МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}, \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x + \left|x^2 - 10x\right|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3\left(10x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{15}{2}$, $BD = \frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $2 \leqslant x \leqslant 25$, $2 \leqslant y \leqslant 25$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x - 16}{4x - 5} \leqslant ax + b \leqslant -32x^2 + 36x - 3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4}; 1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL = 3$, $KM = 1$, $MN = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x^2 - \underset{2\cdot 13}{26xy} + 13^2y^2) - 13^2y^2 + 12^2y^2$

$(x-13y)^2 - 25y^2 = 6y - 12y - x$ $\quad 2\cdot 5 = 10$, $\frac{12}{10} = 1{,}2$

$(x-13y)^2 - (25y^2 - 12y + \ldots) = 6 - x$

$(x-13y)^2 - (5y-1{,}2)^2 + 1{,}2^2 = 6 - x$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$; $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$
$= -\frac{2}{5}$

1) $\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\cdot\sin(2\alpha + 2\beta)\cdot$
$\cdot\cos(2\beta) = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)\cdot\cos(2\beta) =$
$= -\frac{2}{5} \Rightarrow \cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}}$

2) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{\left(1 - \left(\frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2\right)} =$
$= \pm\frac{2}{\sqrt{5}}$

3) $\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta +$
$+ \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{5}}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos 2\alpha =$
$= -\frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$

4) В случае 1
$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$
Пусть $x = tg\,\alpha$, тогда $\sin 2\alpha = \frac{2x}{x^2+1}$,

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\cos 2\alpha = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

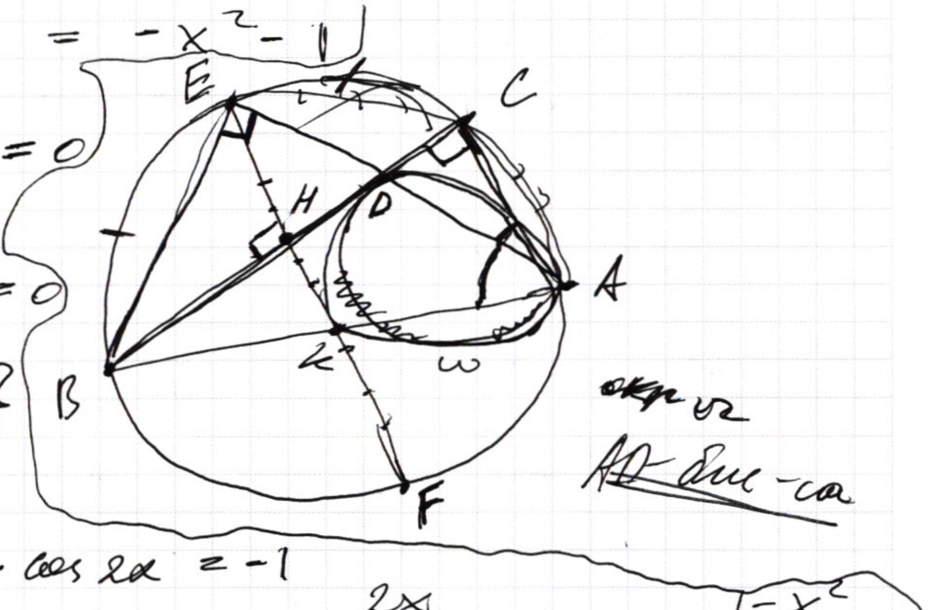
Значит, $\frac{2x}{x^2+1} + 2\cdot\frac{1-x^2}{x^2+1} = -1$

$2x+2-2\cdot x^2 = -x^2-1$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)\cdot(x+1)=0$

$x \in \{-1; 3\}$



5) В случае:

$\sin 2\alpha - 2\cdot\cos 2\alpha = -1$

Пусть $x = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\frac{2x}{x^2+1} - 2\cdot\frac{1-x^2}{x^2+1} = -1$

$2x-2+2x^2 = -x^2-1$

$3x^2+2x-1=0$

$(x+1)(3x-1)=0$

$x \in \{-1; \frac{1}{3}\}$

Т.к. известно, что решений не меньше 3, ответ $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$

$$\Big(\big(\sin\alpha\cdot\cos 2\beta\big)+\big(\cos\alpha\cdot\sin 2\beta\big)\Big)\cdot\Big(\big(\cos\alpha\cdot\cos 2\beta\big)+\big(\sin\alpha\sin 2\beta\big)\Big)=$$

$$=\Big(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos 2\beta)^2+\sin^2\alpha\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta+$$

$$+(\cos\alpha)^2\cdot\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta+\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\sin 2\beta)^2\Big)=$$

$$=\Big(\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\cos 2\beta)^2+\frac{1}{2}\sin 4\beta\cdot\sin^2\alpha+$$

$$\cancel{+\frac{1}{2}(\cos\alpha)^2\sin 4\beta+\frac{1}{2}\sin 2\alpha(\sin 2\beta)^2\Big)}=$$

$$\cancel{=\frac{1}{2}\Big(\sin 2\alpha\big((\cos 2\beta)^2+(\sin 2\beta)^2\big)+\sin 4\beta(\sin^2\alpha+}$$

$$\cancel{+\cos^2\alpha)\Big)=\frac{1}{2}\big(\sin 2\alpha+\sin 4\beta\big)}$$

$$\sin\alpha\cos\alpha\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta)^2+$$

№2

1) $x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}$

$x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(x^2-12x+36)+(36y^2-\cancel{6\cdot 2}\,2\cdot 6\cdot 3y+3^2)-36-9=45$ $\quad +36$

$(x-6)^2+(6y-3)^2=45\cdot 2$

$(x-6)^2+(6(y-\frac{1}{2}))^2=45\cdot 2 \Rightarrow R=\sqrt{90}=3\sqrt{10}$

$x_0=6;\ \underline{y_0=\frac{1}{2}}\ ?$

2) $(x-12y)^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-24yx+144y^2=2xy-12y-x+6$

$x^2-26xy+144y^2=6-12y-x$

[illegible]

[illegible]

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2(\alpha+2\beta)) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) $\sin(2(\alpha+\beta)) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

• $2(\sin\alpha\cos\beta + \cancel{\cos\beta\sin}\cos\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

• $2((\sin\alpha\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin\alpha\sin 2\beta)) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{2}{5}$

$(\sin\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos\alpha\sin 2\beta)(\cos\alpha\cos 2\beta + \sin\alpha\sin 2\beta) + \sin\alpha\cos\alpha = -\frac{1}{5}$

$\sin\alpha\cos 2\beta = \sin\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \sin\alpha(\cos^2\beta - (1-\cos^2\beta)) =$

$= \sin\alpha(\cos^2\beta - 1 + \cos^2\beta) = \sin\alpha(2\cos^2\beta - 1)$

$\cos\alpha\cdot\sin 2\beta = \cos\alpha\, 2\sin\beta\cos\beta = 2\cos\alpha\sin\beta\cos\beta$

$\cos\alpha\cos 2\beta = \cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) = \cos\alpha(2\cos^2\beta - 1)$

$\cancel{\sin\alpha\sin 2\beta = 2\sin\beta\cos\beta\cos\alpha}\sin\alpha \Rightarrow \frac{1}{2}\sin 4\beta \quad \frac{1}{2}\sin$

$\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \sin^2\alpha\,\underline{\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta} + \cos^2\alpha\cdot\underline{\cos 2\beta\sin 2\beta} +$

$+ \cos\alpha\sin\alpha\sin^2 2\beta =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y+6-x} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

1) $2xy-12y+6-x=(2y-1)(x-6)\geq 0$

2) $((x-12y))^2=2xy-12y-x+6$

$x^2+144y^2-24\cdot y\cdot x-2xy+12y+x-6=0$

Рассм-м это как $\square^2$ уравнение относительно x:

$1\cdot x^2+x(-26y+1)+(144y^2+12y-6)=0$

$D=(1-26y)^2-4(144y^2+12y-6)=y^2(26^2-4\cdot 144)+y(-2\cdot 26-4\cdot 12)+1+4\cdot 6=$

$100y^2-100y+25=(10y-5)^2$

$x_{1,2}=\dfrac{26y-1\pm(10y-5)}{2}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=18y-3 \\ x=8y+2 \end{array}\right.$

3) Пусть $x=18y-3$, тогда

$(18y-3)^2+36y^2-12\cdot(18y-3)-36y-45=0$

$324y^2-108y+9+36y^2-216y+36-36y-45=0$

$360y^2-360y=0$

$y\in\{0;1\}\Rightarrow \left[\begin{array}{l} y=0,\ x=-3 \\ y=+1,\ x=15 \end{array}\right.$

4) $\exists\ x = 8y+2$, тогда

$(8y+2)^2 + 36y^2 - 12(8y+2) - 36y - 45 = 0$

$64y^2 + 32y + 4 + 36y^2 - 96y - 24 - 36y - 45 = 0$

$100y^2 - 100y - 65 = 0$

$y^2 - y - \frac{13}{20} = 0 \Rightarrow y_{1,2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3,6}}{2} =$

$= \frac{1}{2} \pm \frac{3}{\sqrt{10}}$, тогда $\left[\begin{array}{l} y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}};\ x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}};\ x = 6 + \frac{24}{\sqrt{10}} \end{array}\right.$

5) Проверим найденные решения, подставив их в неравенства из пункта 1:

× а) $y = 0;\ x = -3$

$(2y-1)\cdot(x-6) = -1\cdot(-9) \geq 0$, но $x - 12y < 0$

✓ б) $y = 1;\ x = 15$

$(2y-1)\cdot(x-6) = 1\cdot 9 \geq 0$, $x - 12y > 0$

✓ в) $y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}};\ x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}}$.

$(2y-1)\cdot(x-6) \geq 0$, $x - 12y > 0$

× г) $y = \frac{1}{2} + \frac{3}{\sqrt{10}}$, $x = 6 + (24):\sqrt{10}$

$(2y-1)\cdot(x-6) \geq 0$, $x - 12y < 0$

Ответ: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 6 - \frac{24}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{1}{2} - \frac{3}{\sqrt{10}} \end{cases} \end{array}\right.$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

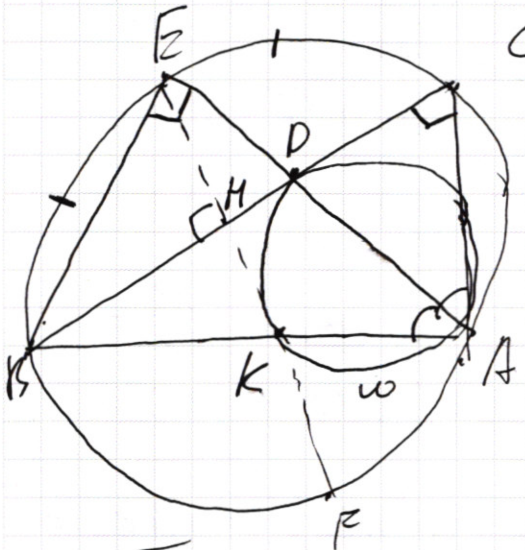
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



Окр Ω большая

Окр ω малая

1) По лемме Архимеда AD – бис-са угла CAB

2) Пусть H – т. пересечения BC и EF, а K – т. пересечения AB и ~~ω~~ Ω

3) AB – диаметр => ∠ACB = 90° (прямой), значит AC ∥ EF => ∠CAD = ∠DEH

4) Степень т. D относительно Ω равна $CD \cdot BD = 15/2 \cdot 17/2 = AD \cdot DE$.

5) Из первого следует, что E – середина дуги BC, то есть BE = EC => высота EH в △BEC также медиана => $BH = HC = \frac{1}{2} BC = \frac{1}{2}(BD + DC) = 8$ => $HD = BD - BH = \frac{1}{2}$

6) Т.к. ω симметрична относительно AB, AK – диаметр ω => ∠ADK – прямой.

Также $\angle AEB$ прямой, т.к. AB — диаметр Ω

7) ~~...~~

$\triangle ACD$, $\triangle ADK$, $\triangle EHD$ и $\triangle AEB$ подобны по 2 углам.

$\frac{HD}{DC} = \frac{1}{15} \Rightarrow \frac{ED}{DA} = \frac{1}{15} \overset{\text{п. 4)}}{\Rightarrow} \begin{cases} ED = \frac{\sqrt{17}}{2} \\ AD = \frac{15\cdot\sqrt{17}}{2} \end{cases}$

8) $AC = \sqrt{AD^2 - DC^2} = 4 \cdot \frac{15}{2} = 30$

$AB = \sqrt{AC^2 + BC^2} = 34 \Rightarrow r_{\Omega} = \frac{AB}{2} = 17$

$r_{\omega} = \frac{r_{\Omega}\cdot AD}{AE} = 17 \cdot \frac{AD}{AD + DE} = (17\cdot 15)/16$

9) $\angle AFE = \angle ABE$ (по вписанному $\angle FBE$) $= \angle AKD$ ($KD \parallel BE$) $= \angle ADC$ (по св-ву касательной)

$tg\angle ADC = \frac{AC}{DC} = \frac{30}{\frac{15}{2}} = 4 \Rightarrow \angle ADC = arctg\, 4$

10) Высота $\triangle AFE$ из т. A $= CH$, так как $AC \parallel EF$.

Степень т. H относительно Ω $= CH \cdot HB = 8\cdot 8 = EH \cdot FH$. $EH = \frac{1}{15} AC = 2$ (из подобия $\triangle EHD$ и $\triangle ACD$) $\Rightarrow FH = 64/EH = 32 \Rightarrow EF = EH + HF = 34$, тогда $S_{AEF} = (CH \cdot EF)/2 = (8\cdot 34)/2 = 136$

Ответ: $r_{\Omega} = 17$, $r_{\omega} = \frac{255}{16}$, $\angle AFE = arctg\, 4$, $S_{AEF} = 136$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

1) $10x - x^2 > 0$ (т.к. будет логарифм)

Тогда неравенство можно переписать:

$$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x - x^2)}$$

2) Обозначим $10x - x^2$ за y:

$$y + y^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 y}$$

] $z = \log_3 y$

$$3^z + 4^z \geq 5^z \iff \left(\frac{3}{4}\right)^z + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^z$$

Рассмотрим 2 случая:

а) $z \in (-\infty; 2]$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^z + 1 \geq \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^z$$

б) $z \in (2; +\infty)$:

$$\left(\frac{3}{4}\right)^z + 1 < \left(\frac{3}{4}\right)^2 + 1 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^z$$

Значит, $z \in (-\infty; 2]$, то есть $y \in (0; 9]$, то есть $10x - x^2 \in (0; 9]$

3) $10x - x^2 > 0 \iff x \in (0; 10)$

$10x - x^2 \leq 9 \iff x \in (-\infty; 1] \cup [9; +\infty)$

Значит $x \in (0; 1] \cup [9; 10)$

Ответ: $(0; 1] \cup [9; 10)$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$; $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

1) $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

2) $\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt5}\right)^2} =$

$= \pm\frac{2}{\sqrt5}$

3) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = \frac{1}{\sqrt5}\cdot\sin 2\alpha \pm \frac{2}{\sqrt5}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \Rightarrow$

$\Rightarrow \sin 2\alpha \pm 2\cos 2\alpha = -1$.

4) I случай:

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

П $x = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\sin 2\alpha = \frac{2x}{x^2+1}$, $\cos 2\alpha = \frac{1-x^2}{x^2+1}$

Значит, $\frac{2x}{x^2+1} + 2\cdot\frac{1-x^2}{x^2+1} = -1$

$3x+2-2x^2 = -x^2-1$

$x^2-2x-3=0$

$(x-3)(x+1)=0$

$x\in\{-1;3\}$

5) II случай:

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

П $x = \operatorname{tg}\alpha$, тогда $\frac{2x}{x^2+1} - 2\cdot\frac{1-x^2}{x^2+1} = -1$

$2x-2+2x^2 = -x^2-1$

$3x^2+2x-1=0$

$x\in\left\{-1;\frac{1}{3}\right\}$

6) $\exists$ ω пересекает прямую KL в т. L' отличной от B. Так как т. K лежит на отрезке AK' между т. ~~касания~~ сферы ω (внутри); т. K должна лежать на отрезке BL', причём $KB \cdot KL' = \frac{1}{2}$ (ST. т. K относительно ω) $\Rightarrow$

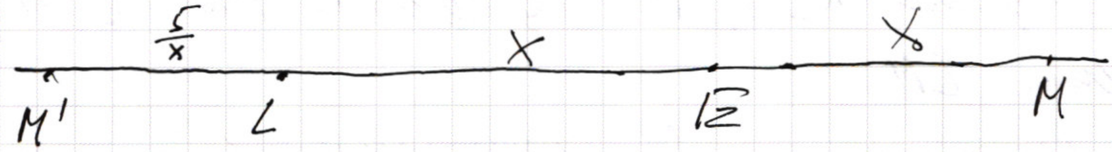
$\Rightarrow KL' = \frac{1}{2} / \frac{3}{2} = \frac{1}{3}$

7) Степень т. L относительно ω равна $LB \cdot LL' = \frac{3}{2}\left(3 + \frac{1}{3}\right) = 5$

8) Пусть ω пересекает ML в т. M', отличной от E, тогда есть 3 варианта расположения M': на отрезке ML и вне его (за точкой L и за точкой M).

Разберём их

а)



$LM' = \frac{5}{x}$ (из ST. т. L)

$ME \cdot MM' = 1$ (ST т. M)

$\left(\frac{5}{x} + 2x\right) \cdot x = 1$

$\Downarrow$

$2x^2 = -4$

$\varnothing$

~~б)~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

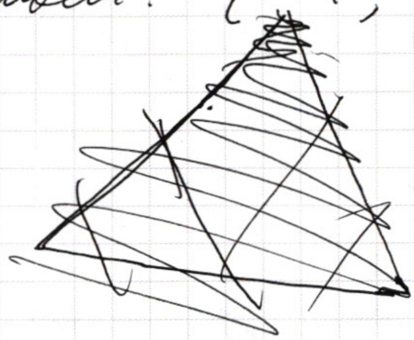
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.к. известно, что решений не меньше 3, ответ: $\{-1; \frac{1}{3}; 3\}$



1) Пусть сфера, на которой лежат середины рёбер (кроме середины KN) и т. N — ω ∈

2) A — середина KM, B — середина KL, C — середина NL, D — середина MN, E — середина LM.

3) Степень т. M относительно ω равна $MD \cdot MN = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \sqrt{2} = 1$

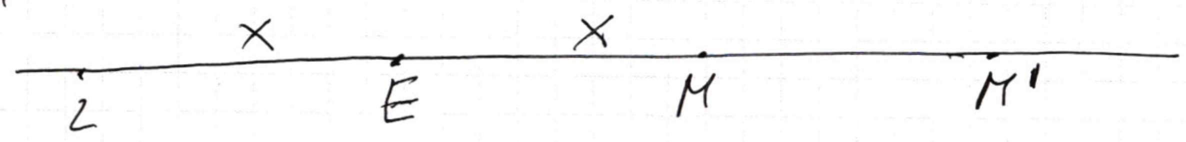
4) $\exists$ ω пересекает KM в точке K', отличной от A, тогда т. M равна $MA \cdot MK' = 1 \Rightarrow MK' = \frac{1}{MA} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$, значит K' лежит на MK за т. K, причём $KK' = K'M - KM = 2 - 1 = 1$

5) Степень т. K относительно ω равна $KA \cdot KK' = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

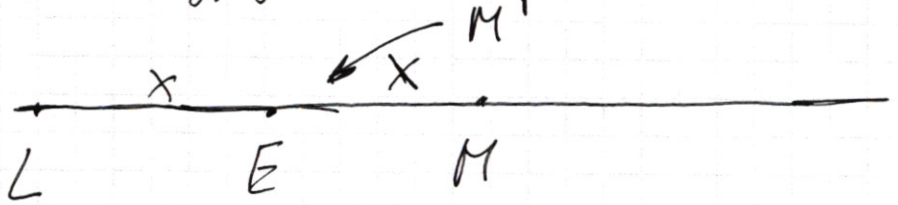
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

б)



Такой случай невозможен, т.к. с одной стороны M лежит внутри ω (на EM'), а с другой — вне ω (вне окр. MD)

в)



$LM' = \frac{5}{x}$ (из ст. L)

$ME \cdot MM' = 1$ (ст. т. M)

$\left(2x - \frac{5}{x}\right) \cdot x = 1$

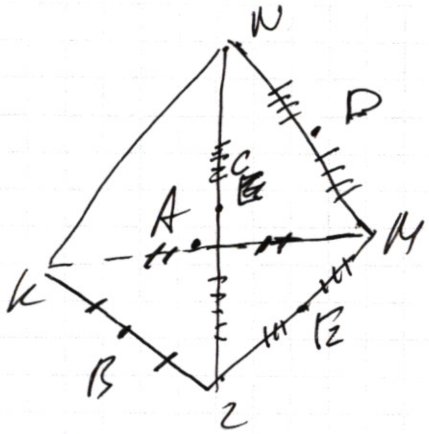
$\Downarrow$

$2x^2 = 6$

$x = \sqrt{3}$

$\Downarrow$

$LM = 2x = 2\sqrt{3}$


N
D
C
E
A
M
K
B
Z
E