МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1.

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cos 4\beta+\cos 2\alpha\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1)+\cos 2\alpha(2\sin 2\beta\cos 2\beta)=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow 2\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{4}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta)=-\frac{2}{5} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{2}{5}$. По условию

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$. Подставим в полученное рав-во:

$\cos 2\beta\cdot\frac{-1}{\sqrt5}=-\frac{2}{5}$; $\cos 2\beta=\frac{2}{\sqrt5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l}\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}\\ \sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}\end{array}\right.$

1) $\sin 2\beta=\frac{1}{\sqrt5}$: $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta+\cos 2\alpha\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\Leftrightarrow \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}+\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5} \Leftrightarrow 2(2\sin\alpha\cos\alpha)=$

$=-(2\cos^2\alpha-1)-1 \Leftrightarrow 4\sin\alpha\cos\alpha=-2\cos^2\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \cos\alpha(2\sin\alpha+\cos\alpha)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\alpha=0\\ 2\sin\alpha=-\cos\alpha\end{array}\right.$

По условию $tg\,\alpha$ определен $\Rightarrow \cos\alpha\neq 0$ (и на него можно делить)

$tg\,\alpha=-\frac{1}{2}$

2) $\sin 2\beta=-\frac{1}{\sqrt5}$: $\sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5}-\cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5}=-\frac{1}{\sqrt5}$; $\Leftrightarrow$

$4\sin\alpha\cos\alpha=(2\cos^2\alpha-1)-1 \Leftrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha=\cos^2\alpha-1 \Leftrightarrow$

$2\sin\alpha\cos\alpha=-\sin^2\alpha \Leftrightarrow \sin\alpha(2\cos\alpha+\sin\alpha)=0$

$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha=0\\ \sin\alpha=-2\cos\alpha\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}tg\,\alpha=0\\ tg\,\alpha=-2.\end{array}\right.$ Мы получили, что $tg\,\alpha$ может принимать значение $-\frac{1}{2}$; 0; -2. Т.к по условию их хотя бы 3, ограничения можно не проверять, т.к они могут только уменьшить кол-во решений.

Ответ: $-\frac{1}{2}; 0; -2$.

Задача 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)}, \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25. \end{cases}$$

Возведем 1ое ур-ние в квадрат, полученные корни проверим в конце.

$$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2 \Leftrightarrow x^2-(5y-1)x+(4y^2+2y-2)=0.$$

Рассмотрим это как квадратное ур-ние относительно x: $D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$
$=9(y-1)^2$.

$x=\frac{(5y-1)\pm 3|y-1|}{2}$. Т.к перед $3|y-1|$ стоит $\pm$, модуль можно убрать: если $y\geq 1$:

$$\begin{cases} x_1=\frac{(5y-1)+3(y-1)}{2} \\ x_2=\frac{(5y-1)-3(y-1)}{2} \end{cases}$$

Если же $y<1$: $x_1=\frac{(5y-1)+3(1-y)}{2}=\frac{(5y-1)-3(y-1)}{2}$

$x_2=\frac{(5y-1)-3(1-y)}{2}=\frac{(5y-1)+3(y-1)}{2}$.

$$x-2=\frac{5(y-1)\pm 3(y-1)}{2} \Rightarrow \begin{cases} x_1-2=4(y-1) \\ x_2-2=(y-1) \end{cases}$$

Подставим во второе ур-ние системы.

① $x_1-2=4(y-1)$

$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=1$

$\Downarrow$

$$\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x_1=6 \\ x_1=-2 \end{array}\right.$$

② $x_2-2=(y-1)$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=\frac{25}{10}$

$$\left[\begin{array}{l} y-1=\frac{5}{\sqrt{10}} \\ y-1=-\frac{5}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} y=\frac{10+5\sqrt{10}}{10} \\ y=\frac{10-5\sqrt{10}}{10} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{20+5\sqrt{10}}{10} \\ x=\frac{20-5\sqrt{10}}{10} \end{array}\right.$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~Ответ: $-\frac{1}{2}$; 0; -2.~~

Проверка:

1) $x=6$, $y=2$

$\sqrt{(x-2)(y-1)} = \sqrt{4\cdot 1} = 2$

$x-2y = 6-2\cdot 2 = 2$ ✓

2) $x=-2$, $y=0$

$\sqrt{(x-2)(y-1)} = \sqrt{(-4)(-1)} = 2$

$x-2y = -2-2\cdot 0 = -2$

не решение!

3) $x = \frac{20+5\sqrt{10}}{10}$, $y = \frac{10+5\sqrt{10}}{10}$

$\sqrt{(x-2)(y-1)} = \sqrt{\frac{5\sqrt{10}}{10}\cdot\frac{5\sqrt{10}}{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$

$x-2y = \frac{20+5\sqrt{10}}{10} - \frac{20+10\sqrt{10}}{10} = \frac{-5\sqrt{10}}{10}$

не решение!

4) $x = \frac{20-5\sqrt{10}}{10}$, $y = \frac{10-5\sqrt{10}}{10}$

$\sqrt{(x-2)(y-1)} = \sqrt{-\frac{5\sqrt{10}}{10}\cdot\left(-\frac{5\sqrt{10}}{10}\right)} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$

$x-2y = \frac{20-5\sqrt{10}}{10} - \frac{20-10\sqrt{10}}{10} = \frac{5\sqrt{10}}{10}$ ✓

Ответ: $(6;2)$, ~~$\left(\frac{20-5\sqrt{10}}{10}\right.$~~ $\left(\frac{4-\sqrt{10}}{2}; \frac{2-\sqrt{10}}{2}\right)$

Задача 3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x.$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2+18x) \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}.$$

Пусть $t = x^2+18x$. Чтобы $\log_{12}t$ был определен $t > 0$, $\Rightarrow |t| = t$:

$$12^{\log_{12}5 \cdot \log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13};$$

$t^{\log_{12}5} + t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$. По св-ву лог-мов:

$$5^{\log_{12}t} + 12^{\log_{12}t} \geq 13^{\log_{12}t}$$

Пусть $\alpha = \log_{12}t$:

$5^\alpha + 12^\alpha \geq 13^\alpha \,\big|\, : 13^\alpha > 0$; $\left(\frac{5}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^\alpha \geq 1$.

т.к $\frac{5}{13} < 1$, $y = \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha$ – убывает, аналогично

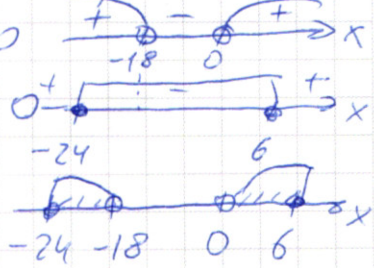
$y = \left(\frac{12}{13}\right)^\alpha$ – убывает $\Rightarrow y = \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^\alpha$ – убывает

значит каждое свое значение принимает 1 раз $\left(\frac{5}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{12}{13}\right)^\alpha = 1$ при $\alpha = 2$

$\left(\frac{25}{169} + \frac{144}{169} = \frac{169}{169} = 1\right)$, а при $\alpha > 2$ $y(\alpha) < 1$, при $\alpha < 2$, $y(\alpha) > 1$.

$\Rightarrow \alpha \leq 2$. Обратная замена: $\log_{12}t \leq 2$

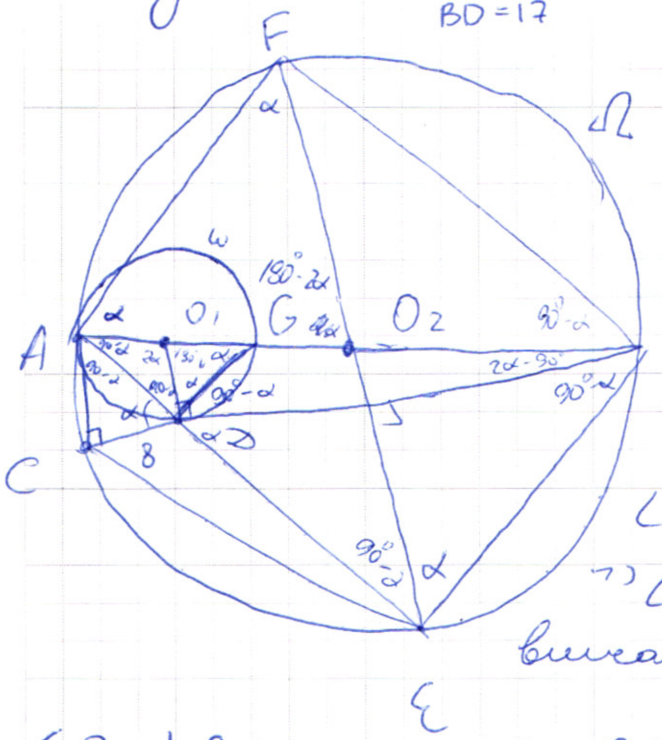
т.к $y = \log_{12}t$ возрастает: $t \leq 144$. Обратная замена $0 < x^2+18x \leq 144$;
$\begin{cases} x(x+18) > 0 \\ (x-6)(x+24) \leq 0 \end{cases}$



Ответ: $[-24;-18)\cup(0;6]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4.



Поймем, что $O_2 \in FE$:

Пусть $\angle GDO_1 = \alpha \Rightarrow \angle GDB = 90^\circ - \alpha$ т.к $O_1D \perp BC$ как радиус к касательной.

Т.к AG - диаметр $\angle ADG = 90^\circ$ $\Rightarrow \angle ADO_1 = 90^\circ - \alpha \Rightarrow \angle DAO_1 = \alpha$ и $AO_1 = O_1D = O_1G = r$, $\angle ADC = \alpha$

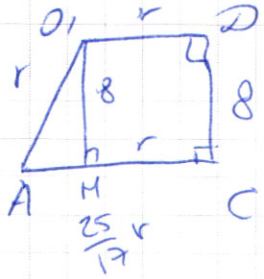
$\angle ACB$ прямой, т.к AB - диаметр $\Rightarrow \angle CAD = 90^\circ - \alpha = \angle CBE$ как вписанные на CE $\angle BEO_2 = \alpha$, т.к $EO_2 \perp BC$. $\angle BAF = \alpha = \angle BEF$ как вписанные

Тогда $\angle BAF + \angle BAE = \alpha + 90^\circ - \alpha = 90^\circ = \angle FAE \Rightarrow$ FE - диаметр. ~~Пусть~~

$\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ ($\angle B$ - общий, $\angle BDO_1 = \angle BCA = 90^\circ$)

$\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow AC = \frac{O_1D \cdot BC}{BD} = \frac{r \cdot 25}{17}$.

~~Т. Пифагора в $\triangle ABC$: AB^2~~ Рассмотрим трапецию AO_1DC:



$O_1H \perp AC \Rightarrow O_1H = 8$, $HC = r \Rightarrow AH = \frac{8}{17}r$.

Т. Пифагора в $\triangle AO_1H$: $r^2 = \frac{8^2}{17^2}r^2 + 64$;

$\frac{9 \cdot 25}{17^2}r^2 = 64$; $r^2 = \frac{8^2 \cdot 17^2}{3^2 \cdot 5^2} \Rightarrow r = \frac{136}{15}$

$\left(AC = \frac{25 \cdot 136}{15 \cdot 17}\right)$

Т. Пифагора в $\triangle BDO_1$:

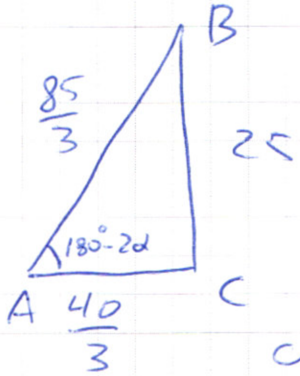
$$BO_1^2 = 17^2 + \frac{8^2\cdot 17^2}{15^2} = \frac{17^2(8^2+15^2)}{15^2} = \frac{17^2\cdot 17^2}{15^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow BO_1 = \frac{17^2}{15} \Rightarrow AB = AO_1 + O_1B = \frac{136}{15} + \frac{289}{15} = \frac{85}{3}$$

$$\Rightarrow AO_2 = \frac{AB}{2} = \frac{85}{6}$$

Радиусы окружностей $\frac{136}{15} = 9\frac{1}{15}$, и $\frac{85}{6} = 14\frac{1}{6}$.

~~$\triangle AO_1$~~ $\triangle ABC$



$$\sin(180^\circ - 2\alpha) = \frac{25\cdot 3}{85} = \frac{15}{17} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{15}{17} \cancel{\Rightarrow \cos 2\alpha =}$$

$\triangle$ ~~AFO~~: ~~$\sin\alpha \ldots = \frac{15}{34}$~~

$$\cos 2\alpha = \pm\frac{8}{17};\ \cos^2\alpha = \frac{1+\cos 2\alpha}{2} =$$

$$= \frac{1 \pm \frac{8}{17}}{2} = \frac{17 \pm 8}{34} = \left[\begin{array}{l} \frac{25}{34} \\ \frac{9}{34} \end{array}\right. \Rightarrow \quad \alpha\text{ - острый} \Rightarrow \cos\alpha = \left[\begin{array}{l} \frac{5}{\sqrt{34}} \\ \frac{3}{\sqrt{34}} \end{array}\right.$$

2α - острый $\Rightarrow \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{34}} \Rightarrow \angle AFE =$

$= \arccos\frac{5\sqrt{34}}{34}$.

$FE = AB = \frac{85}{3}$ $\quad AF = FE\cdot\cos\alpha = \frac{85}{3}\cdot\frac{5}{\sqrt{34}} =$

$= \frac{25\cdot 17}{3\sqrt{2}\cdot\sqrt{17}} = \frac{25\sqrt{34}}{6}$; $AE = FE\sin\alpha =$

$= \frac{85}{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{34}} = \frac{5\cdot 17}{\sqrt{34}} = \frac{5\sqrt{34}}{2}$. $S_{AEF} = \frac{1}{2}AF\cdot AE =$

$= \frac{1}{2}\cdot\frac{25\sqrt{34}}{6}\cdot\frac{5\sqrt{34}}{2} = \frac{125\cdot 34}{24} = \frac{125\cdot 17}{12} = 177\frac{1}{12}$

$$\begin{array}{r} 125 \\ \times\ 17 \\ \hline 875 \\ 125 \\ \hline 2125 \end{array}$$

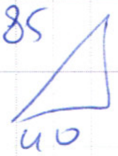
$$\begin{array}{r|l} 2125 & 12 \\ \cline{2-2} -12 & 177 \\ \hline 92 & \\ -84 & \\ \hline 85 & \end{array}$$

17

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



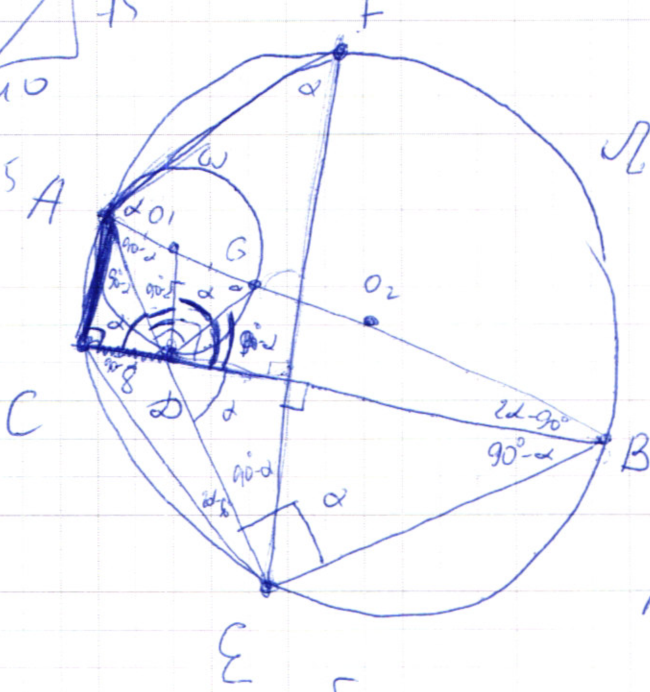
BO_2, AO_1, $\angle AFE$

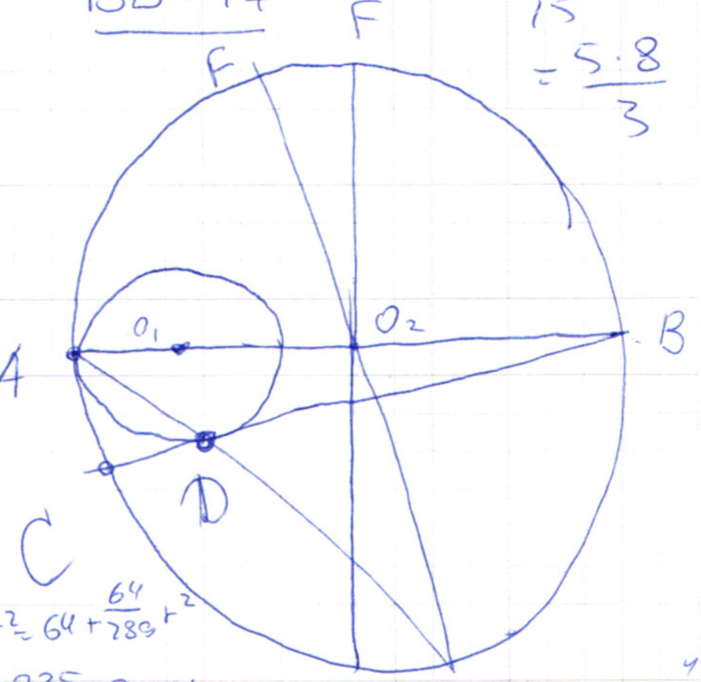
$\triangle AEF$

$136 = 8 \cdot 17$

$\frac{25 \cdot 8}{15} = \frac{5 \cdot 8}{3}$

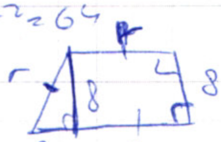
$BD = 17$





$r^2 = 64 + \frac{64}{289} r^2$

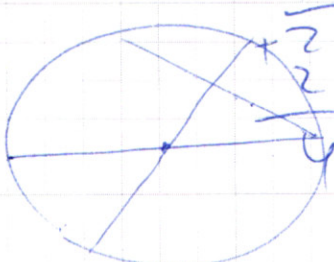
$\frac{225}{289} r^2 = 64$

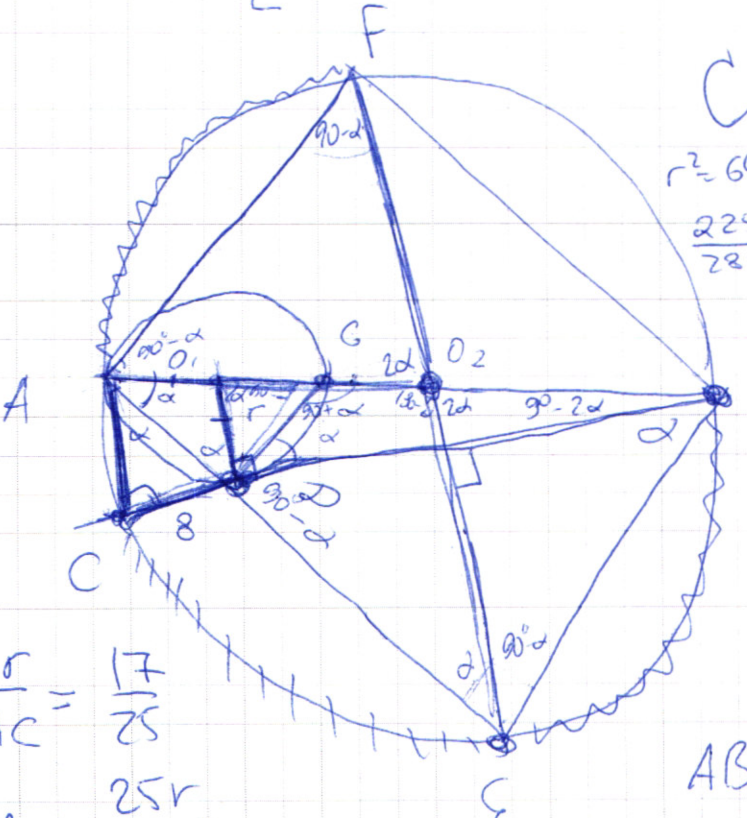


$\frac{8}{17} r$

$\frac{25}{17} r$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 16 \\ \hline 102 \\ 17 \\ \hline 272 \\ +225 \\ \hline 497 \end{array}$





$\frac{r}{AC} = \frac{17}{25}$

$AC = \frac{25r}{17}$

$AB^2 = \frac{625 r^2}{289} + 625$

$\frac{25 \cdot 17^2 \cdot 8^2}{17 \cdot 15^2} =$

$GBD - 25$

$\frac{5^2 \cdot 17 \cdot 8^2}{15^2} = 25^2 \frac{17 \cdot 4^2}{15^2}$

$25^2 \left(\frac{15^2 + 17 \cdot 16}{15^2}\right)$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

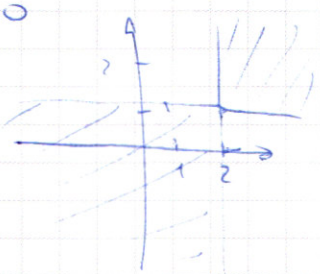
$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2y=\sqrt{x(y-1)-2(y-1)} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=5^2 \end{cases}$$

$(x-2)(y-1)\geq 0$ $\quad x=2$, y – любое; $y=1$, x – любое

$$\begin{cases} x-2\geq 0 \\ y-1\geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x-2\leq 0 \\ y-1\leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x\geq 2 \\ y\geq 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x\leq 2 \\ y\leq 1 \end{cases}$$



$$x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2$$

$$x^2-xy+x+2y-2+4y^2-4xy=0$$

$$x^2-(5y-1)x+2(2y^2+y-1)=0$$

$$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=$$

$$=9(y-1)^2$$

$$x=\frac{5y-1\pm 3(y-1)}{2} \Rightarrow x-2=\frac{5y-5\pm 3(y-1)}{2}$$

если $y\geq 1$

$5y-5+3(y-1)$

$5y-5-3(y-1)$

① $x-2=\dfrac{5(y-1)+3(y-1)}{2}=4(y-1)$

$$16(y-1)^2+9(y-1)^2=25$$

$$(y-1)^2=1 \quad \left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 289 \\ +\,136 \\ \hline 425 \end{array}$$

если $y<1$

$5y-5+3(1-y)=$

$=5y-5-3(y-1)$

$5y-5-3(1-y)=$

$=5y-5-3(y-1)$

② $x-2=\dfrac{5(y-1)-3(y-1)}{2}=(y-1)$

$$(y-1)^2+9(y-1)^2=25;\quad 2(y-1)^2=5$$

$$(y-1)^2=\frac{25}{10}=\frac{25\cdot 10}{100}$$

$$\left[\begin{array}{ll} y-1=\frac{5\sqrt{10}}{10} & y=\frac{5\sqrt{10}}{10}+1 \\ y-1=-\frac{5\sqrt{10}}{10} & y=1-\frac{5\sqrt{10}}{10} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{r} 64 \\ +\,225 \\ \hline 289=17^2 \end{array}$$

$$\frac{425}{15}=\frac{85}{3}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad \{\cos\alpha \neq 0$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$ $\quad (0, -2,)$

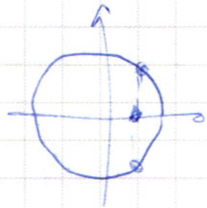
$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1) + \cos 2\alpha(2\sin 2\beta \cos 2\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\sin 2\alpha \cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta \cos 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$

$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha) = -\frac{4}{5}$

$\cancel{2}\cos 2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = -\frac{2}{5}$



$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{2}{5}$; $\cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 1)\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ 2)\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$

2) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha = \cos 2\alpha - 1 = 2\cos^2\alpha - 2$

$\sin 2\alpha = \cos^2\alpha - 1 = -\sin^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\sin^2\alpha$

$\sin\alpha(2\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$ $\quad \sin\alpha = 0 \Rightarrow$ $2 + tg\alpha = 0$ $\quad \left[\begin{array}{l} tg\alpha = 0 \\ tg\alpha = -2 \end{array}\right.$

1) $\sin 2\beta = +\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin 2\alpha \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha = -(2\cos^2\alpha - 1) - 1$

$2\sin 2\alpha = -2\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha\cos\alpha = -\cos^2\alpha = \cancel{-(1-\sin^2\alpha) = \sin^2\alpha - 1}$

$\cos\alpha(2\sin\alpha + \cos\alpha) = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 2tg\alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$ $\quad tg\alpha = -\frac{1}{2}$.

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x.$

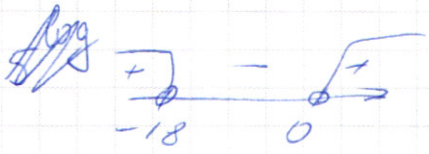
$\log_{12}12-\log_{12}5$

$12^{\log_{12}12-\log_{12}5}=$

$=\dfrac{12^{\log_{12}12}}{12^{\log_{12}5}}=\dfrac{12}{5}$

ОДЗ:

$x^2+18x>0$



$5^{\log_{12}(x^2+18)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}.$

$\log \frac{12}{5}$

$t=x^2+18x>0$

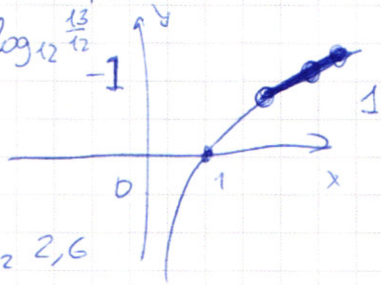
$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$12^{\log_{12}5}\, t^{\log_{12}5} \geq t\left(t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1\right)$

$5^{\log_{12}t}=12^{\log_{12}5\cdot\log_{12}t}=t^{\log_{12}5}$

$t^{\log_{12}5}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}\frac{5}{12}} \geq t^{\log_{12}\frac{13}{12}}-1$



$1 \geq t^{\log_{12}\frac{5}{12}}\cdot\left(t^{\log_{12}\frac{13}{5}}-1\right)$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\log_{12}13}$

$t^{\log_{12}2{,}6}$

$t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\log_{12}2{,}4}\right) \geq t^{\log_{12}5}\cdot t$

$t^{\log_{12}5}\left(1+t^{\log_{12}2{,}4}-t^{\log_{12}2{,}6}\right)\geq 0$

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12}t}+5^{\log_5 t} \geq 5^{\log_5 t\,\log_{12}13}$

$1+t^{\log_{12}2{,}4}-t^{\log_{12},2{,}6}\geq 0$

$t^{\log_{12}5}+t^{\log_{12}12} \geq t^{\frac{1}{2}\log_{12}(5^2+12^2)}$

$y=(x^2+18x)^a$

$y'=\cancel{48a}\,(2x+18)\cdot a(x^2+18x)^{a-1}$

$\log_{12}5=\log_{12}13^{\log_{13}5}=$

$=\log_{13}5\cdot\log_{12}13$

$\log_{12}5-1=\log_{12}5-\log_{12}12=$

$=\log_{12}\frac{5}{12}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $t = x^2 + 18x > 0$ $\boxed{t=1 \checkmark}$

$12^{\log_{12} 5 \cdot \log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$ $t + 81 = (x+9)^2$

$t^{\log_{12} 5} + t^{\log_{12} 12} \geq t^{\log_{12} 13}$. $x = \sqrt{t+81} - 9$

t | если $t > 1$:

$x^a + x^b - x^c \geq 0$

$\log_t (t^{\log_{12} 5} + t^b) \geq \log_{12} 13$

$x^a \uparrow$

$x^a + x^b - x^c \geq 0$

$\log_t (t^{\log_{12} 5}(1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}})) \geq \log_{12} 13$ $x^a - x^b \geq 0$

$\log_{12} 5 + \log_t (1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}}) \geq \log_{12} 13$

$\log_t (1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}}) \geq \log_{12} \frac{13}{5}$ $\log_t f = \frac{\log_{12} f}{\log_{12} t}$

$\frac{\log_{12}(1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}})}{\log_{12} t} \geq \log_{12} \frac{13}{5}$

$\log_{12} \frac{13}{12} =$

$\log_{12} (1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}}) \geq \log_{12} \frac{13}{5}$ $\log_{12} t$ $= \log_{12} 13 - 1$

$1 + t^{\log_{12} \frac{12}{5}} \geq t^{\log_{12} \frac{13}{5}} \Rightarrow 1 + t^{\log_{12} 12 - \log_{12} 5} \geq t^{\log_{12} 13}$

$1 \geq t^{\log_{12} \frac{12}{5}} (t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1)$

$1 \geq (\frac{1}{t})^{\log_{12} \frac{5}{12}} (t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1)$

$t^{\log_{12} \frac{5}{12}} \geq t^{\log_{12} \frac{13}{12}} - 1 \Rightarrow t^{\log_{12} 5 - 1} \geq t^{\log_{12} 13 - 1} - 1$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$f(\frac{1}{7}) = f(\frac{1}{2}) + f(\frac{2}{7})$ $x : y$ $f(\frac{1}{7}) = f(\frac{2}{7}) + f(\frac{1}{2})$ $f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$

$f(\frac{a}{b}) = f(a) + f(\frac{1}{b})$

$f(\frac{1}{a}) = f(1) + f(\frac{1}{a})$

$t^{\log_{12} 5} + t > t^{3/5} + t \lor t^{\frac{6}{5}} > t^{\log_{12} 13}$

$t^{\frac{3}{5}} + t^{\frac{5}{5}} \lor t^{\frac{6}{5}}$, $t > 1$

$\cancel{t^3 + 5t^{\frac{12}{5}} + 10t^{\frac{9}{5}} t^2}$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

$x^2 + 18x = t > 0$

$t^{\log_{12} 5} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq 13^{\log_{12} t}$

$t \geq \underbrace{13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t}}_{\geq 0}$

$f(a^2) = 2f(a)$

$f(2) = 2f(\sqrt{2})$

$f(25) = 2f(a)$

$\cancel{f}$ $f : D(f) = \emptyset$

$\forall a, b \in D(f)$

$f(\frac{1}{a}) = f(1)$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [\frac{p}{4}]$, p – простое

$a = 1$

$f(1 \cdot b) = f(1) + f(b)$

$f(1) = 0$.

$f(2) = [\frac{2}{4}] = [0,5] = 0$

x	f	x	f
1	0	17	4
2	0	18	0
3	0	19	4
4	0	20	1
5	1	21	1
6	0	22	2
7	1	23	5
8	0	24	0
9	0		
10	1		
11	2		
12	0		
13	3		
14	1		
15	1		
16	0		

$\log_{12}(x(x+18)) = \log_{12} x + \log_{12}(x+18)$

$t = (x^2 + 18x) \geq 13^{\log_{12} t} - 13^{\log_{13} 5 \log_{12} t} =$

$f(x) = \log x = 13^{\log_{12} t} (1 - 13^{\log_{12} t \log_{13} \frac{5}{13}}) =$

$f(\frac{x}{y}) = \log_a x - \log_a y$ $13^{\log_{12} t} (1 - (\frac{5}{13})^{\log_{12} t})$

$f(a) + f(b) + f(c) = \frac{f(ab) + f(ac) + f(bc)}{2}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(ac) = f(a) + f(c)$

$f(bc) = f(b) + f(c)$

$f(ac) - f(bc) = f(a) - f(b)$

$2f(a) = f(ac) + f(ab) - f(bc)$

$f(a) = \frac{f(ac) + f(ab) - f(bc)}{2}$

$\cancel{a = 0}$

$\cancel{f(0) = f(0) + f(b)}$

$\cancel{f(b) = 0}$

$f(3) = 0$

$f(14) = f(2) + f(2) = 0$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

$\frac{2}{3} \vee \frac{3}{5}$ $10 \vee 9$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\log_{12} 5 \vee 2/3$ $12 = 2^2 \cdot 3$

$\log_{12} 13 \vee \frac{6}{5}$

$t^{\log_{12} 13} < t^{\frac{6}{5}}$

$5 \vee \sqrt[3]{144}$

$4^3 = 64$

$5^3 = 125$

$6^3 = 216$

$\sqrt[3]{125} \vee \sqrt[3]{144}$

$\frac{2}{3}$ $12^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{144} \approx 5$

$t^{\log_{12} 5} \approx t^{\frac{2}{3}} + t^1$

$C \; \frac{2}{3} \approx$

$\log_{12} 5 < \frac{2}{3}.$

$\frac{17}{25} = \frac{BO_1}{BA}$

$3/5$

$5 \vee \sqrt[5]{2^6 \cdot 3^3} =$

$= 2\sqrt[5]{54}$

$13 \vee \sqrt[5]{2^{12} \cdot 3^6}$

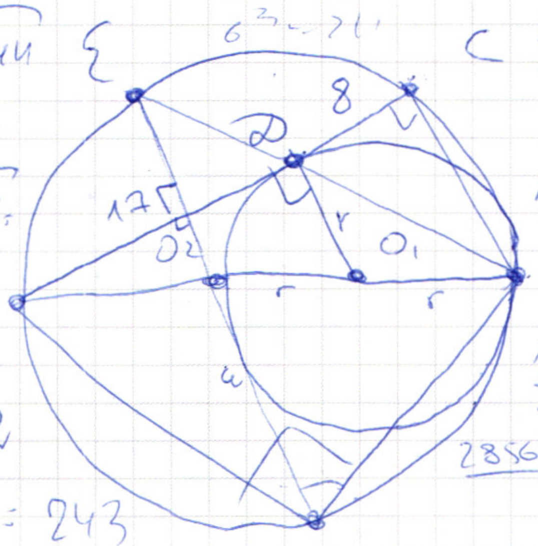
$= 4 \cdot 3\sqrt[5]{12}$

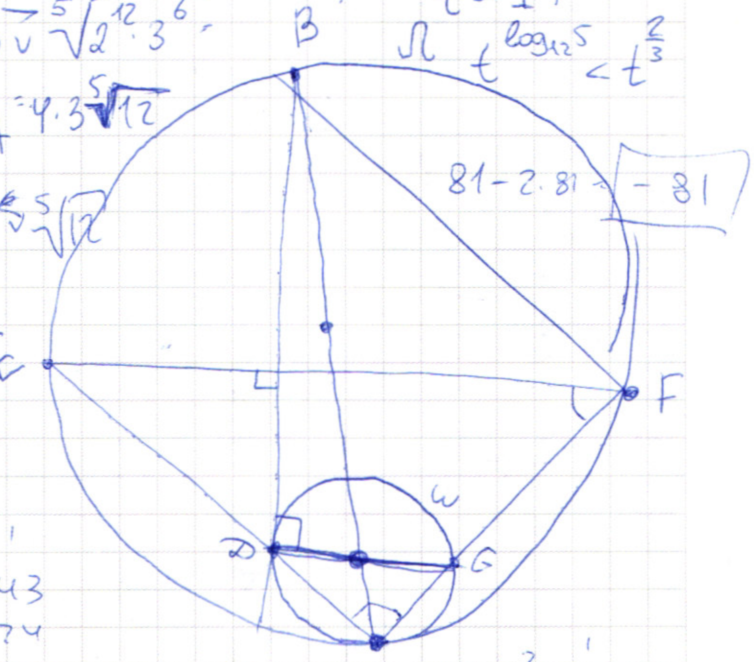
$\frac{13}{12} \vee \sqrt[5]{12}$

28561

$t > 1$;

$t^{\log_{12} 5} < t^{\frac{2}{3}}$





$81 - 2 \cdot 81 = \boxed{-81}$

$3^5 = 81 \cdot 3 = 243$

$\log_{12} 5 > \frac{3}{5}$

169×169

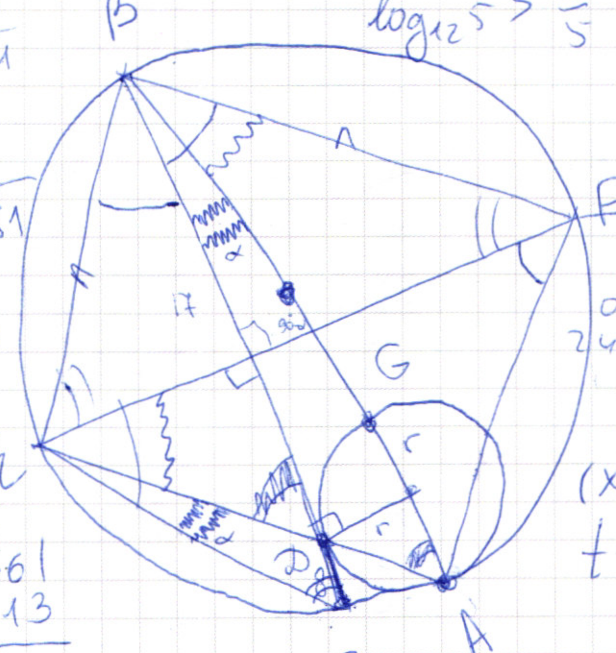
1521

1014

169

28561

$12^5 = 3^5 \cdot 2^{10}$



243×1024

972

486

000

243

$A \; 249032$

$(\cancel{x}^2+18x)^{\log_{12} 5} + (x^2+18x) = (x^2+18x)^{\log_{12} 13}$

$(x^2+18x)^{\log_{12} 5} = (x^2+18x)^{\log_{12} 13} - (x^2+18x)$

$t = x^2 + 18x$

$t^{\log_{12} 5} + t >$

$> t^{3/5} + t > \ldots 2$

$t^{\log_{12} 5} = t / t^{\log_{12}}$

28561×13

85683

28561

371293

$289 = BG \cdot (AB)$

$BG^2 + 2r \cdot BG = BG \cdot 2r > t^{\log_{12} 13}$

371293

2

742586 ... 749032

$289 + r^2 = (BG + r)^2$

$289 + r^2 = BG^2 + 2r \cdot BG + r^2$ $BG^2 + 2r\,BG = 289$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ ax+b \le -8x^2-30x-17 \end{cases}$$

$\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$

$\frac{12x+11}{4x+3} \le \frac{4a\cdot x^2+(3a+4b)x+3b}{4x+3}$

$13^x - 5^x$

$\frac{4ax^2+(3a+4b-12)x+(3b-11)}{4x+3} \ge 0.$

176

$D = 9a^2+16b^2+144+24ab-72a-96b-16a\cdot 3b+16a\cdot 11\cdot 4$

$= 9a^2+16b^2+144-24ab+104a-96b$

$x = \frac{(12-3a-4b)\pm\sqrt{D}}{8a}$

$\frac{12-3a-4b}{8a} - \frac{\sqrt{D}}{8a}$ $\quad -\frac{3}{4}$ $\quad \frac{12-3a-4b+\sqrt{D}}{8a}$

$\times\,^{17}_{16}$ 102 17 272

2

$8x^2+(a+30)x+(b+17) \le 0$

$\frac{12-3a-4b}{8a} = -\frac{11}{4}$

$D = a^2+60a+900-32b-16\cdot 17\cdot 4$

$12-3a-4b = -22a$

$= a^2+60a-32b+628$

$19a = 4b-12$

$t^{\frac{3}{5}}+t \vee t^{\frac{6}{5}}$

$t^{-\frac{2}{5}}+1 \vee t^{\frac{1}{5}}$

$\alpha = t^{\frac{1}{5}};\ \alpha^{-2}+1 < \alpha$

$5^{\log_{12} t} + t \ge t^{\log_{12} 13}$

$t^{\log_{12} 5} + t \ge t^{\log_{12} 13}$

$5^\alpha + 12^\alpha \ge 13^\alpha$

$x^3-x^2-1=0$

$1+\alpha^2 < \alpha^3$

$0 < \alpha^3-\alpha^2-1$

$t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 12} - t^{\log_{12} 5} \le 0$

$t^{\log_{12} 13} - t^{\log_{12} 5} - t \le 0.$

$\log_{12} \frac{13}{5}$

$13^{\log_{12} t} - t - 5^{\log_{12} t} \le 0$

$t^{\log_{12} \frac{13}{5}} - t^{\log_{12} \frac{12}{5}} - 1 \le 0$

$t \ge 13^{\log_{12} t} - 5^{\log_{12} t}$

$t^{\log_{12} \frac{13}{5}} - t^{\log_{12} \frac{12}{5}} \le 1;\ t^{\log_{12} \frac{12}{5}} /$

$\alpha = \log_{12} t$ | $12^\alpha \ge 13^\alpha - 5^\alpha$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$5^{\alpha}+12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$ $\quad \alpha=1 \checkmark$ $\quad \alpha=2 \checkmark$

$5^{\alpha}+12^{\alpha} \geq (5^2+12^2)^{\frac{\alpha}{2}}$

$(1+\alpha)^n \geq 1+\alpha n$

f, g – убыв.

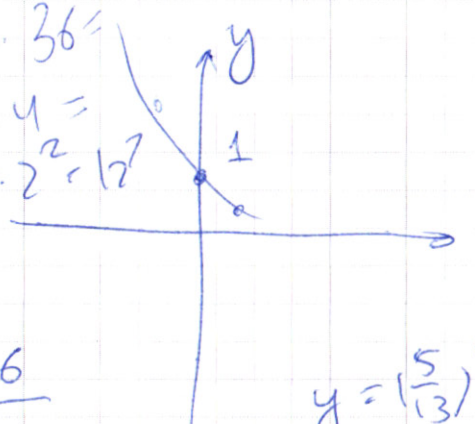
$x_2 > x_1 \quad f(x_2) < f(x_1)$

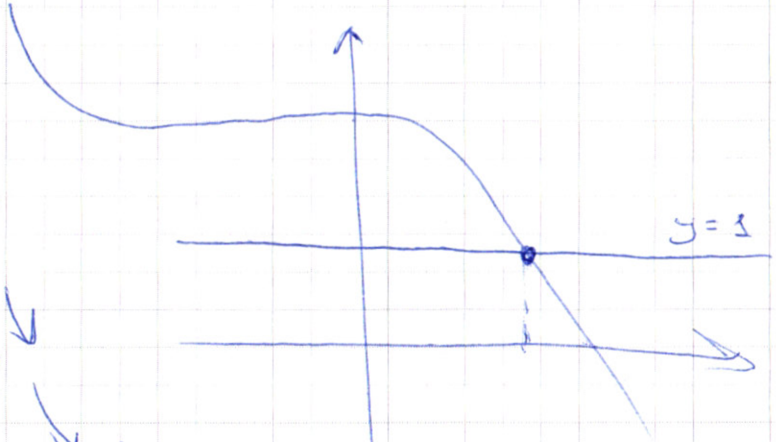
$f+g \; h(x) \; f(x_2)+g(x_2) < f(x_1)+g(x_1) = h(x_1)$

$\cancel{\alpha \ln 5/7}$

$36+3\cdot 36 =$

$5^2=(13-12)(13+12)$ $\quad 36\cdot 4 = 6^2\cdot 2^2 = 12^2$





$25^{\frac{\alpha}{2}}+12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$

$t=$

$(12+13)^{\frac{\alpha}{2}}+12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$

$x=6$

$5^{\alpha}+12^{\alpha} \geq 13^{\alpha}$

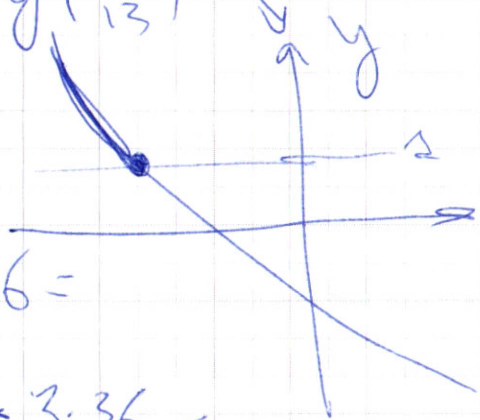
$5^{\log_{12}144}+36=$

$y=\left(\frac{5}{13}\right)^x \downarrow$

$y\left(\frac{12}{13}\right)^x \downarrow$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\alpha}+\left(\frac{12}{13}\right)^{\alpha} \geq 1$

$=5^2+36=61$



$t \leq 144$

$D/4 = 81+144 = 225 = 15^2$

$\alpha > 2$

$y=f(x) \nearrow$

$y=g(x) \nearrow$

$144^{\log_{12}13} - 18\cdot 6 =$

$x=-9\pm 15 \left[\begin{array}{l} 6 \\ -24 \end{array}\right.$

$\left(\frac{5}{13}\right)^{\alpha} <$

$y=f(x)+g(x); \nearrow$

$=12^{2\log_{12}13} - 3\cdot 36 =$

$x_2 > x_1; \quad y_{x_2} = f(x_2)+g(x_2) > f(x_1)+g(x_1) = y_{x_1}$

$= 13^2 - 108$

169

61 ✓

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)