\geq 0}$

$a^{\log_a b}=b$

$x^a=(a+1)\cdot x^{a-1}$

$\log_{12}5+x+1-\log_{12}13$

0

$\log_{12}\frac{5}{12}$

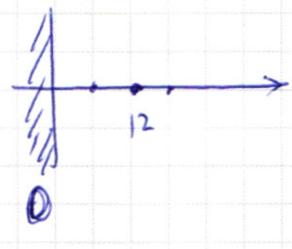
$x^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$F(x)=x^{\log_{12}5}+x-x^{\log_{12}13}.$

$x>0$

$\boxed{t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}-t^{\log_{12}13}\geq t^{\log_{12}13}}$

$\log_{12}t^{\log_{12}5}\cdot\log_{12}$



$1+t^{\log_{12}\frac{12}{5}}\geq t^{\log_{12}\frac{13}{5}}$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12}-t^{\log_{12}13}\geq 0$

$1+t^{\log_{12}2,4}-t^{\log_{12}2,6}\geq 0.$

$\log_{12}\frac{13}{5}$

$(b-a)x^{b-a-1}-(c-a)x^{c-a-1}$

$\log_{12}\frac{12}{5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}$

$x^2+9y^2-4x-18y=12$

$x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25.$

$x(y-1)\cancel{+}-2(y-1)=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

$x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}$

либо $\begin{cases} x \le 2 \\ y \le 1 \end{cases}$

либо $\begin{cases} x \ge 2 \\ y \ge 1 \end{cases}$

$x^2+18x>0$

$x(x+18)>0$ $\boxed{x>0}$

~~and~~ $\left[\begin{array}{l} x>0 \\ x<-18 \end{array}\right.$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(1)=0.$

$f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})$

$\boxed{f(2)=0}$ $f(7)=1$ $f(17)=4$

$f(3)=0.$ $f(11)=2$ $f(19)=4$

$f(1)=f(2)+f(\frac{1}{2})$

$f(5)=1$ $f(13)=3$ $f(23)=5$

$f(1)=f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})$

$f(\frac{1}{5})=-1$

$f(1)+f(2)=f(2)\Rightarrow f(1)=0$

$f(4)=2f(2)=0.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$f(1)=0$ $\quad f(\frac{1}{1})=0$

$f(2)=0$ $\quad f(\frac{1}{2})=0$

$f(3)=0.$ $\quad f(\frac{1}{3})=0$

$f(4)=0$ $\quad f(\frac{1}{4})=0$

$f(5)=1$ $\quad -1$

$f(6)=0.$ $\quad 0$

$f(7)=1$ $\quad -1$

$f(8)=0.$ $\quad 0$

$f(9)=0.$ $\quad 0$

$f(10)=1$ $\quad -1$

$f(11)=2$ $\quad -2$

$f(12)=0$ $\quad 0$

$f(13)=3$ $\quad -3$

$f(14)=1$ $\quad -1$

$f(15)=1$ $\quad -1$

$f(16)=0$ $\quad 0$

$f(17)=4$ $\quad -4$

$f(18)=0$ $\quad 0$

$f(19)=4$ $\quad -4$

$f(20)=1$ $\quad -1$

$f(21)=1$ $\quad -1$

$f(22)=2$ $\quad -2$

$f(23)=5$ $\quad -5$

$f(24)=0$ $\quad 0$

$f(1\cdot x)=\cancel{f(x)}+f(1) \Rightarrow f(1)=0.$

$f(4)=f(2\cdot 2)=2f(2)=0.$

$f(5)=\left[\frac{5}{4}\right]=\left[\frac{5}{4}\right]=1$

$f(6)=f(2)+f(3)=0.$

$f(x/y)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$

$0=f(1)=f(y)+f\left(\frac{1}{y}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{y}\right)=-f(y)$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0 \Rightarrow$

$\left|f\left(\frac{1}{y}\right)\right|>\left|f(x)\right|$

1) либо $f(x)=0$ | 11 вариантов

$f(x)=1$ | 7 вариантов

$f(x)=2$ | 2 вар.

$f(x)=3$ | 1 вар

$f(x)=4$ | 2 вар

$f(x)=5.$ | 1 вар.

$$11\cdot\underbrace{(7+2+1+2+1)}_{13}+7\cdot\overbrace{(2+1+2+1)}^{6}+$$

$$+\underbrace{2\cdot(1+2+1)}_{8}+\underbrace{2\cdot 1}_{3}+\cancel{100}.$$

42

53

$$\begin{array}{r} \times\ 13 \\ 11 \\ \hline 13 \\ 13\ \ \\ \hline 143 \\ +\ 53 \end{array}$$

$\boxed{196}$

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)