МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ (1)

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ (2)

Тогда (2) это

$2\cdot\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$2\cos(2\beta)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Тогда $\cos^2 2\beta = \frac{16}{17} \Rightarrow \sin 2\beta = \left[\begin{array}{l} -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} \\ \sqrt{1-\cos^2 2\beta} \end{array}\right.$

Значит –

$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

(I) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$; $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$ (II) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$, $\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

Заметим, что

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

Тогда

(I) $\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1+\cos 2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot 2\cos^2\alpha$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot 2\cos^2\alpha$

Т.к $\operatorname{tg}\alpha$ определен, то $\cos\alpha \neq 0$, ибо $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$.

Тогда

$4\sin\alpha = -\cos\alpha \quad |:\cos\alpha$

$4\,tg\alpha = -1$

$tg\alpha = -0{,}25$

II $\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{17}$

$\frac{4}{\sqrt{17}} \sin 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1-\cos 2\alpha)$

$4 \cdot 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = -2\sin^2\alpha$

$\sin\alpha \cdot (4\cos\alpha + \sin\alpha) = 0$

Если произведение $=0$, то хотя б 1 из множителей $=$
$=0$, а другие имеют смысл.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right.$$

1) $\sin\alpha = 0$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

2) $4\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \quad |:\cos\alpha,$ т.к $\cos\alpha \neq 0$

$4 + \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = 0$

$tg\alpha = -4$

Ответ: $tg\alpha = 0; -0{,}25; -4$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} & (2) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (1) \end{cases}$$

(1) $3x^2+3y^2-6x-4y=4 \quad /:3$

$$x^2-2x+1+y^2-2y\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9}=\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}$$

$$(x-1)^2+\left(y-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{12+9+4}{9}=\frac{25}{9}$$

(2) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

ОДЗ:

I) $3y-2x\geq 0$

$y\geq\frac{2}{3}x$

II) $3xy-2x-3y+2\geq 0$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1)\geq 0$, тогда

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} y\geq\frac{2}{3} \\ x\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} y<\frac{2}{3} \\ x<1 \end{cases} \end{array}\right.$$

$(3y-2x)^2=(3y-2)(x-1)$

~~$\frac{2}{3}(3y-2x)^2=2\left(y-\frac{2}{3}\right)(x-1)$~~

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

~~Сложим ((1) и (2)~~

$\cancel{(x-1)^2+2(x-1)(y-\tfrac{2}{3})+(y-\tfrac{2}{3})^2=\tfrac{25}{9}+\tfrac{2}{3}(3x-2y)^2}$

$9y^2-12yx+4x^2=3yx-2x-3y+2$

$9y^2+y(-15x+3)+4x^2+2x-2=0$

$D=(-15x+3)^2-4\cdot 9\cdot(4x^2+2x-2)=81x^2-162x+81=(9x-9)^2$

$y=\frac{15x-3+9x-9}{18}=\frac{24x-12}{18}=\frac{4x-2}{3}$

$y=\frac{15x-3-9x+9}{18}=\frac{6x+6}{18}=\frac{x+1}{3}$

Тогда

(1) $(x-1)^2+\left(\frac{4x-2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$x^2-2x+1+\left(\frac{4x-4}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\quad |\cdot 9$

$9x^2-18x+9+16x^2-32x+16=25$

$\cancel{9x^2}\ 25x^2-50x=0$

$x(x-2)=0$

$x=\left[\begin{array}{l}0\\2\end{array}\right.$, тогда $y=\left[\begin{array}{l}-\frac{2}{3}\\2\end{array}\right.$ соответственно

но $(0;-\frac{2}{3})$ не подходит, ~~и~~ по ОДЗ (т.к. $y<\frac{2}{3}x$).

(2) $(x-1)^2+\left(\frac{x+1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}\quad |\cdot 9$

$9(x-1)^2+(x-1)^2=25$

$2(x-1)^2=5$

$(x-1)^2=2{,}5$

$x=\pm\sqrt{2{,}5}+1$

Тогда

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

1) $x = \sqrt{2,5} + 1$

$y = \frac{\sqrt{2,5} + 2}{3}$, но $y \geq \frac{2}{3}(\sqrt{2,5} + 1) = \frac{2\sqrt{2,5} + 2}{3}$, значит не подходит по ОДЗ.

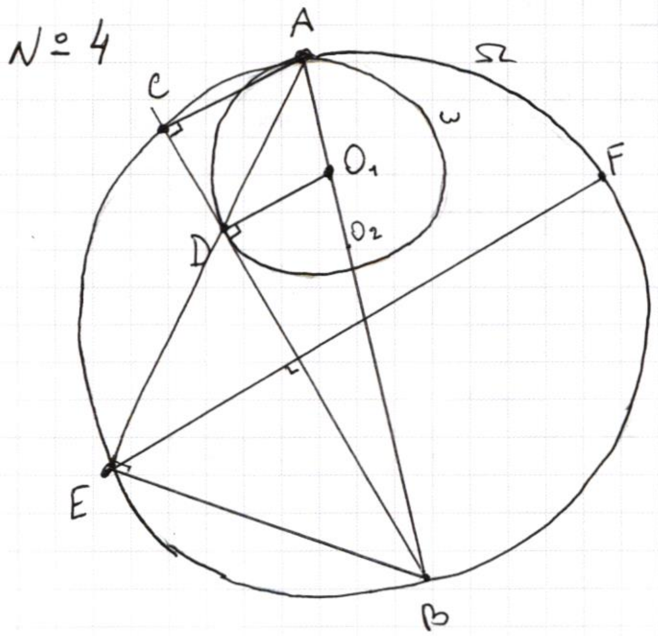
2) $x = -\sqrt{2,5} + 1$

$y = \frac{-\sqrt{2,5} + 2}{3}$, подходит по ОДЗ.

Ответ: $(2; 2)$; $\left(-\sqrt{2,5} + 1; \frac{-\sqrt{2,5} + 2}{3}\right)$

№4 на след. странице!

№ 4



r - радиус ω

R - радиус Ω

Найти:

r, R - ?

∠AFE - ?

S_{AEF} - ?

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

① AB - диаметр, а A - точка касания окружностей. Точка касания и центры лежат на одной прямой, тогда центр ω лежит на AB, ибо центр Ω и A принадлежат AB.

② O_1 - центр ω

O_2 - центр Ω

③ $O_1D \perp BC$, ибо D - точка касания, а O_1D - это радиус

④ $AC \perp BC$, т.к. ~~угол~~ ∠ACB опирается на диаметр AB =>

=> ∠ACB = 90°.

⑤ Тогда $O_1D \perp BC$ и $AC \perp BC$ => $O_1D = AC$

⑥ $\triangle BDO_1 \sim \triangle BCA$ по 2^ум углам (∠B - общий, $\angle O_1DB = \angle ACB = 90°$)

Тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{BD}{BD+DC} = \frac{13}{18}$

$O_1A = r$, $BA = 2R$ (ибо диаметр) => $BO_1 = BA - O_1A = 2R - r$

Тогда

$\frac{2R-r}{2R} = \cancel{\frac{5}{18}}\ \frac{13}{18}$

$36R - 18r = \cancel{10R}\ 26R$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$R = 1,8r$

7) По теореме Пифагора ($\triangle DO_1B$):

$DO_1^2 + BD^2 = (O_1B)^2$

$\frac{169}{4} + r^2 = (2R - r)^2 = (2\cdot 1,8r - r)^2 = 2,6^2 r^2$

$r^2 \cdot (4\cdot 1,69 - 1) = \frac{169}{4}$

$r^2 = \frac{169}{4\cdot 5,76} = \frac{169}{4(2,4)^2}$

$r = \cancel{169}\ \frac{13}{2\cdot 2,4} = \frac{13}{4,8}$

Тогда $R = 1,8r = \frac{13}{4,8}\cdot 1,8 = \frac{39}{8}$.

8) $\angle AFE = \angle ABE$, т.к. опираются на одну дугу.

9) $\angle AEB = 90^\circ$, т.к. опирается на диаметр.

10) $\triangle CDA \sim \triangle EDB$ по $2^{ум}$ углам ($\angle EDB = \angle CDA$ (вертикальные)

и $\angle ACD = \angle DEB = 90^\circ$).

Тогда $\cancel{\frac{CD}{DB}} = \cancel{\frac{AD}{DE}}$ 7 $\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BE} = k$

11) По теореме Пифагора ($\triangle CAB$):

$BC^2 + AC^2 = AB^2$

$9^2 + AC^2 = \frac{4\cdot 39^2}{8^2}$

$AC^2 = \frac{4\cdot 39^2 - 9^2\cdot 4\cdot 4^2}{8^2} = \frac{(39-36)(39+36)}{4^2} = \frac{3\cdot 75}{4^2} = \frac{9\cdot 25}{4^2}$

$AC = \frac{15}{4}$

12) По теореме Пифагора ($\triangle ACD$):

$\cancel{BD^2 = AD^2 - AC^2 =} \frac{15^2}{4^2}$

$AD^2 = AC^2 + CD^2 = \frac{15^2}{4^2} + \frac{5^2}{4} = \frac{5^2 \cdot 3^2 + 5^2 \cdot 2^2}{4^2} = \frac{5^2 \cdot 11}{4^2}$

$AD = \frac{5}{4}\sqrt{11}$

13) $\frac{CD}{DE} = \frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BE}$ из $10^{\text{ого}}$ пункта

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{BE} \Rightarrow BE = \frac{AC \cdot BD}{AD} = \frac{\frac{15}{4} \cdot \frac{13}{2}}{\frac{5}{4}\sqrt{11}} = \cancel{\frac{3\sqrt{13}}{2}} \frac{3 \cdot 13}{2\sqrt{11}} = \frac{39\sqrt{11}}{22}$

14) $\cos\angle ABE = \frac{BE}{AB} = \frac{\frac{39\sqrt{11}}{22}}{\frac{39}{4}} = \frac{2\sqrt{11}}{11}$

$\angle ABE = \arccos\frac{2\sqrt{11}}{11}$

15) $\angle ABE = \angle AFE$ из пункта 8 $\Rightarrow \angle AFE = \arccos\frac{2\sqrt{11}}{11}$

16) $AC \parallel EF$, ибо $AC \perp BC$ и $FE \perp BC$, тогда $CAFE$ – трапеция

17) Т.к. трапеция вписана в окружность, то она равнобокая. $\Rightarrow CE = AF$

18) $\triangle CDE \sim \triangle ADB$ по $2^{\text{ум}}$ углам, т.к. $\angle ECB = \angle EAB$ опираются на одну дугу и $\angle CDE = \angle ADB$, т.к. вертикальные

Тогда

$\frac{EC}{AB} = \frac{CD}{AD}$

$CE = AB \cdot \frac{CD}{AD} = \frac{39}{8} \cdot \frac{\frac{5}{2}}{\frac{5}{4}\sqrt{11}} = \frac{39}{4\sqrt{11}} = \frac{39\sqrt{11}}{44}$

19) Из пункта 17

$CE = AF \Rightarrow AF = \frac{39\sqrt{11}}{44}$

20) По теореме ~~косинусов~~ синусов ($\triangle AFE$):

$\frac{AE}{\sin\angle AFE} = 2R$

21) $\cos\angle AFE = \frac{2\sqrt{11}}{11} \Rightarrow \sin\angle AFE = \frac{\sqrt{77}}{11}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Тогда

$$AE = 2R \cdot \sin\angle AFE = \frac{39}{4} \cdot \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{39\sqrt{77}}{44}$$

(22) По теореме косинусов:

$$AE^2 = AF^2 + EF^2 - 2\cos\angle AFE \cdot AF \cdot EF$$

$$EF^2 - 2\cos\angle AFE \cdot AF \cdot EF = AE^2 - AF^2 = \frac{39^2 \cdot 77}{44^2} - \frac{39^2 \cdot 11}{44^2} = \frac{39^2 \cdot 6}{4 \cdot 11}$$

$$EF^2 - 2 \cdot \frac{2\sqrt{11}}{11} \cdot \frac{39\sqrt{11}}{44} \cdot EF = \frac{39^2 \cdot 6}{44}$$

$$EF^2 - \frac{39}{\cancel{44}} EF - \frac{39^2 \cdot 6}{44} = 0$$

$$\cancel{D = \left(\frac{39}{44}\right)^2 + 4 \cdot \frac{39^2 \cdot 6}{44}} = \cancel{39^2 \cdot 44 + 3} \quad \cancel{\frac{39^2 + 39^2 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 44}{44^2}} =$$

$$\cancel{= \frac{39^2}{44^2}(1056+1)}$$

$$D = \left(\frac{39}{11}\right)^2 + \frac{4 \cdot 39^2 \cdot 6}{44} = \frac{4 \cdot 39^2 + 4 \cdot 39^2 \cdot 6 \cdot 11}{4 \cdot 11^2} = \frac{4 \cdot 39^2 (1 + 4 \cdot 6 \cdot 11)}{4 \cdot 11^2} =$$

$$= \frac{39^2 \cdot 265}{11^2}$$

$$EF = \frac{\frac{39}{11} + \frac{39}{11} \cdot \sqrt{265}}{2} = \frac{39(\sqrt{265} + 1)}{22}$$

(23) $$S_{AFE} = \frac{1}{2} EF \cdot AF \cdot \sin\angle AFE = \frac{1}{2} \cdot \frac{39\sqrt{11}}{44} \cdot \frac{39(\sqrt{265}+1)}{22} \cdot \frac{\sqrt{77}}{11} = \frac{39^2 \cancel{11} (\sqrt{265}+1)\sqrt{7}}{44^2}$$

Ответ: $r = \frac{13}{4{,}8}$; $R = \frac{39}{8}$; $\cancel{\angle AFK} = \angle AFE = \arccos \frac{2\sqrt{11}}{11}$;

$$S_{AFE} = \frac{39^2 \sqrt{7} (\sqrt{265} + 1)}{44^2}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17}$

$+\sin 2\beta$?

$\cos(2\alpha+2\beta) = \left[\begin{array}{l}\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \frac{4}{\sqrt{17}} \\ -\sqrt{1-\frac{1}{17}} = -\frac{4}{\sqrt{17}}\end{array}\right.$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos 2\beta + (1-2\sin^2\alpha)\sin 2\beta = -\frac{1}{17}$

① $\cos(2\alpha+2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}}$ ② $\cos(2\alpha+2\beta) = -\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin 2\beta - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\sqrt{\frac{16+1}{(\sqrt{17})^2}}\quad \sin(2\beta+\varphi) = -\frac{8}{17}$

$3y-2x = \sqrt{3y(x-1)-2(x-1)}$

$3y-2x = (3y-2)(x-1)$

$3x^2-6x+3+3y^2-2y\cdot 3\cdot\frac{2}{3}+\frac{4}{9} =$

$3y>2x$ $\quad 3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^3 = 4+3+\frac{4}{9}\ /:3$

$y>\frac{2}{3}x$ $\quad (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^3 = \frac{4}{3}+1+\frac{4}{27} = \frac{36+27+4}{27} = \frac{67}{27}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$+\quad -6\quad -\quad 0\quad +\quad x$

$\boxed{x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)}$

$\geq \underbrace{(x^2+6x)}_{>0}\left((x^2+6x)^{\log_4\frac{5}{4}}-1\right)$

$3^{\log}$

$\left((x^2+6x)^{\log_{(x^2+6x)}3}\right)^{\log_4(x^2+6x)}$

$\begin{cases}3y>2\\x>1\end{cases}\quad\begin{cases}3y<2\\x<1\end{cases}$

$t^{\log_t 3\cdot\log_4 t} \geq t(t^{\log_4\frac{5}{4}}-1)$

$(3y-2)(x-1) = (3y-2x)^2$

$3yx-3y-2x+2 = 9y^2-12yx+4x^2$

$\cancel{9y^2+3y+0,25}$

$(x-1+y-\frac{2}{3})^2 = 2(3y-2x)^2 + 2\cdot\frac{67}{27}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3^{\log_4 t} \geq |t|^{\log_4 5} - t^{\log_4 4}$

$t^{\log_t 3 \cdot \log_4 t} \quad t^{\log_4 4}(t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1)$

$\log \quad t^{\log_t 3 \cdot \log_4 t - 1} \geq t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$x^2 + y^2 - 2x - 2y \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

$(x-1)^2 + (y - \frac{2}{3})^2 = \frac{4}{3} + 1 + \frac{4}{9} = \frac{12+9+4}{9} = \frac{25}{9}$ $\quad 16+9 \quad (\frac{5}{3})^2$

$\sqrt{(3y-2)(x-1)} = 3y - 2x$ $\quad y = \frac{2}{3}x$

$(3y-2)(x-1) = (3y-2x)^2$

$2(3y-2)(x-1) = 2(3y-2x)^2 / 3$

$2(y - \frac{2}{3})(x-1) = \frac{2}{3}(3y-2x)^2$

$(x-1+y-\frac{2}{3})^2 = \frac{25}{9} + \frac{2}{3}(3y-2x)^2$

$(x - 1 + y - \frac{2}{3} - \sqrt{\frac{2}{3}(3y-2x)})$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$-\frac{2}{\sqrt{17}}\cos 2\beta = -\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

① $\cancel{\cos}$ $\sin 2\beta = \sqrt{1 - \frac{16}{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad$ ② $\sin 2\beta = -\sqrt{1 - \frac{16}{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

✓ $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

① $\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1 + \cos 2\alpha)$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17} \cdot 2\cos^2\alpha$

$2\sin\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{17} \cdot 2\cos\alpha$

$4\sin\alpha = -\cos\alpha \quad / : \cos\alpha$

$4\operatorname{tg}\alpha = -1$

$\cancel{4\sin\alpha + \cos\alpha = 0}$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}$ ✓

$\cancel{16\sin^2\alpha = co}$

② $\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}(1 - \cos 2\alpha)$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot 2\sin^2\alpha$

① $\sin\alpha = 0$ $\quad$ ② $\cos\alpha \frac{4}{\sqrt{17}} = -\frac{1}{\sqrt{17}}\sin\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = 0$ $\quad 4\cos\alpha = -\sin\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha = -4$

$\log_a b \cdot \log_b c = \frac{\log_b c}{\log_b a} = \log_a c$

$\log_4(t) \quad t^{\log_t 3 \cdot \log_4 t} = t^{\log_4 3}$

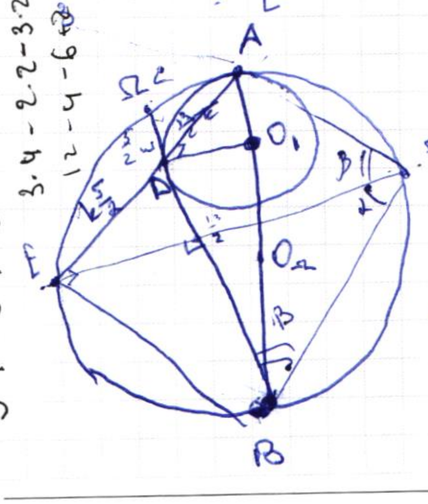
$t^{\log_4 3} \geq \cancel{\log}\, t^{\log_4 5} - t$

$t^{\log_4 \frac{3}{4}} \geq \cancel{\log}\, t^{\log_4 \frac{5}{4}} - 1$

$0 \geq t^{\log_4 5} - t - t^{\log_4 \frac{3}{4}}$

$\frac{25}{4} + x^2 = \frac{169}{4k^2}$

$\frac{25}{4}k^2 + x^2k^2 = \frac{169}{4}$



$3 \cdot 4 + 3 \cdot 4 - 6 \cdot 2 - 4 \cdot 2$

$3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 - 3 \cdot 2 + 2$

$12 - 4 - 6 + 2$

R

$\angle HFE \quad \cancel{\log_4} 5 \cdot t$

S_{AEF}

$\angle \cancel{AEF}$ $CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$\frac{13+5}{2} = 9$

$\frac{225}{144} \quad 81$

$90x - 72x$

$9y^2 - 12yx + 4x^2 = -90x - 72x$

$3 + 2x = 3yx + 3y + 2x + 2 \quad 162$

$9y^2 - 15yx - 3y + 4x^2 + 2x - 2 = 0$

$D = (15x + 3)^2 - 4 \cdot 9 \cdot (4x^2 + 2x - 2) = 0$

$225x^2 - 144x^2 \quad 9$

$81x^2 + 8x + 81$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

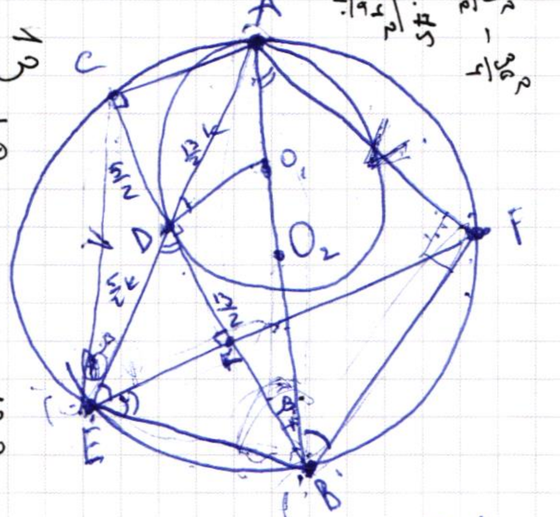
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{13}{4,8}\cdot 1,8$ $0,8\cdot 6$ $6\cdot 0,3$ $\frac{13\cdot 3}{8}$



$\sin\alpha = \cos(90-\alpha)$

R, r

$\angle AFE$

S_{AEF}

$CP = \frac{13}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$$\frac{2R-r}{2R} = \frac{13}{18}$$

$$36R - 18r = 26R$$

$$10R = 18r$$

$$R = 1,8r \qquad 3,6r - r$$

$a^2 - 6a - 6\cdot 39,6 = 0$

$D = 6 + 4\cdot 39,6\cdot 6 = 6\cdot(39,6+4)$

$$\left(\frac{13}{2}\right)^2 + r^2 = 2,6r^2$$

$$\frac{169}{4} = 1,6r^2$$

$$r = \frac{13}{2\cdot 0,4}$$

$$R = 1,8\cdot\frac{13}{2\cdot 0,4}\cdot 2$$

$1,69\cdot 4 = 6,76$; $6,76 - 1 = 5,76$

$24\cdot 24 = 576$

$\angle AFE = \angle ABE =$

$= 180° - \angle \cancel{CEB}\ ACE$

CE − ? $\Delta CDE \sim ADB$ AC

EF ? ⇒ EF по т. косинусов D ⇒

$\sin 2\alpha + \sin 2\beta$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\sin\beta\cdot\cos\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$\left(\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right)\cdot\left(\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2} + \sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\right)$

$\frac{\sin\alpha}{2}\cdot\cos^2\frac{\beta}{2} + \frac{\sin 2\beta}{2}\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2} + \frac{\sin\beta}{2}$.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)