МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+2\beta)=\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\sin(2\beta)\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha)=\sin(2\alpha)\cos(4\beta)+\sin(4\beta)\cos(2\alpha)+\sin(2\alpha)=$$

$$=\sin(2\alpha)(1+\cos(4\beta))+2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha)=$$

$$=2\sin(2\alpha)\cos(2\beta)^2+2\sin(2\beta)\cos(2\beta)\cos(2\alpha)=$$

$$=2\cos(2\beta)\Big(\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\sin(2\beta)\Big)=-\frac{2}{17}$$

$$2\cdot\cos(2\beta)\cdot-\frac{1}{\sqrt{17}}=-\frac{2}{17}\quad\Rightarrow\quad\cos(2\beta)=\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\sin(2\beta)=\pm\sqrt{1-\cos(2\beta)^2}=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{17}}\sin(2\alpha)\pm\frac{4}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\pm4(\cos(\alpha)^2-\sin(\alpha)^2)=-1$$

1) $2\sin(\alpha)\cos(\alpha)+4\cos(\alpha)^2-4\sin(\alpha)^2=-1$

$$2\sin(\alpha)\cos(\alpha)=3-8\cos(\alpha)^2=8\sin(\alpha)^2-5$$

$$4\sin(\alpha)^2(1-\sin(\alpha)^2)=64\sin(\alpha)^4-80\sin(\alpha)^2+25$$

$$68\sin(\alpha)^4-84\sin(\alpha)^2+25=0$$

$$\sin(\alpha)^2=\frac{84\pm\sqrt{84^2-6800}}{136}=\frac{84\pm\sqrt{256}}{136}=\cancel{\frac{41\pm\sqrt{31}}{66}}=\frac{21\pm4}{34}$$

$$\cos(\alpha)^2=\cancel{\frac{25\mp\sqrt{31}}{66}}=\frac{13\mp4}{34}$$

1. $\operatorname{tg}(\alpha)^2=\frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2}=\frac{41+\sqrt{31}}{25-\sqrt{31}}=\frac{1025+31+66\sqrt{31}}{594}=\frac{528+33\sqrt{31}}{297}=$

$=\frac{48+3\sqrt{31}}{27}=\frac{16+\sqrt{31}}{9}\qquad\operatorname{tg}(\alpha)=\pm\frac{1+\sqrt{31}}{3\sqrt{2}}$

2. $\operatorname{tg}(\alpha)^2=\frac{41-\sqrt{31}}{25+\sqrt{31}}=\frac{1056-66\sqrt{31}}{594}=\frac{16-\sqrt{31}}{9}\qquad\operatorname{tg}(\alpha)=\pm\frac{\sqrt{31}-1}{3\sqrt{2}}$

2) $\cancel{2\sin(\alpha)\cos(\alpha) - 4\cos(\alpha)^2 + 4\sin(\alpha)^2 = -1}$

$\cancel{2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 3 - 8\sin(\alpha)^2}$

1. $tg(\alpha)^2 = \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2} = \frac{25}{9}$ $\quad tg(\alpha) = \pm\frac{5}{3}$

2. $tg(\alpha)^2 = \frac{\sin(\alpha)^2}{\cos(\alpha)^2} = \frac{17}{17} = 1$ $\quad tg(\alpha) = \pm 1$

2) $2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = -4\cos(\alpha)^2 + 4\sin(\alpha)^2 = -1$

$2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = 3 - 8\sin(\alpha)^2$

$4\sin(\alpha)^2(1-\sin(\alpha)^2) = 9 - 48\sin(\alpha)^2 + 64\sin(\alpha)^4$

$68\sin(\alpha)^4 - 52\sin(\alpha)^2 + 9 = 0$

$\sin(\alpha)^2 = \frac{52 \pm \sqrt{52^2 - 4\cdot 68\cdot 9}}{2\cdot 68} = \frac{26 \pm \sqrt{26^2 - 68\cdot 9}}{68} = \frac{26 \pm \sqrt{676 - 612}}{68} =$

$= \frac{26 \pm \sqrt{64}}{68} = \frac{26 \pm 8}{68} = \frac{13 \pm 4}{34}$

$\cos(\alpha)^2 = \frac{21 \mp 4}{34}$

1. $tg(\alpha)^2 = \frac{13+4}{21-4} = \frac{17}{17} = 1$ $\quad tg(\alpha) = \pm 1$
2. $tg(\alpha)^2 = \frac{13-4}{21+4} = \frac{9}{25} =$ $\quad tg(\alpha) = \pm\frac{3}{5}$

Ответ: $\left\{\pm 1; \pm\frac{5}{3}; \pm\frac{3}{5}\right\}$.

№2

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + 3y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{(y-6)(x-1)} \\ 3(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$y - 6 = b$

$x - 1 = a$

$$\begin{cases} \cancel{3(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90} \\ \cancel{y^2 - 12xy + 36x^2 = xy - 6x - y + 6} \\ \cancel{y \geq 6x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2 + b^2 = 90 \\ b - 6a = \sqrt{ab} \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3a^2+b^2=90 \\ b^2-12ab+36a^2=ab \\ b>6a \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3a^2+b^2=90 \\ \left(\frac{b}{a}\right)^2-13\left(\frac{b}{a}\right)+36=0 \\ b>6a \end{cases}$$

$$\frac{b}{a}=\frac{13\pm\sqrt{169-144}}{2}=\frac{13\pm5}{2}$$

1) $b=9a$ и $a>0$ 2) $b=4a$ и $a<0$

1) $3a^2+81a^2=90$

$a^2=\frac{90}{84}=\frac{15}{14}$

$a=\sqrt{\frac{15}{14}}$ $b=9\cdot\sqrt{\frac{15}{14}}$

2) $3a^2+16a^2=90$

$a^2=\frac{90}{19}$

$a=-\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$ $b=-\frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}}$

Ответ: $\left\{\left(\frac{\sqrt{15}}{\sqrt{14}}+1;\ \frac{9\sqrt{15}}{\sqrt{14}}+6\right);\left(-\frac{3\sqrt{10}}{\sqrt{19}}+1;\ -\frac{12\sqrt{10}}{\sqrt{19}}+6\right)\right\}$.

№3

$26x-x^2=5^k$

$12^k+5^k\geq13^k$

$\Downarrow$

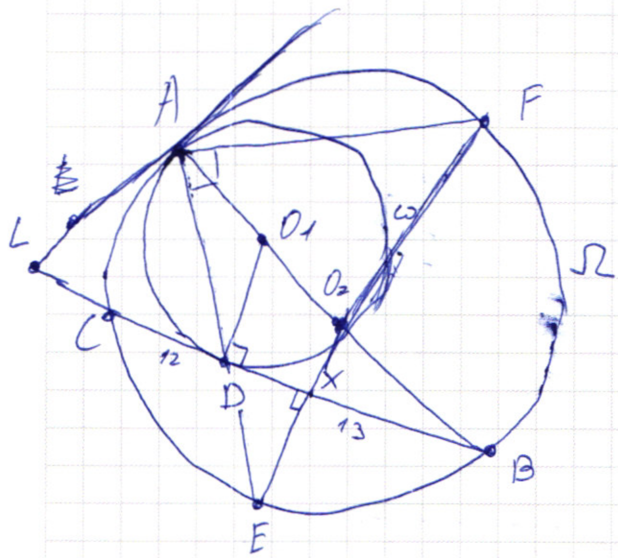
$k\leq2 \Rightarrow 5^k\leq25$

$0<26x-x^2\leq25$ $x^2-26x+25\geq0$ $x(26-x)>0$

$x\in$ ~~ktiza~~ $(-\infty;1]\cup[25;+\infty)$ и $x\in(0;26)$

Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

№4



$$\angle CDA = \frac{\breve{AC}}{2} + \frac{\breve{EB}}{2} = \frac{\breve{AD}}{2} = \angle DAL =$$

$$= \frac{\breve{AE}}{2} = \frac{\breve{AC}}{2} + \frac{\breve{CE}}{2}$$

$$\Downarrow$$

$$\breve{CE} = \breve{BE}$$

$$\Downarrow$$

$\triangle CEB$ равнобедренный

$$\Downarrow$$

EF – диаметр $\Omega \Rightarrow \angle EAF = 90^\circ$

$$CX = BX = \frac{CB}{2} = 12,5$$

$$LD = AL$$

$$LC \cdot LB = LD^2$$

$$LC \cdot (LC + 25) = (LC + 12)^2$$

$$LC = 12^2 = 144$$

$$\angle LAB = 90^\circ \Rightarrow AB = \sqrt{LB^2 - LA^2} = \sqrt{2 \cdot (25 - 12) \cdot 144 + 25^2 - 12^2} =$$

$$= \sqrt{325 \cdot 13} = 65$$

$$R = \frac{AB}{2} = \frac{65}{2} = 32,5$$

$$AB = r + \sqrt{r^2 + 13^2}$$

$$65 = r + \sqrt{r^2 + 13^2}$$

$$r^2 - 130r + 65^2 = r^2 + 13^2$$

$$r = \frac{65^2 - 13^2}{130} = \frac{24 \cdot 13}{10} = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5} = 31,2$$

$$tg(\angle ABC) = \frac{r}{13} = \frac{12}{5} \Rightarrow \sin(\angle ABC) = \frac{12}{13} \quad \cos(\angle ABC) = \frac{5}{13}$$

$$\angle AFE = 90^\circ + \frac{\angle ABC}{2}$$

$$\sin(\angle AFE) = \sin(90^\circ)\cos\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = \cos\left(\frac{\angle ABC}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos(\angle ABC) + 1}{2}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \quad \cos(\angle AFE) = \frac{2}{\sqrt{13}}$$

$$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right) \qquad S_{AEF} = EF^2 \cdot \sin(\angle AFE) \cdot \cos(\angle AFE) = 1950$$

Ответ: $32,5$; $31,2$; $\arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$; 1950.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(a\cdot 1) = f(a) + f(1)$

$\Downarrow$

$f(1) = 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) - f(y) < 0$

$f(y) > f(x)$

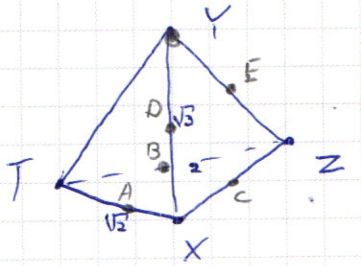
$f(2)=0$	$f(8)=0$	$f(14)=1$	$f(20)=1$	$f(26)=3$
$f(3)=0$	$f(9)=0$	$f(15)=1$	$f(21)=1$	$f(27)=0$
$f(4)=0$	$f(10)=1$	$f(16)=0$	$f(22)=2$	$f(28)=1$
$f(5)=1$	$f(11)=2$	$f(17)=4$	$f(23)=5$	
$f(6)=0$	$f(12)=0$	$f(18)=0$	$f(24)=0$	
$f(7)=1$	$f(13)=3$	$f(19)=4$	$f(25)=2$	

Количество подходящих нам пар: $1\cdot 24 + 2\cdot 22 + 2\cdot 20 + 3\cdot 17 + 8\cdot 11 =$

$= 24 + 44 + 40 + 51 + 88 = 247$

Ответ: $\{247\}$.

№7



$\begin{cases} \angle DCE = \angle DYE \\ \angle DCE + \angle DYE = 180^\circ \text{ (на 1 окр.)} \end{cases}$

$\Downarrow$

$\angle XYZ = 90^\circ$

ABED – параллелограмм вписанный в окружность

$\Downarrow$

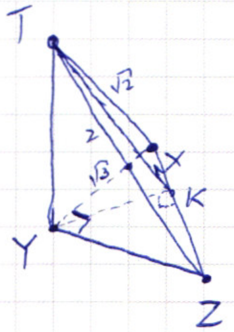
ABED – прямоугольник $\Rightarrow AD \perp DE \Rightarrow TY \perp XZ$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница № 5

(Нумеровать только чистовики)



~~$YX \perp ZY$, $TY \perp XZ$~~

$TY \perp XZ$

$\Downarrow$

высоты из Y и T на XZ падают в одну точку (K)

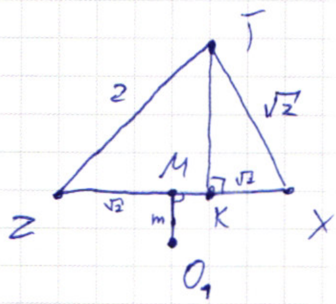
$TZ^2 - TX^2 = ZK^2 - KX^2 = YZ^2 - YX^2$

$\Downarrow$

$YZ^2 = TZ^2 - TX^2 + YX^2 = 4 - 2 + 3 = 5$

$YZ = \sqrt{5}$

$XZ = \sqrt{YZ^2 + XY^2} = 2\sqrt{2}$



$8 = 4 + 2 - 4\sqrt{2}\cos(\angle ZTX)$

~~$\cos(\angle ZTX) = -\frac{1}{2\sqrt{2}}$~~

$2 = ZK^2 - KX^2 = (ZK - KX)\,2\sqrt{2}$

$ZK - KX = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$MK = \frac{ZK - KX}{2} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$

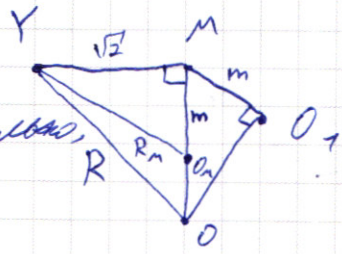
$TK^2 + \left(\sqrt{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{2}^2$

$TK^2 = 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$ $\quad TK = \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$

$ZO_1 = TO_1$

$\underset{2 + m^2}{\shortparallel} \qquad \underset{\frac{1}{8} + \left(m + \frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\right)^2}{\shortparallel}$

$1 = \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} m \qquad m = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$



R минимально если MO минимально, MO минимально если $O_1 \in MO$.

$R_m = \sqrt{2 + \frac{2}{7}} = \frac{3}{\sqrt{7}}$

Ответ: $2\sqrt{2}$; $\frac{3}{\sqrt{7}}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$ax+b \geq 18x^2-51x+28$ на $\left[\frac{2}{3};2\right]$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+b \geq 8-34+28=2 \\ 2a+b \geq 72-102+28=-2 \end{cases}$$

$\cancel{f(x)=\frac{8-6x}{3x-2}}$

$\cancel{f'(x)=\frac{-3(8-6x)+(-6)(3x-2)}{(3x-2)^2}} = \cancel{\frac{-12}{(3x-2)^2}}$

$\cancel{f'(2)=-\frac{3}{4}}$

$3x-2>0$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax+b$

$8-6x \geq 3ax^2+(3b-2a)x-2b$

$3ax^2+(3b-2a+6)x-2b-8 \leq 0$

$\Updownarrow$

$$\begin{cases} \frac{4}{3}a+2b-\frac{4}{3}a+4-2b-8 \leq 0 \quad ✓ \\ 12a+6b-4a+12-2b-8 \leq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{2}{3}a+b \geq 2 \\ 2a+b \geq -2 \\ 8a+4b+4 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow 2a+b+2=0$$

$a=-\frac{b+2}{2}$ $\qquad -\frac{b+2}{3}+b \geq 2$ $\qquad \frac{2}{3}b \geq 2+\frac{2}{3}$

$b \geq 4$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА