# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы $\alpha$ и $\beta$ удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности $\Omega$ и $\omega$ касаются в точке $A$ внутренним образом. Отрезок $AB$ – диаметр большей окружности $\Omega$, а хорда $BC$ окружности $\Omega$ касается $\omega$ в точке $D$. Луч $AD$ повторно пересекает $\Omega$ в точке $E$. Прямая, проходящая через точку $E$ перпендикулярно $BC$, повторно пересекает $\Omega$ в точке $F$. Найдите радиусы окружностей, угол $AFE$ и площадь треугольника $AEF$, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция $f$ определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел $a$ и $b$ из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа $p$ ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее $x$). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина $Y$ которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра $TY$. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра $XZ$. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

5. $f: Q^+ \to Q^+$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad a, b \in N.$

$a \cdot b = p$ ; $a = p$ ; $b = 1$.

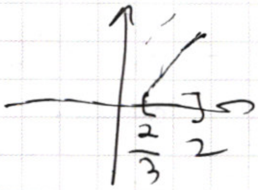
$f(p) = f(p) + f(1)$

$f(1) = 0$ gиe $a, b \in N.$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{-6x-4}{12}$

$= 2 + \frac{12}{3x-2} =$

$= 2 + \frac{4}{x - \frac{2}{3}}$



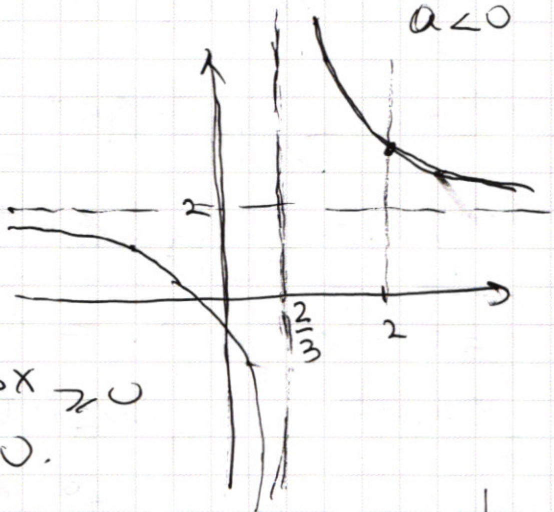
$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28$

$\begin{cases} 3bx - 2ax = \\ = (3b-2a) \cdot x \end{cases}$

• $\frac{8-6x}{3x-2} - (ax+b)^{\backslash 3x-2} \geq 0$

$\frac{8 - 6x - (3a \cdot x^2 + (3b-2a)x - 2b)}{3x-2} \geq 0.$

$a < 0$

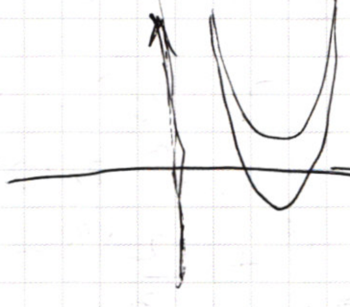


$18x^2 - 51x + 28 =$

$=$

$\frac{-3ax^2 + (2a-3b)x + 2b + 8 - 6x}{w} \geq 0$ $\quad w > 0.$

$\frac{-3ax^2 + (2a-3b-6)x + 2b}{\cancel{w}} \geq 0$



$D \leq 0$ ; $-3a$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2-26x+13^{\log_5(26x-x^2)}$ $\quad x\cdot(26-x)$

$(0;1]\cup[25;26)$

$t=x^2-26x$ $\quad a=\log_5 t=\log_5(26x-x^2)$

$\cancel{|t|^{\log_5 12} \geq t+13^{\log_5(-t)}}$ $\quad \log_5(26x-x^2)\leq 2$

$\cancel{t<0}$ $\quad 26-x^2>0 \quad \log_5 25$

$0<26x-x^2\leq 25$

$t=26x-x^2$ $\quad -x^2+26x-25\leq 0$

$x^2-26x+25\geq 0$ $\quad 2-x$ $\quad a$

$(x-25)(x-1)\geq 0$

$|-t|^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 t}$

$|t|^{\log_5 12} \geq -t+13^{\log_5 t} \to t>0$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right)^a<\left(\frac{5}{13}\right)^2$

$t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t}-t$ $\quad +\left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{12}{13}\right)^2$

и наоб.

$t^{\log_5 12} \geq 13^{\log_5 t}-5^{\log_5 t}$

$t^{\log_5 12}=12^{\log_5 t}$

$\log_5 t\cdot\log_5 12=\log_5 12\cdot\log_5 t$

при $a>2$: одно из $\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a$ будет меньше

$12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}-5^{\log_5 t}$ $\quad$ ~~МИ~~:

$\log_5 t=a$ $\quad 12^a+5^a-13^a\geq 0$ $\quad 5^a+12^a=13^a \,|:13^a$

$12^a \geq 13^a-5^a$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a=1$

$5^a+12^a\geq 13^a \,|:13^a (\neq 0)$ $\quad \left(\frac{5}{13}\right)^a\cdot\ln\frac{5}{13}+\left(\frac{12}{13}\right)^a\cdot\ln\left(\frac{12}{13}\right)=0$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a\geq 1.$ $\quad a=2.$

2. $y-6x \geq 0$

$(y-6x)^2 = xy-6x-y+6$;

$y^2-2\cdot 6x\cdot y+36x^2 = xy-6x-y+6$;

$y^2-\underline{12xy}+36x^2-\underline{xy}+6x+y-6=0$

$y^2-13xy+\underset{13\cdot 3}{36x^2}+6x+\underline{y-6}=0$

---

$9x^2-18x+y^2-12y=45$ $\quad +\frac{36}{9}\,\overline{45}$

$\underset{(3x)^2}{9x^2}-\underset{\substack{9\cdot 2\\ 3\cdot 3\cdot 2}}{18x}+9+y^2-\underset{6\cdot 2}{12y}+36=45\cdot 2$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=45\cdot 2$

$\underline{9\cdot(x-1)^2+(y-6)^2=90}$

$y-6-6x \geq -6$ $\quad (y-6)^2 \leq 90$

$-3\sqrt{10} \leq y-6 \leq 3\sqrt{10}$

$y-6 \geq 6x-6$ $\quad -\sqrt{10} \leq x-1 \leq \sqrt{10}$

---

$(y-6)^2 = 90-9\cdot(x-1)^2$

$y-6 = \pm\sqrt{90-9\cdot(x-1)^2}$

$\begin{cases} 6-3\sqrt{10} \leq y \leq 6+3\sqrt{10} \\ 1-\sqrt{10} \leq x \leq 1+\sqrt{10} \end{cases}$

$-6-6\sqrt{10} \leq -6x \leq -6+\sqrt{10}$

$-9\sqrt{10} \leq y-6x \leq 4\sqrt{10} = \sqrt{160}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=\cancel{-1}\ 0$ $\quad +1 \quad +1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0 \ \big|:\cos^2\alpha\neq0$

$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+5-3\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=0$

$2tg\alpha+5-3tg^2\alpha=0$ ; $3tg^2\alpha-2tg\alpha-5=0$ $\quad 2 \quad -15$

$tg\alpha=5/3=\frac{5}{3}$

$tg\alpha=-3/3=-1$

• ~~$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-(4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha)$~~

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=\cancel{-1}\ 0$ $\quad +1 \quad +1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha=0 \ \big|:\cos^2\alpha\neq0$

$2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-3+5\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=0$

$2tg\alpha-3+5tg^2\alpha=0$ ;

$5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$ $\quad -2 \quad -15$

$tg\alpha=-5/5=-1$

$tg\alpha=3/5=\frac{3}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5. $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(x) = k\ln x \;;\; f(p) = k\cdot\ln p = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\ln p = m \;;\; p = e^m$ ✗

$f(ab) = f(a) + f(b) \;;\; f(x) = 0$ ✗

$f(x) = \cancel{ax+b} = \cancel{cx} = \cancel{ax+b} = nx + m$

$\cancel{m}ab \cancel{+m} = na \cancel{+m} + nb + m$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$\frac{p}{4} \le f(p) < \frac{p}{4} + 1$

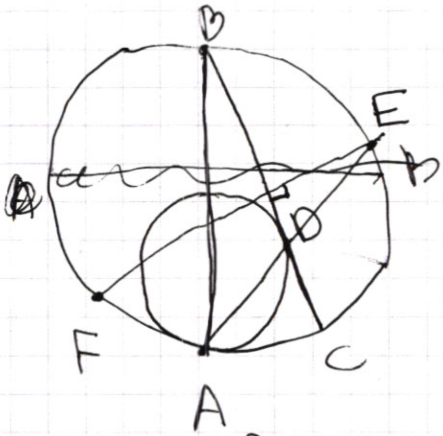
$p \le f(p) < p + 4$

$2 \le f(2) < 6$

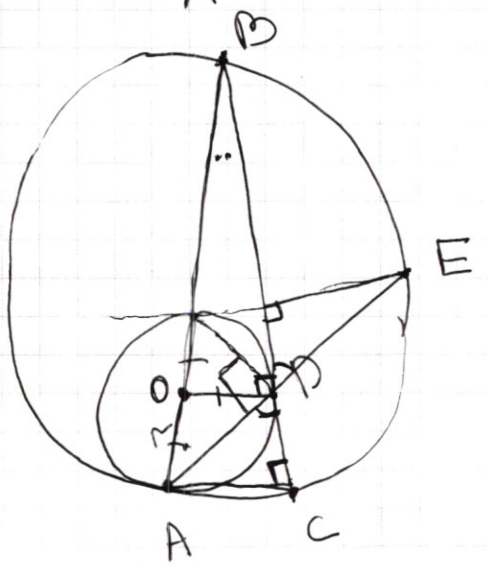
$3 \le f(3) < 7$

$6 \le f(6) < \cancel{6}\, 13$

$25 + 13 = 38$




$CD = 12$
$BD = 13$




$BC = 25$

$BD = 13$

$\frac{13}{25} = \frac{BO}{AO} = \frac{OD}{AC}$

$25(2R - r) = 13r$

$50R = 38r$

$25R = 19r$

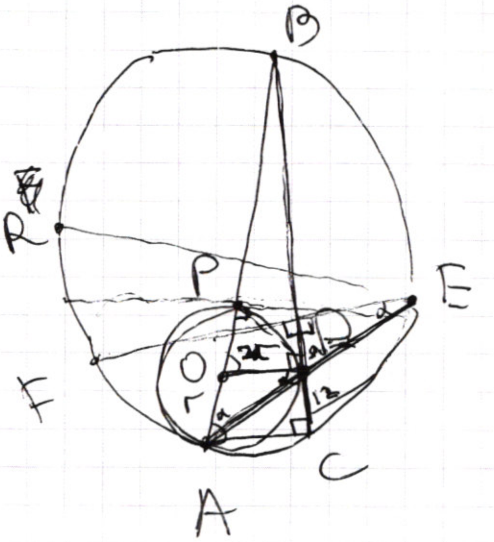
$25BO = 13AO,\; 25DO = 13AC$

$BO = 2R - r$

$AO = r$

$13^2 + r^2 = (2R - r)^2$

$13^2 + r^2 = \frac{13^2}{25^2} r^2 \quad \frac{13}{25} r$




$BD = 13;\ CD = 12$

$BC = 25$

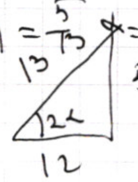

$\frac{13}{25} = \frac{BO}{AB} = \frac{OD}{AC}$

$\cancel{\sin(2\alpha)} =$

$tg(2\alpha) = \frac{BD}{OD} =$

$= \frac{13}{\frac{12\cdot 13}{5}} = \frac{5}{\frac{12}{5}}$ $\quad 2\alpha = a\sin\left(\frac{5}{13}\right)$

$\sin(2\alpha) = \frac{5}{13}$ $\quad \alpha = \frac{1}{2} a\sin\frac{5}{13}$




$\frac{13}{25} = \frac{2R - r}{2R}$

$13 \cdot 2R = 25 \cdot (2R - r)$

$26R = 50R - 25r$

$25r = 24R;\ R = \frac{25}{24} r$

$BD^2 + OD^2 = OB^2$

$13^2 + r^2 = (2R - r)^2 = \left(2 \cdot \frac{25}{24} \cdot r - r\right)^2 =$

$= \left(\frac{50r}{24} - \frac{24r}{24}\right)^2 = \left(\frac{26}{24} r\right)^2 = \left(\frac{13}{12} r\right)^2 = \frac{13^2}{12^2} r^2$

$13^2 = \frac{13^2}{12^2} r^2 - r^2 = \frac{13^2}{12^2} r^2 - \frac{12^2}{12^2} r^2 = \frac{\cancel{(13-12)}^{1}(13+12)}{12^2} r^2$

$13^2 = \frac{25 r^2}{12^2};\quad 13 = \frac{5r}{12};\quad r = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = \frac{312}{10} = 31{,}2$

$\frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{24}_{2}} \cdot \frac{\cancel{12}^{1} \cdot 13}{\cancel{5}_{1}} = \frac{5 \cdot 13}{2} = \frac{65}{2}$

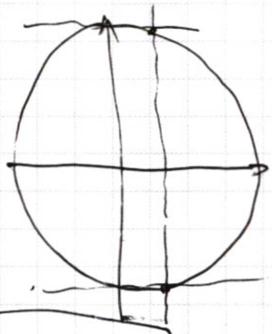
$65 : 2 = 32{,}5$

$13 \times 5 = 65$

$12 \times 13 = 156$

$156 \times 2 = 312$

$$2\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{17}}}\cdot\cos(2\beta)=-\frac{2}{17}\quad\Big|:2$$



$$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)=-\frac{1}{17}$$

$$+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\beta)=+\frac{1}{17}\quad\Big|\cdot\sqrt{17}$$

$$\cos 2\beta=\frac{\sqrt{17}}{17}=\frac{1}{\sqrt{17}};\quad \sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}=$$
$$=\pm\sqrt{1-\frac{1}{17}}=\pm\sqrt{\frac{16}{17}}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha)$$

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\alpha\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

рассм!!!

$$\sin 2\alpha\pm 4\cos 2\alpha=-1$$

- $2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$

$$4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\sin^2\alpha=-1$$
$$4\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-\cancel{\sin^2\alpha}+\underbrace{1}_{\cancel{\sin^2\alpha}+\cos^2\alpha}=0$$

$$5\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0$$
$$\cos\alpha\cdot(5\cos\alpha+2\sin\alpha)=0$$
$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha},\ \cos\alpha\neq 0\Rightarrow \operatorname{tg}\alpha\to\infty.$$

$$\Rightarrow 5\cos\alpha-2\sin\alpha=0$$
$$2\sin\alpha=5\cos\alpha;\quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{5}{2}\quad \cancel{\boxed{\operatorname{tg}\alpha=\frac{5}{2}}}$$

- $\sin 2\alpha-4\cos 2\alpha=-1$

$$2\sin\alpha\cos\alpha-4\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$$
$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cos^2\alpha$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\sin(2\alpha+2\beta)=\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$= -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$= \sin 2\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$+\sin 2\alpha$

$= \sin 2\alpha\cdot(\overset{\sin^2+\cos^2}{1}+\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$=$

$\sin\alpha+\sin\beta=?$

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cancel{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

$\alpha=\frac{a+b}{2}$; $\beta=\frac{a-b}{2}$

$\sin a=\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)+\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)$

$\sin b=\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta-\cancel{\sin\beta\cdot\cos\alpha}$

$\sin a+\sin b=2\sin\alpha\cdot\cos\beta=$

$=2\cdot\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

$\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}=$

$=2\beta$

$\Rightarrow$ ~~$\sin(2\alpha+\beta)=2\sin$~~ $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=$

$=2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

$\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}=\frac{4\alpha+4\beta}{2}=2\alpha+2\beta$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1. Т.к. для $\forall$ углов $a, b$ выполняется:

$\sin a + \sin b = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)\cdot\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$, то

для углов $a = 2\alpha + 4\beta$, $\beta = 2\alpha$:

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)$

По условию $2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17}$

$\left(\sin(2\alpha+4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{17}\right)$.

Также по условию $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$,

значит:

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos(2\beta) = -\frac{2}{17} \Big| \cdot \left(-\frac{\sqrt{17}}{2}\right)$;

$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}}$ (*). При этом $\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\cos^2(2\beta)}$

$\sin(2\beta) = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\sqrt{\frac{16}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ (**)

По условию $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, т.е.

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \sin(2\beta)\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$.

Подставим значения (*), (**) в полученное равенство:

$\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\sin(2\alpha) \pm \frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Big| \cdot\sqrt{17}$;

$\sin(2\alpha) \pm 4\cos(2\alpha) = -1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)



(Нумеровать только чистовики)

Рассмотрим два случая:

1) $\sin(2\alpha)+4\cos(2\alpha)=-1$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+4\cos^2\alpha-4\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha+5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0 \,\big|:\cos^2\alpha\neq0$ (т.к. при $\cos\alpha=0$ $\mathrm{tg}\,\alpha$ неопр.)

$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+5-3\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=0$;

$2\mathrm{tg}\,\alpha+5-3\mathrm{tg}^2\alpha=0$;

$-3\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\,\alpha+5=0$.

$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\alpha=-5/-3=\frac{5}{3}\\ \mathrm{tg}\,\alpha=+3/-3=-1\end{array}\right.$ (По формулам Виета, дискриминант $D>0$)

2) $\sin(2\alpha)-4\cos(2\alpha)=-1$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cdot(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=-\sin^2\alpha-\cos^2\alpha$;

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha-3\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha=0\,\big|:\cos^2\alpha\neq0$

$2\cdot\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}-3+5\cdot\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2=0$;

$2\mathrm{tg}\,\alpha-3+5\mathrm{tg}^2\alpha=0$;

$5\mathrm{tg}^2\alpha+2\mathrm{tg}\,\alpha-3=0$;

$\left[\begin{array}{l}\mathrm{tg}\,\alpha=-5/5=-1\\ \mathrm{tg}\,\alpha=3/5=\frac{3}{5}\end{array}\right.$ (По формулам Виета $D>0$)

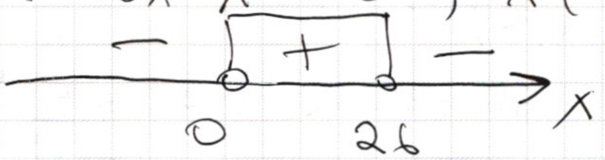
Ответ: Все возможные значения для $\mathrm{tg}\,\alpha$: $-1$; $\frac{3}{5}$; $\frac{5}{3}$

№3.

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x\geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$ ; $x\cdot(26-x) > 0$




ОДЗ: $0 < x < 26$.

Исходное н-во:

$|x^2-26x|^{\log_5 12} \geq x^2 - 26x + 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Замена: $t = 26x - x^2$ ($t > 0$ удовл. по ОДЗ).

$|-t|^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$ ;

$|t|^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$.

Т.к. по ОДЗ $t > 0$, то $|t| = t$ :

$t^{\log_5 12} \geq -t + 13^{\log_5 t}$

Заметим, что $t = 5^{\log_5 t}$ и

$t^{\log_5 12} = 12^{\log_5 t}$ ($t > 0$, поэтому замена равносильна).

Значит:

$12^{\log_5 t} \geq -5^{\log_5 t} + 13^{\log_5 t}$ ;

$5^{\log_5 t} + 12^{\log_5 t} \geq 13^{\log_5 t}$.

Замена: $\log_5 t = a$ :

$5^a + 12^a \geq 13^a \quad | : 13^a > 0$

$\left(\frac{5}{13}\right)^a + \left(\frac{12}{13}\right)^a \geq 1$.

Заметим, что при $a=2$ $\left(\frac{5}{13}\right)^2 + \left(\frac{12}{13}\right)^2 = 1$,

т.е. н-во выполняется

При $a>2$: $\left(\frac{5}{13}\right)^a<\left(\frac{5}{13}\right)^2$; $\left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{12}{13}\right)^2$,

т.е. $\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a<\left(\frac{5}{13}\right)^2+\left(\frac{12}{13}\right)^2=1$;

н-во не выполняется.

При $a<2$: $\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a>1$.

(По методу интервалов: если $f(a)=\left(\frac{5}{13}\right)^a+\left(\frac{12}{13}\right)^a$, то $f(a)$ – сумма двух убывающих ф-й, поэтому $f(a)$ убывает и $f(a)=1$ только при $a=2$).

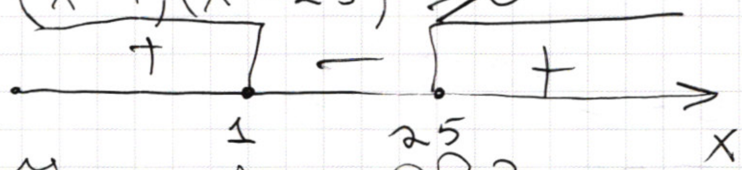
Значит $a\le 2$. Обратная замена:

$a=\log_5 t=\log_5(26x-x^2)\le 2$;

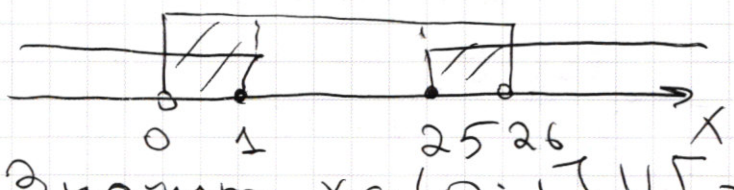
$\log_5(26x-x^2)\le\log_5 25$; $26x-x^2\le 25$ (осн. $5>1$);

$-x^2+26x-25\le 0$ $|\cdot(-1)$; $x^2-26x+25\ge 0$;

$(x-1)(x-25)\ge 0$




Учитывая ОДЗ:




Значит $x\in(0;1]\cup[25;26)$.

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

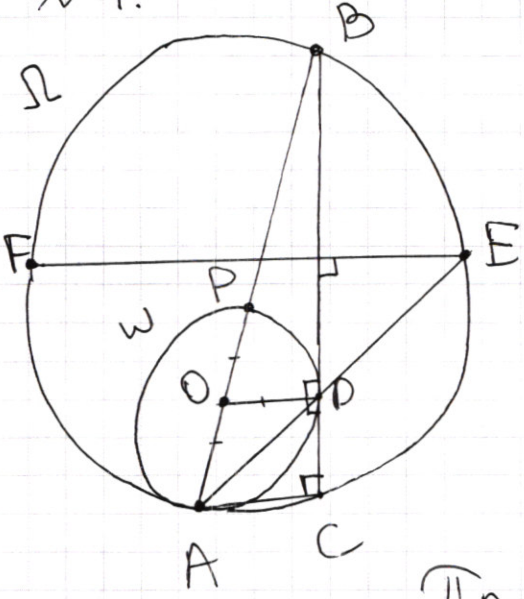
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4.




Дано: $CD=12$, $BD=13$.

Решение:

Заметим, что в силу симметрии $AB$ пересекает $\omega$ в т. $P$ так, что $AP$ – диаметр $\omega$.

Пусть $R$ – радиус $\Omega$,

$r$ – радиус $\omega$,

$O$ – центр $\omega$

Проведём $OD = PO = OA = r$ как радиусы и тогда $OD \perp BC$ как касательная к радиусу $OD$. Проведём $AC$: т.к. $\angle ACB$ вписан в $\Omega$ и опирается на диаметр $AB$, то $\angle ACB$ – прямой.

Заметим, что $\triangle OBD \sim \triangle ABC$ по двум углам ($\angle ACB = \angle ODB = 90^\circ$; $\angle B$ – общий).

Значит верна пропорция:

$\frac{BD}{BC} = \frac{BO}{AB} = \frac{OD}{AC}$. Т.к. $BD=13$, $CD=12$ по усл., то $BC = BD+CD = 25$;

$BO = AB - AO = 2R - r$;

$AB = 2R$.

Значит $\frac{13}{25} = \frac{2R-r}{2R}$; $13\cdot 2R = 25\cdot(2R-r)$;

$26R = 50R - 25r$; $24R = 25r$; $R = \frac{25}{24}r$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

По т. Пифагора для $\Delta ODB$:

$OD^2 + DB^2 = OB^2$; $r^2 + 13^2 = (2R - r)^2$;

$r^2 + 13^2 = \left(2 \cdot \frac{25}{24} r - r\right)^2$; $r^2 + 13^2 = \left(\frac{50r}{24} - r\right)^2$;

$r^2 + 13^2 = \left(\frac{26}{24} r\right)^2$; $r^2 + 13^2 = \frac{13^2}{12^2} r^2$;

$13^2 = \frac{13^2 r^2}{12^2} - \frac{12^2}{12^2} r^2$; $13^2 = \frac{(13-12)(13+12) r^2}{12^2}$;

$13^2 = \frac{25 r^2}{12^2}$; $13 = \frac{5r}{12}$; $r = \frac{12 \cdot 13}{5} = 31{,}2$.

$R = \frac{25}{24} \cdot r = \frac{\cancel{25}^{5}}{\cancel{24}_{2}} \cdot \frac{\cancel{12}^{1} \cdot 13}{\cancel{5}_{1}} = \frac{5 \cdot 13}{2} = 32{,}5$.

Пусть $\angle FEA = \alpha$, тогда $\angle EDB = 90° - \alpha$;

$\angle ADO = \alpha$ (т.к. $\angle ADO + \angle ODB + \angle EDB = 180°$;

$\angle ODB = 90°$). $\angle OAD = \angle ADO = \alpha$ в р-б $\Delta AOD$.

Тогда внешний угол $\Delta AOD$: $\angle BOD = 2\alpha$.

В $\Delta BOD$: $\sin(2\alpha) = \frac{BD}{OB} = \frac{13}{2R - r} = \frac{5}{13}$;

$2\alpha = \arcsin\frac{5}{13}$; $\alpha = \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}$.

$\angle AFE = \frac{\pi - 2\alpha}{2} = \frac{\pi}{2} - \alpha = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}$

Ответ: $R = 32{,}5$; $r = 31{,}2$; ~~Ale~~

$\angle AFE = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}$