# МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

# ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

## 11 класс

ВАРИАНТ 7 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20, \\ y + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = -44. \end{cases}$$

2. [4 балла] Решите неравенство

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \leqslant \log_{125x} \frac{1}{x^2}.$$

3. [5 баллов] Найдите количество семизначных чисел, обладающих следующим свойством: сумма остатков от деления числа на некоторые три последовательные степени числа десять равна 12531.

4. [5 баллов] Даны равнобокая трапеция $ABCD$ ($AD$ и $BC$ – основания, $AD > BC$) и окружность $\omega$ с центром $C$, касающаяся стороны $AD$. Касательные к $\omega$, проведённые из точки $B$, пересекают прямую $AD$ в точках $P$ и $Q$ (точка $P$ лежит между $Q$ и $D$). На продолжении стороны $CB$ за точку $B$ выбрана точка $N$ так, что $\angle CPN$ – прямой. Найдите углы $ADC$, $NQC$ и площадь четырёхугольника $NCDQ$, если известно, что $\angle NCP = \operatorname{arctg} \frac{5}{12}$, $AP = 13$, $NC = 26$.

5. [5 баллов] Дана система уравнений

$$\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right), \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right). \end{cases}$$

Найдите все возможные значения выражения $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y$, если известно, что оно определено и что этих значений не меньше двух.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \leqslant ax + b \leqslant -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$

выполнено для всех $x$ на промежутке $\left[\frac{1}{2}; \frac{9}{2}\right]$.

7. [6 баллов] Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, грани $ABB_1A_1$ и $BB_1C_1C$ которого являются прямоугольниками. Сфера $S$ касается прямых $C_1D_1$ и $CC_1$, плоскости $BB_1C_1$, а также плоскости $ABB_1$ в точке $A$. Эта сфера повторно пересекает отрезок $AC_1$ в точке $M$. Найдите $\angle ABC$ и объём параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, если известно, что $AM = 3$, $C_1M = 2$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

① $$-\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20 \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44. \end{cases}$$

$$7x-y = 20+44$$

$$\boxed{7x-y=64}$$

$$+\begin{cases} 7x+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=20 \\ y+\sqrt[3]{49x^2-y^2}=-44 \end{cases}$$

$$7x+y+2\sqrt[3]{(7x-y)(7x+y)}=-24. \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad 7x+y+2\sqrt[3]{64(7x+y)}=-24.$$

$$7x+y+2\cdot 4\sqrt[3]{7x+y}=-24$$

Пусть $7x+y=k$ : $k+8\sqrt[3]{k}+24=0.$

$\boxed{\text{при } k=-8}$ : $-8+8\cdot(-2)+24=0$

$-24+24=0.$

$$\Rightarrow \quad \boxed{7x+y=-8}$$

$$+\begin{cases} 7x-y=64 \\ 7x+y=-8 \end{cases}$$

$$14x=56 \qquad x=\frac{56}{14}=4. \quad \Rightarrow \quad y=7\cdot 4-64=28-64=-36$$

Отв: $x=4 \quad y=-36.$

③ $\overline{abcdefg}$ – 7-ми значное число.

$10^x ; 10^{x+1} ; 10^{x+2}$ При $x\leq 2$ : $10^2 \ 10^3 \ 10^4 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ остаток равен: $1000d+200e+30f+3g=12531.$

$1000\cdot 9+200e+30f+3g=12531.$

при $d=9$ $e=9$ $f=9$ $g=9$. $200e+30f+3g=3531$ остаток.

$200\cdot 9+30\cdot 9+3\cdot 9=2097$ – макс.

$2097<3531 \Rightarrow$ При $x\leq 2$ остаток меньше 12531 [сумма]

$\Rightarrow \boxed{x\geq 3}$ При $10^3 ; 10^4 ; 10^5$ остаток равен:

$10000c+2000d+300e+30f+3g=12531.$ (т.к при $c=1$ $d=0$. $3(100e+10f+g)=2531$)

$c\leq 1.$ : при $c=1$. получится только при $d=1$ $e=1$ $f=7$ $g=7$.

$10000\cdot 1+2000\cdot 1+300\cdot 1+30\cdot 7+3\cdot 7=12531.$ $2531 \not\vdots 3$.

при $c=0$ получится только при $d=6$ $e=1$ $f=7$ $g=7$.

$10000\cdot 0+2000\cdot 6+300\cdot 1+30\cdot 7+3\cdot 7=12531.$

при $d=5;4;\ldots$ $300e+30f+3g=m$. $m \vdots 3$.

при $d$ отличном от 6 $m$ не делится на 3 или $m$ – слишком маленькое $\Rightarrow$ из-за этого получается меньше $\underline{12531}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

при $10^4$ $10^5$ $10^6$

остаток : $1000d+100e+10f+g+10\,000c+1000d+100e+$
$+10f+g+100\,000b+10\,000c+1000d+100e+10f+g=$

$=100\,000b+20\,000c+3000d+300e+30f+3g=12531.$

~~в~~ чтобы остаток был равен 12531. $b$ должно быть равным 0 , и $c$ тоже равно 0. Тогда

$3000d+300e+30f+3g=12531. \quad |:3.$

$1000d+100e+10f+g=4177.$ при $d=5$ - остаток больше $\underline{4177}$

$d=4 \quad e=1 \quad f=7 \quad g=7.$

при $d=3 \quad 3000+100e+10f+g=4177.$

$100e+10f+g=1177.$

максимальное $100e+10f+g=100\cdot 9+90+9=$
$=999 < 1177.$ поэтому ~~...~~ $\underline{d\geq 4}.$

при $10^5$ $10^6$ $10^7$. нельзя так как. в остаток войдёт всё число $\overline{abcdefg}$ , а остаток должен быть 12531. , значит $a=0 \Rightarrow \overline{abcdefg}$ - не семизначное число , это противоречит условию

Все варианты таких чисел : при $10^3$ $10^4$ $10^5$

$90\cdot 2$ чисел. $\begin{cases} a \quad b \quad c=1 \quad d=1 \quad e=1 \; f=7 \; g=7. \\ a \quad b \quad c=0 \quad d=6 \quad e=1 \quad f=7 \quad g=7. \end{cases}$

при $10^4$ $10^5$ $10^6$

$a \quad b=0 \quad c=0 \quad d=4 \quad e=1 \quad f=7 \quad g=7.$ - 9 чисел

вариаций $\overline{ab}$ всего 90 , т.к $a=1,2\ldots\ldots 9$
$b=0,1\ldots\ldots 9$

вариаций ~~чисел~~ цифры $a$ всего 9.

~~то~~ всего вариантов $\underline{90}\cdot 2+9=180+9=189.$

~~...~~ т.к при $\overline{ab}$ вариантов остальных $\overline{cdefg}$ - 2.

Ответ : 189 чисел

② $\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x}\frac{1}{x^2}$ ОДЗ : $x\neq 0.$ $125x\neq 1.$ $x\neq\frac{1}{125}.$

$\sqrt{4\log_{5x} x} \leq \log_{125x} x^{-2} \Rightarrow 2\sqrt{\log_{5x} x} \leq -2\log_{125x} x.$

$\sqrt{\log_{5x} x} \leq -\log_{125x} x \qquad \log_a b\cdot\log_c a=\log_c b.$

$\log^{\frac{1}{2}}_{5x} x+\log_{5x} x\cdot\log_{125x} 5x\leq 0. \quad \Leftarrow \log_{5x} x\cdot\log_{125x} 5x=\log_{125x} x$

$\log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\left(1+\log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\cdot\log_{125x} 5x\right)\leq 0.$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\leq 0 \\ 1+\log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\cdot\log_{125x} 5x\geq 0. \end{cases} \\ \begin{cases} \log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\geq 0. \\ 1+\log^{\frac{1}{2}}_{5x} x\cdot\log_{125x} 5x\leq 0. \end{cases} \end{array}\right.$

$\Rightarrow \begin{cases} 0<5x<1. \\ x\geq (5x)^0 \end{cases} \quad \begin{cases} 0<x. \\ x<\frac{1}{5}. \Rightarrow \varnothing \\ x\geq 1. \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} 5x>1 \\ x\leq (5x)^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{5}. \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow$ ~~...~~ $x=1.$

$\Rightarrow \begin{cases} 0<5x<1 \\ x\leq (5x)^0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{5} \\ x\leq 1. \end{cases} \Rightarrow \left(0;\frac{1}{5}\right). \quad \begin{cases} 5x>1 \\ x\geq (5x)^0 \end{cases} \begin{cases} x>\frac{1}{5} \\ x\geq 1. \end{cases} \; x\geq 1$

МФТИ

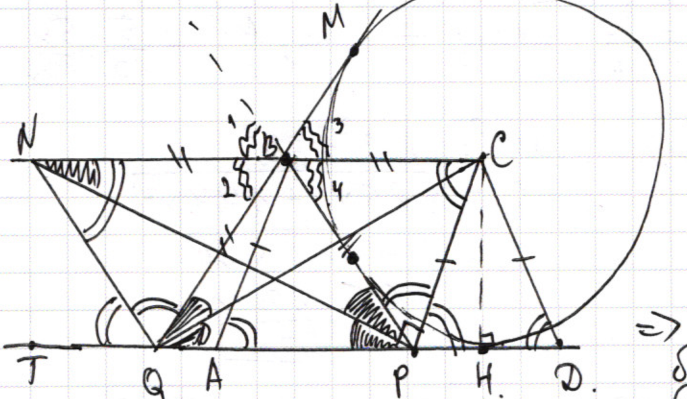
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(4) $\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$ $AP=13$ $NC=26$.




(1). Окружность $\omega$ – вневписанная окружность $\triangle QBP$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow BC$ – биссектриса $\angle MBP$
$PC$ – биссектриса $\angle BPD$ $\Rightarrow$
$\Rightarrow$ (2) $\angle BPC = \angle CPD$ как накрест леж.
$\angle BCP = \angle CPD$ т.к $BC \parallel AD$ и секущая $CP$. т.к $ABCD$ – трапеция $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle BCP = \angle BPC \Rightarrow \triangle BCP$ – равнобедренный $\Rightarrow BC = BP$.
(3) т.к $\angle NPC = 90^\circ \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle NPQ + \angle CPD = 180^\circ - \angle NPC = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$
т.к $\angle BPC = \angle CPD \Rightarrow \angle NPB = \angle NPQ$
$\angle NPQ = \angle BNP$ как накрест лежащие при $NC \parallel AD$ и секущ $NP$ т.к $ABCD$ - трапеция $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (4) $\angle BNP = \angle BPN \Rightarrow \triangle NBP$ – равнобедр $\Rightarrow NB = BP$.
из (2) $\Rightarrow BC = BP$
$\angle NPC = 90^\circ$ $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow PB$ - медиана ($NB = BC = BP$).

(5) $AP = 13$ по усл.
$NB = BC = BP$ по (4) $\Rightarrow \frac{NC}{2} = NB = BC = \frac{26}{2} = 13$ $\Big\} \Rightarrow AP = BC$
$AP \parallel BC$ т.к $ABCD$ - трапец $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow APCB$ – параллелогр $\Rightarrow \angle BCP = \angle BAP = \angle ADC$, т.к $ABCD$ – равнобокая трапеция $\Rightarrow \angle BCP = \angle NCP = \angle ADC =$
$= \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$.

(6). т.к $NP$ - биссектриса; $BN$ - биссектриса, т.к $\angle 1 = \angle 4$ – вертикальные
$\angle 2 = \angle 3$
$\angle 3 = \angle 4$, т.к $BC$ – бисс $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle 1 = \angle 2 \Rightarrow N$ – центр вневписанной окружности $\triangle BQP \Rightarrow$
$\Rightarrow$ (7) $QN$ – биссектриса $\Rightarrow \angle TQN = \angle NQB$.
$\angle TQN = \angle QNB$ как накрест лежащие $NC \parallel QD$ и секущ $NQ$ т.к $ABCD$ – трапеция $\Big\} \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle NQB = \angle QNB \Rightarrow \triangle NBQ$ – равнобедр. $\Rightarrow NB = QB$.

(8) $\triangle NBQ = \triangle CBP$ по 2-м равным сторонам $NB = BC = BQ =$
$= BP$ и углу между ними
$\angle 2 = \angle 4$. $\Rightarrow BQ = BP \Rightarrow \angle BQP = \angle BPQ$, т.к $C$ – центр вневписанной окружности $\Rightarrow QC$ – биссектриса $\Rightarrow \angle BQC = \angle BPN =$
$= \angle NPQ = \angle CQP \Rightarrow \angle NPC = \angle NPB + \angle BPC = \angle CQB + \angle BQN = 90^\circ$.
т.к $\angle NPB = \angle CQB$ и $\angle BPC = \angle BQN$, а $\angle NPC = 90^\circ$

⑨ $\angle NQT = \angle CDP \Rightarrow CD \parallel NQ$ – как парал. прямые при накрест лежащих углах с секущу $\underline{TD}$
т.к $ABCD$ – трапеция $\Rightarrow NC \parallel QD$.

⑩ Из ⑨ $\Rightarrow NCDQ$ – параллелограмм $\Rightarrow$

$\Rightarrow S_{NCDQ} = NC \cdot CH$
где $H$ – точка касания
а $C$ – центр окружности

⑪ Рассмотрим $\triangle NPC$: $\frac{NP}{PC} = tg(\angle NCP)$

$\frac{NP}{PC} = tg(arctg \frac{5}{12}) \Rightarrow \frac{NP}{PC} = \frac{5}{12} = \frac{5x}{12x}$

$\triangle NPC$ – прямоугольный
по Т. Пифагора: $NC^2 = NP^2 + PC^2$

$NC = \sqrt{25x^2 + 144x^2}$

$26 = \sqrt{169x^2}$

$26 = 13x$

$\boxed{x = 2}$

$CP = 12x = 12 \cdot 2 = 24$.

$\triangle CPD$ – равнобедренный, т.к $\angle CDP = \angle CPD \Rightarrow CP = CD = 24$.

⑫ Рассм. $\triangle CPH$ – прямоугольный. $(\angle CHP = 90°)$

~~tg(∠CHA)~~ $tg(\angle CPH) = tg(\angle NCP)$, т.к $\angle CPH = \angle NCP$

$tg(\angle CPH) = \frac{CH}{PH} = \frac{5y}{12y} = tg(arctg \frac{5}{12})$.

по Т. Пифагора.

$CP^2 = CH^2 + PH^2$.

$24 = \sqrt{25y^2 + 144y^2}$

$24 = \sqrt{169y^2}$ $\quad 24 = 13y$.

$CH = 5y = \frac{5 \cdot 24}{13}$. $\quad y = \frac{24}{13}$

⑬ $S_{NCDQ} = NC \cdot CH = \frac{\cancel{26}^{2} \cdot 5 \cdot 24}{\cancel{13}} = 10 \cdot 24 = 240$ ед$^2$

Отв: $\angle ADC = arctg \frac{5}{12}$

$\angle NQC = 90°$

$S_{NCDQ} = 240$ ед$^2$.

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Продолжение ② $\Rightarrow$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ 1+\log_{5x}^{\frac12} x\cdot\log_{125} 5x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1 \\ 1\geq 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x=1} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x\geq 1 \\ x\in\left(0;\frac15\right) \end{array}\right. \Rightarrow \left(0;\frac15\right)\cup\left[1;+\infty\right) \Rightarrow \left(\frac{1}{125};\frac15\right) \\ 1+\log_{5x}^{\frac12} x\cdot\log_{125x} 5x \leq 0 \end{cases}\end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ т.к $\log_{5x} x \geq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{125x} 5x \leq 0.$

При $\log_{5x}^{\frac12} x \leq 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \log_{5x} x = 0.$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0<125x<1 \\ 5x\geq(125x)^0 \end{cases} \quad 5x\geq 1. \quad \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{125} \\ x\geq\frac15 \end{cases} \varnothing \\ \begin{cases} 125x>1 \\ 5x\leq(125x)^0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{125} \\ x\leq\frac15 \end{cases} \Rightarrow = \left(\frac{1}{125};\frac15\right]. \end{array}\right.$$

$0 \leq \sqrt{\log_{5x} x} \leq -\log_{125x} x$

$0 \leq -\log_{125x} x.$

$\log_{125x} x \leq 0.$

0  $\frac{1}{125}$  $\frac15$  1

$\Rightarrow \left(\frac{1}{125};\frac15\right).$

$\begin{cases} 0<125x<1 \\ x\geq(125x)^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0<125x<1 \\ x\geq 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x>0 \\ x<\frac{1}{125} \\ x\geq 1 \end{cases} \varnothing$

0  $\frac{1}{125}$  1

$\begin{cases} 125x>1 \\ x\leq(125x)^0 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\frac{1}{125} \\ x\leq 1 \end{cases} \Rightarrow \boxed{x\in\left(\frac{1}{125};1\right]} - \text{ОДЗ}.$

Отв: $x=1$. и $x\in\left(\frac{1}{126};\frac15\right)$.

☐ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

2) $\sqrt{\log_{5x} x^4} \leq \log_{125x} \frac{1}{x^2}$ $\qquad \frac{1}{x^2} \geq 0$. $\qquad x \neq 0$

$\log_{125x} \frac{1}{x^2} = \log_{125x} x^{-2} = -2\log_{125x} x$.

$\sqrt{\log_{5x} x^4} = \sqrt{4\log_{5x} x} = 2\sqrt{\log_{5x} x}$.

$\log_2 4 > 0$. $\quad 2\sqrt{\log_{5x} x} \leq -2\log_{125x} x$.

$\log_{125x} x \leq 0$. $\quad 0 \leq \sqrt{\log_{5x} x} \leq -\log_{125x} x$.

$\log_{5x} x \quad 4 > 2^0 = 1$

$0 \leq -\log_{125x} x$.

$0 \geq \log_{125x} x$.

$\log_a \cancel{b} x < b$ $\quad x > a^b$.

$1 < a < 0$

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x + \log_{125x} x \leq 0$.

$\begin{cases} 0 < 125x < 1. \\ x \geq (125x)^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 < 125x < 1 \\ x \geq 1. \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} 0 < x \\ x < \frac{1}{125} \\ x \geq 1 \end{cases}$ $\quad x > 0$ $\quad \frac{1}{10}$.

$\begin{cases} 125x > 1 \\ x \leq (125x)^0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x > \frac{1}{125}. \\ x \leq 1. \end{cases}$ $\qquad \boxed{\frac{1}{125} < x \leq 1}$. $\quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{5}$.

$\frac{1}{10}$

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \qquad \frac{1}{10} \qquad -\log_{125x}^{\frac{1}{2}} x$. $\qquad \frac{125}{2}. \quad -2. \quad \frac{1}{2}$.

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x = t$. $\qquad \log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x + \log_{5x} x \cdot \log_{125x} 5x$. $\qquad \log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$.

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \left(1 + \log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{125x} 5x\right) \leq 0$ $\quad \log_{5x} x \cdot \log_{125x} 5x = \log_{125x} x$

$\begin{cases} \log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \leq 0. \qquad \sqrt{\log_{5x} x} \leq 0. \\ 1 + \log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \cdot \log_{125x} 5x \geq 0. \end{cases}$ $\qquad \log_{5x} x \leq 0$

$\cancel{(5x)^0 = x}$. $\quad \cancel{1 = x}$.

$5x > 1 \quad x > \frac{1}{5}$

$t + t^{\frac{3}{2}} \log_{125x} 5x \leq 0$.

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \geq 0$. $\qquad t^2 \log_{125x} 5x + t \leq 0$.

$\begin{cases} t \geq 0 \\ t\log_{125x} 5x + 1 \leq 0 \end{cases}$ $\qquad t(t\log_{125x} 5x + 1) \leq 0$

$\log_{5x}^{\frac{1}{2}} x \geq 0$. $\qquad \begin{cases} t \leq 0 \\ t\log_{125x} 5x + 1 \geq 0. \end{cases}$

$\log_{125x} 5x \; t^2 + t \leq 0$.

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $\begin{cases} 7x + \sqrt[3]{49x^2 - y^2} = 20 \\ y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} = -44 \end{cases}$

$20 + 44 = 64$ $\quad (7x-y)(7x+y)$

$7x - y + \sqrt[3]{49x^2-y^2} - \sqrt[3]{49x^2-y^2} = 64$

$7x - y = 64$

$y = 7x - 64$

$4 \cdot 4 = 16 \quad 16 \cdot 4 = 64$

$2^2 \cdot 2^3 = 4 \cdot 8 = 32$

$2^5 = 32$

$k^{\frac{1}{3}} \cdot k^{\frac{2}{3}} = k^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}}$

$y^2 = 49x^2 - 128 \cdot 7x + 64^2$

$7x + \sqrt[3]{(7x-y)(7x+y)} = 20$

$7x+y + 2\sqrt[3]{64(7x+y)} = \cancel{20} - 24$

$k + 2\sqrt{64 k} = -24$

$k + 2 \cdot 4\sqrt[3]{k} = -24$

$k = -8$

$64 - 8 = 72$

$k + 8\sqrt[3]{k} = -22$

$k + 8\sqrt[3]{k} + 24 = 0$

$24 \quad -8$

$64 - 8 = 56$

$-8 \quad = 8 \quad 48$

$-2 \cdot 8 = -16 \quad 8 \cdot (-2)$

$8 \cdot (-64) = 2 \cdot (-4)$

$-16$

$-4 = -28$

$\boxed{k = -8} \Rightarrow \begin{cases} 7x + y = -8 \\ 7x - y = 64 \end{cases}$

$(7x+y)(7x-y)$ $\quad -28+36 \quad -28-36$

$14x = 56$

$\boxed{x = \frac{56}{14} = 4}$

$14 \cdot 4 = 56$

$y = -8 - 7x = -8 - 7 \cdot 4 = -8 - 28 = -36$

$y = -36$

$x = 4$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

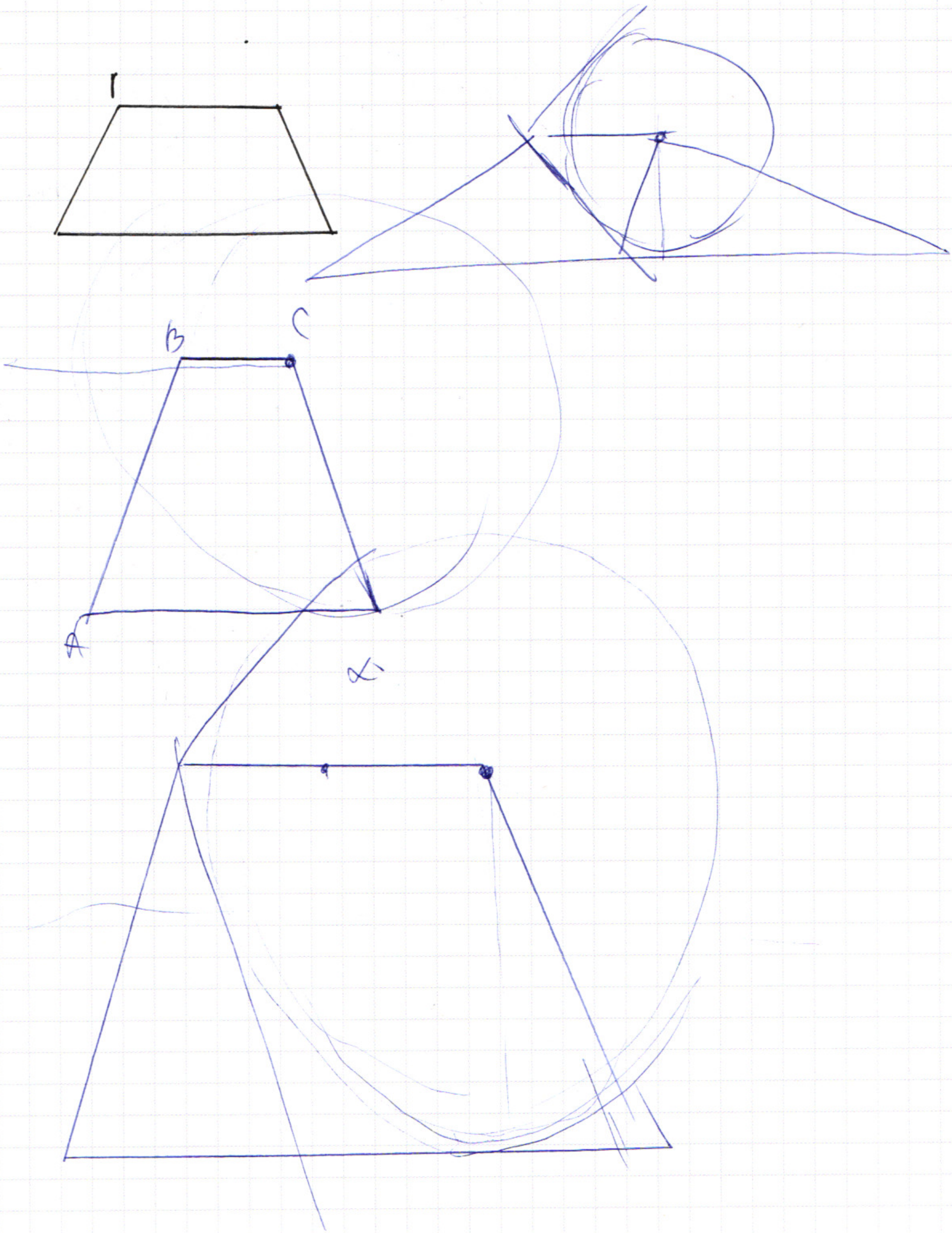
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

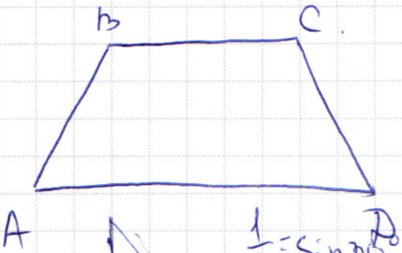
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА






$\checkmark\ \angle ADC - ?$

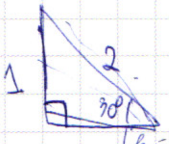
$\angle NQC - ?$

$S_{NCDQ} - ?$

$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$AP = 13$

$NC = 26$




$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$

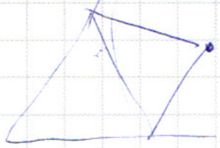
$\frac{\sin}{\cos}$

sin – прот/гип

cos

tg =

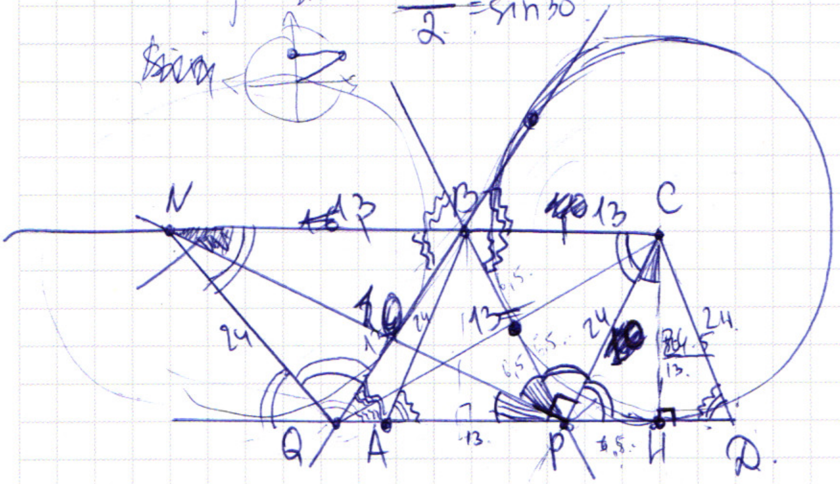
$\frac{1}{2} = \sin 30^\circ$



~~прот~~ ~~гип~~ прот/гип

$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

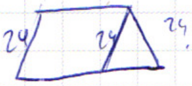
$\sin = \frac{\text{прот}}{\text{гип}}$



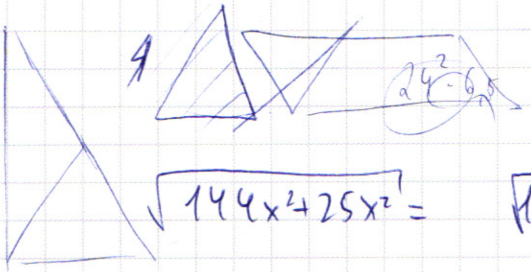

$BC \parallel AD \Rightarrow \angle BCP = \angle CPD \Rightarrow$

$\Rightarrow \triangle BCP$ — равнобедр.

$tg\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right.$




$\angle NCP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$




$tg\ \frac{5}{12} = \frac{NP = 5x}{PC = 12x}$

$5PC = 12NP$

$\sqrt{144x^2 + 25x^2} = \sqrt{169x^2} = 13x = NC = 26$

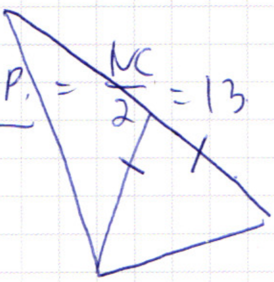
$x = 2$

$tg\ \frac{5}{12} = \frac{CH}{PH}$ $\quad \frac{5y}{12y}$

$\sqrt{25y + 144y^2} = \sqrt{169y^2} = 13y = 10$

$CH = 5y = \frac{5 \cdot 10}{13} = \frac{50}{13}$ $\quad y = \frac{10}{13}$

$NB = BC = BP = \frac{NC}{2} = 13$



$AB = PC \Rightarrow \angle BCP = \angle BAP = \angle ADC = \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

$\angle NCP$

$\angle NPB = 90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{5}{12} = \angle NPQ$

$2\cdot\left(90^\circ - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}\right) = \angle BPQ = \angle BQP$

$\angle NQC = \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + \angle BQP = \operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 180^\circ - 2\operatorname{arctg}\frac{5}{12} =$

$= 180^\circ - \operatorname{arctg}\frac{5}{12}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

3) $10^x \quad 10^{x+1} \quad x^{x+2}$ 1000 100000

12531

2531 − 1500 = 1031; 300 × 7 = 2100; 2531 − 2100; 2531 − 1800 = 731

a b | c d e f g

$10^1 \quad 10^2 \quad 10^3$

$12531 = g + 10f + g + 100e + 10f + g =$ 10000

$= 3g + 20f + 100e = 3\cdot 9 + 20 \cdot 9 \cdot 100 \cdot 9 =$

$= 27 + 180 + 900 = 1107 < 12531$

900 + 180 = 1080; 1080 + 27 = 1107; 12531 − 8000 = 4531; 177 × 3 = 531; 531 : 3 = 177

$10^2 \quad 10^3 \quad 10^4$

12531 − 6000 = 6531 d=

$g + 10f + g + 10f + 100e + g + 10f + 100e + 1000d =$

$= 3g + 30f + 200e + 1000d$ 6531 12531 − 9000 = 3531

100000 1000. 9000 + 1800 = 10800; 10800 + 297 = 11097; 30 × 9 = 270; 3 × 9 = 27; 270 + 27 = 297; 200 × 9 = 1800; 2000 × 5 = 10000

$10^3 \quad 10^4 \quad 10^5$

= 2531. 2000 × 4

$= 3g + 30f + 300e + 2000d + 10000c$

$10^4$ при c = 1. d = 1.

c = 1 d = 1 e = 1 f = 7 $300e + 30f + 3g = 531$ g = 7

12531 / 2531

ab $9 \cdot 10 = 90$

$3(100e + 10f + g) = 531$

10 11 12 13

c = 0

1 7 7

$100e + 10f + g = 177$

$\boxed{100 \cdot 1 + 10 \cdot 7 + 7 = 177}$

$100 \cdot 1 + 10f + g = 177$

$10f + g = 77$

$3g + 30f + 300e + 2000d = 12531$

2000 × 6 = 12000

$300e + 2000 \cdot 6 + 0$

$\boxed{c = 0 \quad d = 6 \quad e = 1 \quad f = 7; \ g = 7}$ 100.0

$10f + g = 177$

d = 5.

300 × 8 = 2400; 300 × 9 = 2700

$3g + 30f + 300e + 10000 = 12531$

$3g + 30f + 300e = 2531$

$3g + 30f + 300 \cdot 8 = 2400 + 131$

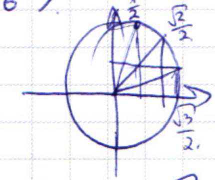
$3g + 30f = 131$

☐ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

(5) $\begin{cases} \sin(x-y) = -9\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right) \\ \cos(x-2y) - \sqrt{3}\sin(x-2y) = 20\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right) \end{cases}$

$$\sqrt{\frac{175}{4} - 5x - x^2} \le ax + b \le -\frac{x^2}{3} + \frac{2x}{3} + \frac{27}{4}$$



$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y - \sin y \cos x = -9\left(\cos x \cdot \underset{\frac{1}{2}}{\cos\frac{\pi}{3}} + \cancel{\cos}\ \sin x \underset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\sin\frac{\pi}{3}}\right) \\ \cos x \cdot \cos 2y + \cancel{\cos}\ \sin x \sin 2y - \sqrt{3}(\sin x \cdot \cos 2y - \sin 2y \cos x) = \end{cases}$$

$$= 20\left(\sin x \cdot \underset{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\cos\frac{\pi}{6}} + \underset{\frac{1}{2}}{\sin\frac{\pi}{6}} \cdot \cos x\right)$$

$$\begin{cases} \sin x \cdot \cos y - \sin y \cos x = -\frac{9}{2}\cos x - \frac{9\sqrt{3}}{2}\sin x \\ \cos x \cos 2y + \sin x \sin 2y - \sqrt{3}\sin x \cdot \cos 2y + \sqrt{3}\sin 2y \cos x = \end{cases}$$

$$= \frac{\cancel{20}^{10}\sqrt{3}}{\cancel{2}}\sin x + \frac{\cancel{20}^{10}}{\cancel{2}}\cos x = 10\sqrt{3}\sin x + 10\cos x$$

$$\cos((x-y)-y) = \cos(x-y)\cdot\cos y + \sin(x-y)\cdot\sin y$$

$$\sqrt{\log_{5x} x^4} \le \log_{125x}\frac{1}{x^2}$$

$$\sqrt{\log_{5x} x} \le -\log_{125x} x$$

$$\log_{5x} x \ge 0$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < 5x < 1 \\ \cancel{\ \ } \quad x \le 5x^0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{5} \\ x \le 1 \end{cases} \Rightarrow 0 < x < \frac{1}{5} \\ \begin{cases} 5x > 1 \\ x \ge 5x^0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > \frac{1}{5} \\ \cancel{x} \ge 1 \end{cases} \quad x \ge 1 \end{array}\right.$$

$\left(0; \frac{1}{5}\right) \cup [1; +\infty)$

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$$

$$\log_{125x} x$$

$$\log_a b \cdot \log_c a = \log_c b$$

$$\log_{5x} x \cdot \log_{125x} 5x = \log_{125x} x$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

# ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$10^3$ $10^4$ $10^5$.

ab $c=1$ $d=1$ $e=1$ $f=7$ $g=7$. $d=2$.

ab. $c=0$ $d=6$ $e=1$ $f=7$ $g=7$.

$c=0$ $d\neq 5$. $d\neq 4$ $d=3$.

$10^3$ $10^4$ $10^5$,

$9\cdot 10=90$ – ab вариантов.

$90\cdot 2=180$.

12531 | 3 = 4177

$\begin{array}{r} 4177 \\ \times\ 3 \\ \hline 12531 \end{array}$

$10^4$ $10^5$ $10^6$

$1000d+100e+10f+g+10000c+1000d+100e+10f+g+$

$+\cancel{1000000}\ 100000b+10000c+1000d+100e+10f+g=$

$=100.000b+20000c+3000d+300e+30f+3g.$

$=12531$

a

$b=0$ $c=0$.

$3000d+300e+30f+3g=12531$

$1000d+100e+10f+g=4177$.

$d=4$ $e=1$ $f=7$ $g=7$.

при $d=3$. $3000+100e+10f+g=4177$

$100e+10f+g=1177$.

$900+10f+g=1177$.

$10f+g=277$.

$90+9=277$.

189. 9.

$10^5$ $10^6$ $10^7$.

$10000c+1000d+100e+10f+g+$

$+100000b+10000c+1000d+100e+10f+g+$

$+1000000a+100000b+10000c+1000d$

$+100e+10f+g=$

$=1000.000a+200.000b+30000c+3000d+300e+30f+3g=$

$=0+0+0+3000d+300e+30f+3g.=12531$

4 1 7 7.

$\begin{array}{r} 12531 \\ -\ 9000 \\ \hline 3531 \end{array}$

$\begin{array}{r} 1800 \\ +\ 270 \\ 27 \\ \hline 2097 \end{array}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)