МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

~~1. [3 балла]~~ Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

~~2.~~ [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

5 + 4 + 3

12 + 3

15

14 + 2

16

~~3.~~ [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (y-6)-6(x-1)=\sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=45+9+36 \end{cases}$

Пусть $x-1=a$, $y-6=b \Rightarrow$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$ ($ab \geq 0 \Rightarrow a$ и b одного знака, $b-6a\geq 0$)

$\Downarrow$

$\begin{cases} b^2+36a^2-12ab=ab (1); \\ 9a^2+b^2=90 (2) \end{cases}$ $b^2=0$ – не корень, т.к. иначе $36a^2=0 \Rightarrow 9a^2+b^2=0\neq 90 \Rightarrow$ (1) делим на b^2,

$1+36\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\frac{a}{b}=0$

$\left(9\frac{a}{b}-1\right)\left(4\frac{a}{b}-1\right)=0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 9a=b \\ 4a=b \end{array}\right.$, подставим в (2):

$\left[\begin{array}{l} 9a^2+(9a)^2=90 \\ 9a^2+(4a)^2=90 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a^2=1 \\ a^2=\frac{90}{25} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a=1,\ b=9 \\ a=-1,\ b=-9 \\ a=\sqrt{\frac{18}{5}},\ b=4\sqrt{\frac{18}{5}} \\ a=-\sqrt{\frac{18}{5}},\ b=-4\sqrt{\frac{18}{5}} \end{array}\right.$ (т.к. одного знака)

проверим $b\geq 6a$:

$9\geq 6\cdot 1$, истина

$-9\geq -1\cdot 6$, ложь, постор. корень

$12\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\geq 6\cdot 3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$, ложь, постор. корень

$-12\sqrt{\frac{2}{5}}\geq 6\cdot\left(-3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}\right)$, истина $\Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \\ \begin{cases} x-1=-3\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}} \\ y-6=-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-3\sqrt{\frac{2}{5}} \\ y=6-12\sqrt{\frac{2}{5}} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;15)$ и $\left(1-3\sqrt{\frac{2}{5}};\ 6-12\sqrt{\frac{2}{5}}\right)$

1. $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

Пусть $2\alpha+2\beta = x$, $2\beta = y \Rightarrow$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(x+y)+\sin(x-y) = -\frac{2}{17}$

$\Downarrow$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x + \sin x\cos y - \sin y\cos x = -\frac{2}{17} \Rightarrow$

$\begin{cases} \sin x\cos y = -\frac{1}{17} \\ \sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

согл. осн. триг. тождеству, $\cos^2 y + \sin^2 y = 1 \Rightarrow$

$\sin y = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\begin{cases} \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases}$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{17}} + \cos 2\alpha\cdot\left(-\frac{4}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha + 1 = 0 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha + 1 = 0 \end{array}\right.$, $\begin{array}{l} \sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha \\ \cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \end{array} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \end{array}\right.$, $\cos^2\alpha = 0$ не корень $\Rightarrow : \cos^2\alpha$,

$\left[\begin{array}{l} -3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0 \\ 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} (1+tg\alpha)(-3tg\alpha+5) = 0 \\ (1+tg\alpha)(5tg\alpha-3) = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{3}{5} \\ tg\alpha = \frac{5}{3} \end{array}\right. \Rightarrow$ ответ: $-1; \frac{3}{5}; \frac{5}{3}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

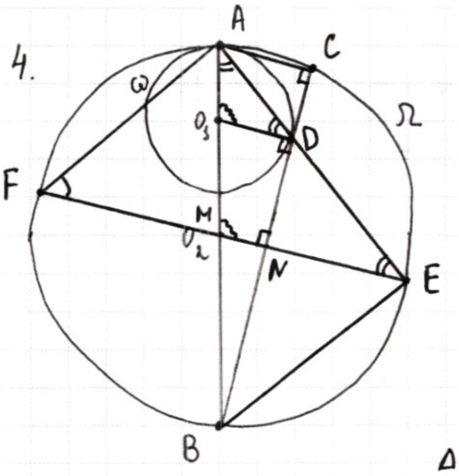
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



$AO_1 = r - ?$ $\quad CD = 12$

$AO_2 = R - ?$ $\quad BD = 13$

$\angle AFE - ?$

$S_{AEF} - ?$

1) Пусть $EF \cap BA = M$.

$EF \perp BC$ и $O_1D \perp BC$ (св-во касат.) $\Rightarrow$

~~EF∥BC⇒~~ $EF \parallel O_1D \Rightarrow$

$\triangle AO_1D \sim \triangle AME$, $AO_1 = O_1D = r \Rightarrow AM = ME$.

2) Рассмотрим $\triangle FAM$ и $\triangle BME$:

$AM = ME$, $\angle FMA = \angle BME$ (вертикальные), $\angle FAB = \angle FAM = \angle FEB = \angle MEB$ (опир. на $\smile FB$) $\Rightarrow \triangle FAM = \triangle BME$ и $FM = AM = EM = BM \Rightarrow$

$M = O_2$ – центр Ω.

3) $\angle ACB = 90°$, т.к. опир. на диаметр $AB \Rightarrow AC \parallel O_1D \parallel O_2E \Rightarrow$

$\triangle ACB \sim \triangle O_1DB \sim \triangle O_2NB$ $(N = FE \cap BC) \Rightarrow$

$$\frac{BC}{BD} = \frac{BA}{BO_1}, \; BC = CD + DB = 25 \Rightarrow \frac{25}{13} = \frac{2R}{2R - r} \Rightarrow$$

$$50R - 25r = 26R$$

$$R = \frac{25}{24} r$$

по т. Пиф. для O_1DB: $O_1D^2 + O_1B^2 = BD^2 \Rightarrow$

$$r^2 + \left(\frac{50}{24} - 1\right)^2 r^2 = 13^2 \Rightarrow \quad (26^2 + 24^2) r^2 = 13^2 \cdot 24^2 \Rightarrow$$

$$r^2 = \frac{13^2 \cdot 6^2 \cdot 4^2}{4(12^2 + 13^2)} = \frac{13^2 \cdot 6^2 \cdot 2^2}{313} \Rightarrow$$

$$r = \frac{156}{\sqrt{313}}, \quad R = \frac{25}{24} \cdot \frac{156}{\sqrt{313}} = \frac{325}{2\sqrt{313}}$$

4) $\triangle ACB \sim \triangle O_1DB \Rightarrow \frac{AC}{O_1D} = \frac{CB}{DB} \Rightarrow AC = \frac{156}{\sqrt{313}} \cdot \frac{25}{13} = \frac{300}{\sqrt{313}}$

по т. Пиф. для $\triangle ACD$: $AD^2 = AC^2 + CD^2 \Rightarrow AD^2 = \frac{300^2 + 12^2 \cdot 313}{313} \cancel{= \sqrt{\frac{45072}{313}}} \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~AD²...~~ $AD^2 = \frac{90000+45072}{313} = \frac{12^2\cdot(25^2+313)}{313} \Rightarrow$

$AD = 12\sqrt{\frac{938}{313}}$

5) $\triangle AO_2E \sim \triangle AO_1D \Rightarrow \frac{AO_1}{AO_2} = \frac{AD}{AE} \Rightarrow AE = 12\sqrt{\frac{938}{313}}\cdot\frac{25}{24} = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{938}{313}}$

по теор синусов для $\triangle AFE$, $\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R = 2AO_2 \Rightarrow$

$\sin\angle AFE = \frac{AE}{2AO_2}$, $\sin\angle AFE = \frac{25}{2}\sqrt{\frac{938}{313}}\cdot\frac{\sqrt{313}\cdot 2}{325\cdot 2} = \frac{\sqrt{938}}{26} \Rightarrow$

~~6) по теор синусов для ..., $\triangle AFE$, $\sin\angle FEA =$~~

$\cos\angle AFE =$

3. $|x^2-26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $26x - x^2 > 0$

Пусть $26x - x^2 = a > 0 \Rightarrow |x^2-26x| = |-a| = a \Rightarrow$

$a^{\log_5 12} + a \geq 13^{\log_5 a}$

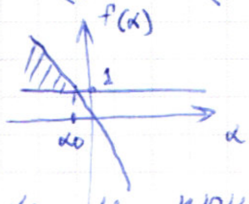
Пусть $a^{\log_5 12} = t \Rightarrow \log_a t = \log_5 12 \Rightarrow a = 5^\alpha$, $t = 12^\alpha$

Пусть $13^{\log_5 a} = f \Rightarrow \log_{13} f = \log_5 a = \log_5(5^\alpha) = \alpha \Rightarrow f = 13^\alpha$

$t + a \geq f \Rightarrow 12^\alpha + 5^\alpha \geq 13^\alpha \;|\, : 13^\alpha > 0 \Rightarrow$

$\left(\frac{12}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha \geq 1$

$\frac{12}{13}$ и $\frac{5}{13} < 1 \Rightarrow f(\alpha) = \left(\frac{12}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha$ монотонно убывает $\Rightarrow$



имеет 1 корень α_0 и при $\alpha \leq \alpha_0$,

$\left(\frac{12}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha \geq 1$

$\alpha_0 = 2$, т.к. $\frac{144+25}{169} = 1 \Rightarrow \alpha \leq 2$,

$a \leq 5^{\alpha_0}$, $a \leq 25 \Rightarrow$ ~~...~~ $0 < -x^2 + 26x \leq 25 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} -x^2+26x>0, & x\in(0;26) \\ (x-25)(x-1)\geqslant 0, & x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases} \Rightarrow x\in(0;1]\cup[25;26)$$

ответ.

6. $\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$ для всех x на $(\frac{2}{3};2] \Rightarrow$

I $18x^2-(51+a)x+(28-b)\leq 0$

$D=51^2+102a+a^2+(18b-18\cdot 28)\cdot 4$

$$\begin{cases} x_1=\frac{51+a-\sqrt{D}}{36}>\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{51+a+\sqrt{D}}{36}\leq 2 \end{cases}, \text{т.к. } x_1<x_2,\ \sqrt{D}\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} (72-51-a)^2\geqslant D \\ (51-24+a)^2>D \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2+21^2-42a\geqslant a^2+102a+51^2+72b-72\cdot 28 \\ a^2+27^2+54a>a^2+102a+51^2+72b-72\cdot 28 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 144a+72\cdot 30+72b-72\cdot 28\leq 0 \\ 48a+78\cdot 24-72\cdot 28+72b<0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a+b+2\leq 0 \\ 4a+6b-12<0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2a+b+2\leq 0 \\ 2a+3b-6\leq 0 \end{cases}$$

II $8-6x\geqslant(ax+b)(3x-2)=3ax^2+3bx-2ax-2b \Rightarrow$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b-8)\leq 0$

$D=9b^2+4a^2+36-24a+36b-12ab$

$$\begin{cases} x_1=\frac{2a-6-3b-\sqrt{D}}{6a}>\frac{2}{3} \\ x_2=\frac{2a-6-3b+\sqrt{D}}{6a}\leq 2 \end{cases}, \text{т.к. } x_1<x_2,\ \sqrt{D}\geqslant 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases}(-2a-6-3b)^2 > D \\ (10a+6+3b)^2 \geqslant D\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}4a^2+36+9b^2+36b+24a+12ab > 4a^2+9b^2+36+36b-24a-12ab \\ 100a^2+36+9b^2+120a+36b+60ab \geqslant 4a^2+9b^2+36+36b-24a-12ab\end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$\begin{cases}48a+24ab>0 \\ 96a^2+144a+48ab \geqslant 0\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}a(2+b)>0 \\ 2a^2+6a+ab \geqslant 0\end{cases}$$

$\mathrm{I}+\mathrm{II}$:
$$\begin{cases}a(2+b)>0 \\ a(2a+6+b) \geqslant 0 \\ 2a+b+2 \leqslant 0 \\ 2a+3b-6<0\end{cases}$$

5. $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)$, $\quad x\cdot\frac{1}{y} = (-x)\left(-\frac{1}{y}\right) \Rightarrow$

$4 \leqslant x \leqslant 28$ $\qquad f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right) = f(-x) + f\left(-\frac{1}{y}\right)$

$4 \leqslant y \leqslant 28 \Rightarrow \frac{1}{4} \geqslant \frac{1}{y} \geqslant \frac{1}{28}$

$f\left(-\frac{1}{y}\right) = -1$, т.к. $-1 \leqslant \frac{-1}{4y} \leqslant 0$ при любом $y \geqslant 4$

$f(-x) \in [-7;-1] \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right) \in [-8;-2] \Rightarrow$ всегда <0.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta)$

$2\alpha+2\beta = x \qquad 2\beta = y$

$\sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+y) + \sin(x-y) = -\frac{2}{17}$

$\sin x\cos y + \sin y\cos x + \sin x\cos y - \sin y\cos x = 2\sin x\cos y = -\frac{2}{17}$

$\sin x\cdot\cos y = -\frac{1}{17} \quad \sin x = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \cos y = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\beta+2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta\cos 2\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\beta = \begin{cases} \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ -\frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{cases} \Rightarrow$

$\left[\begin{array}{l} 4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1 \\ -4\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 5\cos^2\alpha - 3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \\ -3\cos^2\alpha + 5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} 3tg^2\alpha - 2tg\alpha - 5 = 0 \\ 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \quad tg\alpha = \frac{5}{3} \\ tg\alpha = 0{,}3 \quad tg\alpha = -0{,}5 \end{array}\right.$

$D = 1+15 = 16$

$\frac{-1+4}{10} = 0{,}3$

$-0{,}5$

$D = 1+15 = 16$

$t = \frac{-1+4}{5} = \frac{3}{5} \quad t = -1$

$D = 1+15 = 16$

$t = \frac{1+4}{3} = \frac{5}{3}$

$t = \frac{1-4}{3} = -1$

$5\left(tg\alpha + \frac{5}{10}\right)\left(t - \frac{3}{10}\right) =$

$= (10tg\alpha + 5)($

$(5tg\alpha +$

$-\frac{15}{100}\cdot 5$

$\frac{24^2}{24^2}x^2 + \left(\frac{26}{24}\right)^2 x^2 = 13^2$

$x = \frac{13^2\cdot 24^2}{24^2+26^2} = \frac{13^2\cdot 6^2\cdot 4^2}{4^2(12^2+13^2)} =$

$= \frac{13^2\cdot 6^2}{313}$

$x = \frac{78}{\sqrt{313}} \quad R =$

13, 25

144, 169, 313

144

156 | 24

$13\cdot\cancel{6\cdot 2} \qquad 12\cdot 2$

25 · 13 = 75

13 · 13 = 39, 13 → 169; 144 → 313

13 · 12 = 26, 13

12 · 25 = 50, 25 → 300

12 · 25 = 60, 24 → 300

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$x(y-6)-(y-6)=(x-1)(y-6)$

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$ $\qquad y-6-6x+6$

$9x^2+y^2-18x-12y=45+9+36$ $\qquad 9(x^2-2x+1)$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$ $\qquad y^2-12y+36$

$$\begin{cases}9a^2+b^2=90\\ \sqrt{ab}=b-6a\end{cases} \Rightarrow ab=b^2+36a^2-12ab$$

$\cancel{(3a+b)^2=9a^2+b^2+6ab}$

$$\begin{cases}b^2-13ab+36a^2=0\\ b^2+9a^2-90=0 \mid \cdot 4\end{cases}$$

$36a^2-13ab-9a^2+90=0$

$27a^2-13ab+90=0$

$4b^2-360-b^2+13ab=0$

$3b^2+13ab-360=0$

$\cancel{(3a+b)^2=\sqrt{90+6ab}}$

$\cancel{6a-b=\sqrt{ab}}$

$\cancel{9ab}$

$$\begin{cases}9a^2+b^2=90\\ \sqrt{ab}=b-6a\end{cases}$$

$36\cdot 4=144$

$t^2-13t+36=0$

$D=169-144=25$

$a=1$
$b=9$

$9a^2+16a^2=90$

$9a^2+81a^2=90$

$t=\frac{13-5}{2}=4$

$t=\frac{18}{2}=9$

$\frac{18}{5}$

$$\begin{cases}9a=b\\ 4a=b\end{cases}$$

$(t-9)(t-4)=0$

$\cancel{9a^2=b^2 \quad 4a^2=b^2}$

$\cancel{a=\pm 3b \quad a=\pm 2b}$

$\cancel{\frac{a^2}{9}+9a^2=90}$

$\cancel{82a^2=810}$

$9-6=\sqrt{9}$

$9+\cancel{36}\ 81=90$

$\cancel{\begin{cases}18a^2=90\\ 13a^2=90\end{cases}}$ $\quad \cancel{a=\sqrt{5},\ b=\sqrt{45}}$

$\cancel{a=\sqrt{\frac{90}{13}}}$

$\frac{18}{5}\cdot 9+\frac{16\cdot 18}{5}=5\cdot 18=90$

$-12\sqrt{\frac{2}{5}}+18\sqrt{\frac{2}{5}}=6\sqrt{\frac{2}{5}}$

$ab=4\cdot\frac{18}{5}=36\cdot\frac{2}{5}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$

$26x-x^2=a\geq 0$ $\quad x(26-x)\geq 0$

$|-a|^{\log_5 12}+a \geq 13^{\log_5 a}$

$\boxed{a^{\log_5 12}+a\geq 13^{\log_5 a}}$

$a^{\log_5 12}=t \Rightarrow \begin{cases}\log_a t=\log_5 12\\ \log_{13} f=\log_5 a\\ \underset{12}{t}+\underset{5}{a}\geq \underset{13}{f}\end{cases} \Rightarrow \log_5 12a=\log_{13} f+\log_a t$

$13^{\log_5 a}=f \Rightarrow$

$\log_4 16=\log_3 9$ $\quad 4^{\log_4 3}$

$\cancel{16}^{\log_{\cancel{16}} 9}=$

$\log_3 5$ $\quad =16^{\log_4 3}$

$\log_5 12a-\log_a t=\log_{13} f$

$\frac{1}{\log_{12a}5}-\log_a t=\log_{13} f$

$a=5^x$

$t=12^x$

$\log_5 12$

$\log_{13} f=x\log_5 5=x$

$\cancel{t+a^{1-\log_5 12}\geq}$

$13^x=f$

144 · 12 = 288, 144 → 1828; 125; 1953

25 144 169

$a^{\log_5 12-\log_5 5}+a\geq 13^{\log_5 a}\ /a^{\log_5 12}$

$5^x+12^x\geq 13^x$

169 · 13 = 507, 169 → 2197

$\cancel{a^{\log_5\frac{12}{5}}+a\geq a^{\log_5\frac{a}{12}}}$

$5^x+12^x-13^x\geq 0$

125

$\cancel{\frac{5}{\ln x}+\frac{12}{\ln x}}$

$x\leq 2$

$a\leq 25$

$\cancel{a\leq 25}$

$x^2-26x+25=0$

$x=1$

$x=25$

$0\leq -x^2+26x\leq 25$

$1+\left(\frac{12}{5}\right)^x\geq\left(\frac{13}{5}\right)^x$

$1+a^x\geq b^x$

$(x-1)(x-25)=0$

$\frac{1}{5}+\frac{1}{12}$

0 1 25 26

$x\in[0;1]\cup[25;26]$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$(3b-2a+6)$

$\frac{48}{\frac{6}{144}}$ 2

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b \geq 18x^2-51x+28$ $x\in\left(\frac{2}{3};2\right]$

48

$18x^2 - x(51+a) + (28-b) \leq 0$ $12^2 = 6^2\cdot 2^2$ $144 = 3^2\cdot 2^2\cdot 2$

$D = 51^2+102a+a^2 - 28\cdot 18 + 18b$ $3^2\cdot 2^2\cdot 2^2$ 51

$3\cdot 2^3$

6

$\begin{cases} x = \frac{51+a-\sqrt{D}}{36} \geq \frac{2}{3} \\ x = \frac{51+a+\sqrt{D}}{36} \leq 2 \end{cases}$ $a+\sqrt{D} \leq 21$

$\cancel{a^2}+102a+18b+51^2-28\cdot 18 \leq 21^2+\cancel{a^2}-42a$

$144a+18b \leq (21-51)(21+51)+28\cdot 18$

$-72\cdot 30 + 28\cdot 18$

$18(28-60) = -18\cdot 32$

$8a+b+32 \leq 0$

$a-\sqrt{D} = -27$ $24\cdot 78$

$a+27 = \sqrt{D}$

$\cancel{a^2}+27^2+54a = \cancel{a^2}+102a+18b+51^2-28\cdot 18$

$48a+18b+\underbrace{24\cdot 78}_{6\cdot 4\cdot 3\cdot 26}-28\cdot 18 = 0$

$8a+3b+12\cdot 26-28\cdot 3 = 0$ $12(26-7) = 12\cdot 19$

$\begin{cases} 8a+3b+228 \geq 0 \\ 8a+b+32 \leq 0 \\ a<0 \\ 2a+5+b<0 \end{cases}$

$(3b-2a+6)(3b-2a+6) =$

$= 9b^2+4a^2+36b-24a-$

$-12ab+36$

$8-6x \geq 3ax^2-2ax+3bx-2b$ $+4(2b-8)\cdot 3a =$

$= 24ab-96a$

$3ax^2+x(3b-2a+6)-(2b+8) \leq 0$

$D = 9b^2+4a^2+36b-24a-12ab+36+24ab-96a$

$2b+228-32 \geq 0$

$b+98>0$

$b>-98$

$x = \frac{2a-6-3b\mp\sqrt{D}}{6a} \leq 2$

$3b^2-2b-5=0$

$x = \frac{2a-6-3b-\sqrt{D}}{6a} > \frac{2}{3}$

$3-5=-2$

-3

$100a^2+36+9b^2+$
$+60ab+120a+36b$

$\cancel{9b^2}+4a^2+\cancel{36b}-120a+12ab+\cancel{36} \leq (10a+6+3b)^2$

$\cancel{9b^2}+\cancel{4a^2}+\cancel{36b}-120a+\cancel{12ab}+\cancel{36} > (2a+6+3b)^2$

$4a^2+9b^2+36+24a+36b+$
$+12ab$

$24a+120a<0$, $a<0$

$96a^2+240a+48ab \geq 0$ $2a+b+5<0$

$2a^2+5a+ab \geq 0$

$a(2a+5+b) > 0$

☑ черновик ☐ чистовик   Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле)   (Нумеровать только чистовики)

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$4 \le x \le 28$ $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$4 \le y \le 28$

$\frac{1}{4} \geq \frac{1}{y} \geq \frac{1}{28}$ $f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f(y) < 0$

$f(-4) + f\left(-\frac{1}{4}\right) = -1 + -1$

$78 \cdot 2 - 6 \cdot 28$

$13 \cdot 2 \cdot 6 - 6 \cdot 28 =$

$= 6(26 - 28)$

$-2 = -12$

$$\begin{cases} 2a + ab > 0 \\ 2a^2 + 6a + ab \geq 0 \\ 2a + b + 2 \le 0 \\ 2a + 3b - 6 < 0 \end{cases}$$

$t + 2 \le 0$

$$\begin{cases} -2a - ab < 0 \\ 2a + 3b - 6 < 0 \\ 2a + b + 2 \le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{array}{l} b + 2 - ab < 0 \\ 3b - 6 - ab < 0 \\ 4b - 4 - 2ab < 0 \\ 2b - 2 - ab < 0 \end{array}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

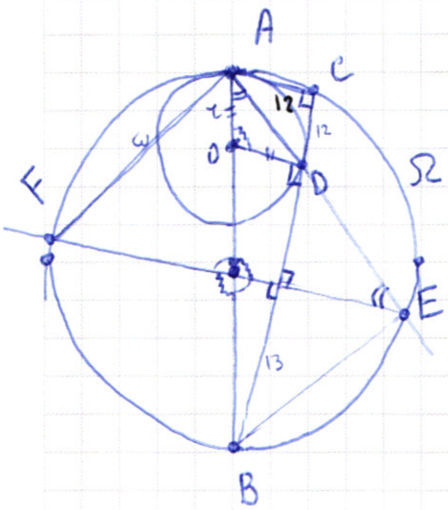
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



r, R - ?

$\angle AFE$ - ?

S_{AEF} - ?

$CD = 12$

$BD = 13$

$DO \parallel FE$

R

$\frac{25}{13} = \frac{2R}{2R - r}$

$50R - 25r = 26R$

$24R = 25r$

$\frac{25}{13} = \frac{2R}{2R-r}$

$\left(\frac{12}{13}\right)^\alpha + \left(\frac{5}{13}\right)^\alpha \geqslant 13^\alpha$

$\cancel{\frac{x+r}{\alpha}} = \cancel{\frac{r}{\alpha}}$

$\frac{90000}{313} + 12$

$90000 = 3^2 \cdot 100^2$

$45072 = 12^2 \cdot 313$

135072

$135072 \mid 1$

$19008 \cdot 9$

$4752 \cdot 12^2$

$(313 +$

$\frac{12^2 \cdot 313 + 300^2}{313}$

300

$\frac{325^2}{4 \cdot 313} + \frac{25^2 \cdot 938}{4 \cdot 313} - 2 \cdot \frac{325 \cdot 25 \sqrt{938}}{2 \cdot 313} \cdot \frac{\sqrt{262}}{26}$

$\sqrt{262}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)