МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}, \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2 - 26x\right|^{\log_5 12} + 26x \geqslant x^2 + 13^{\log_5\left(26x - x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 12$, $BD = 13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $4 \leqslant x \leqslant 28$, $4 \leqslant y \leqslant 28$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8 - 6x}{3x - 2} \geqslant ax + b \geqslant 18x^2 - 51x + 28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3}; 2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY = \sqrt{3}$, $TX = \sqrt{2}$, $TZ = 2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 \end{cases}$

$\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{(x-1)(y-6)}$ $\quad 9x^2+y^2-18x-12y=(3x-3)^2+(y-6)^2-45=$

$=9(x-1)^2+(y-6)^2-45$

Введём переменные $a=x-1$; $b=y-6$; $y-6x=b+6-6a-6=$
$=b-6a$

Получим систему:

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \\ b-6a\geq 0 \\ a\cdot b\geq 0 \end{cases}$ $\longrightarrow b^2+36a^2-13ab=0 \quad |:a^2\neq 0$

$\left(\frac{b}{a}\right)^2-13\frac{b}{a}+36=0 \longrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{b}{a}=4 \quad (1) \\ \frac{b}{a}=9 \quad (2) \end{array}\right.$

(1) $b=4a \quad 9a^2+16a^2=90$

$25a^2=90$

$a^2=\frac{18}{5} \quad a=\pm\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \quad b=\pm\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}$ под систему подходит пара $\left(-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5}; -\frac{12\sqrt2}{\sqrt5}\right)$

(2) $b=9a \quad 9a^2+81a^2=90a^2=90$

$a=\pm1 \quad b=\pm9$ под систему подходит пара $(1;9)$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=9 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \\ b=-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \end{array}\right. \Longleftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases} \\ \begin{cases} x=1-\frac{3\sqrt2}{\sqrt5} \\ y=6-\frac{12\sqrt2}{\sqrt5} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(2;15)$; $\left(\frac{\sqrt5-3\sqrt2}{\sqrt5}; \frac{6\sqrt5-12\sqrt2}{\sqrt5}\right)$

№1 $\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin2\beta\cos2\beta\cdot\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin2\alpha\cdot\cos^2 2\beta+2\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{2}{17}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$2\cos2\beta(\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha)=-\frac{2}{17}$

$2\cos2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta)=2\cos2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{2}{17} \longrightarrow \cos2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{\sin2\alpha}{\sqrt{17}}\pm\frac{4\cos2\alpha}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}} \longrightarrow 2\sin\alpha\cos\alpha\pm(8\cos^2\alpha-4)=-1$

1) "+": $2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha-3=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha-3\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha=0 \quad \Big|:\cos^2\alpha\neq0$

$-3tg^2\alpha+2tg\alpha+5=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{5}{3}\end{array}\right.$

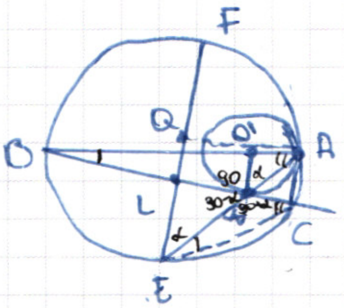
2) "−": $2\sin\alpha\cos\alpha-8\cos^2\alpha+5\cos^2\alpha+5\sin^2\alpha=0 \quad \Big|:\cos^2\alpha\neq0$

$5tg^2\alpha+2tg\alpha-3=0$

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha=-1 \\ tg\alpha=\frac{3}{5}\end{array}\right.$

Ответ: $-1;\ \frac{3}{5};\ \frac{5}{3}.$

№4



Ω – радиус R

ω – радиус r

$BA=2R$

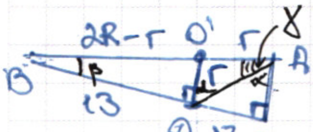
$O'A=r$

$O'D=r$

$BO'=2R-r$

$\angle BCA=90^\circ$ (так как опирается на диаметр)

$\angle BO'D=90^\circ$ (из центра в точку касания)



$\frac{2R-r}{2R}=1-\frac{r}{2R}=\frac{13}{25}$ $\quad\frac{r}{2R}=\frac{12}{25}$ $\quad\frac{r}{R}=\frac{24}{25}$ $\quad R=\frac{25}{24}r$

$r^2+169=(2R-r)^2$ $(\triangle BO'D)$

$2R-r=\frac{50-24}{24}r=\frac{26}{24}r=\frac{13}{12}r$

$r^2+169=\frac{13^2}{12^2}r^2$ $\quad r^2\left(\frac{13^2-12^2}{12^2}\right)=169$ $\quad 13^2-12^2=25\cdot1$

$r^2\cdot\frac{5^2}{12^2}=13^2$ $\quad r=\frac{156}{5}=\frac{13\cdot12}{5}$ $\quad R=\frac{\cancel{25}^{5}\cdot13\cdot\cancel{12}}{\cancel{24}_{2}\cdot\cancel{5}}=\frac{65}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Так как $AC \perp BC$ и $EF \perp BC$, то $AC \parallel EF$ и $ACEF$ – равнобокая трапеция (так как она вписана в окружность)

Тогда $\angle CEF = \angle EFA = \angle DEF + \angle DEC = \angle DAC + \angle CBA = \angle CBD + \angle O'DB =$

$= \alpha + \beta$

При $\gamma = \angle DBA$ получаем $\alpha + \beta + \gamma + 90 = 180^\circ$ ($\triangle BDA$)

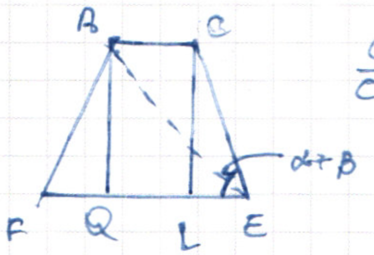
$$\alpha + \beta = 90^\circ - \gamma$$

$AC^2 = 4R^2 - 25^2 = (2R+25)(2R-25) = 90 \cdot 40 = 3600 \quad AC = 60$

$AD^2 = AC^2 + DC^2 = 60^2 + 12^2 = 12^2(25+1) = 12^2 \cdot 26 \quad AD = 12\sqrt{26}$

$\cos\gamma = \dfrac{65^2 + 12^2 \cdot 26 - 13^2}{2 \cdot 65 \cdot 12\sqrt{26}} = \dfrac{13^2 \cdot 5^2 + 13 \cdot 2 \cdot 12^2 - 13^2}{2 \cdot 13 \cdot 5 \cdot 12 \cdot \sqrt{26}}$ ($\triangle BAD$)

$\cos\gamma = \sin(90 - \gamma) = \dfrac{5}{\sqrt{26}} \qquad \angle AFE = \arcsin\dfrac{5}{\sqrt{26}}$



$\dfrac{CL}{CE} = \sin(\alpha+\beta)$

$\triangle BAD \sim \triangle ECD \rightarrow \dfrac{DC}{AD} = \dfrac{EC}{AB} \rightarrow \dfrac{12}{12\sqrt{26}} = \dfrac{EC}{65}$

$EC = \dfrac{65}{\sqrt{26}}$

$CL = CE \cdot \dfrac{5}{\sqrt{26}} = \dfrac{5 \cdot 65}{26} = \dfrac{5^2 \cdot 13}{2 \cdot 13} = \dfrac{25}{2}$

$\dfrac{LE}{CE} = \cos(\alpha+\beta) = \dfrac{1}{\sqrt{26}}$

$LE = \dfrac{1}{\sqrt{26}} \cdot CE = \dfrac{65}{26} = \dfrac{5}{2} \qquad FE = 2LE + AC = 60 + 5 = 65$

$S = \dfrac{1}{2} CL \cdot FE = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{25}{2} \cdot 65 = \dfrac{5^3 \cdot 13}{4} = \dfrac{1625}{4}$

Ответ: $R_\Omega = \dfrac{65}{2}$; $r_\omega = \dfrac{156}{5}$; $\angle AFE = \arcsin\left(\dfrac{5}{\sqrt{26}}\right)$; $S = \dfrac{1625}{4}$

N3. $|x^2 - 26x|^{\log_5 12} + 26x \geq x^2 + 13^{\log_5(26x - x^2)}$

ОДЗ: $26x - x^2 > 0$, $x \in (0; 26)$

$x^2 - 26x$ (из одз) меньше 0:

$(26x - x^2)^{\log_5 12} + 26x - x^2 \geq 13^{\log_5(26x - x^2)}$

$$13^{\log_5(26x-x^2)} = 13^{\frac{\log_{13}(26x-x^2)}{\log_{13}5}} = (26x-x^2)^{\log_5 13}$$

Пусть $26x-x^2=t>0$:

$t^{\log_5 12}+t \ge t^{\log_5 13} \quad |:t$

Если $t\le 1$, то неравенство верно всегда $\left(t^{\log_5 12} \ge t^{\log_5 13}\right)$

Если $t>1$:

$$t^{\frac{\log_t \frac{12}{5}}{\log_t 5}} - t^{\frac{\log_t \frac{13}{5}}{\log_t 5}} + 1 \ge 0$$

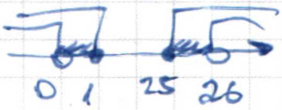
$$\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} + 1 \ge 0$$

При $t=25$ достигается равенство $\left(\frac{12^2}{5^2}-\frac{13^2}{5^2}=-1\right)$

При $t>25$ $\left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t}$ становится больше $\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t}+1$, поэтому при $t\in(25;+\infty)$ знак будет меньше. Подходят:

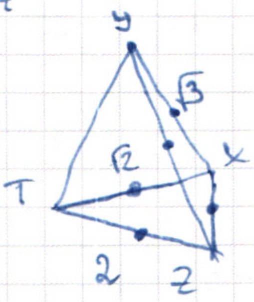
$t\in(0;25]$

$$\begin{cases} 26x-x^2>0 \longrightarrow x\in(0;26) \\ 26x-x^2\le 25 \longrightarrow x^2-26x+25\ge 0 \\ \qquad\qquad x\in(-\infty;1]\cup[25;+\infty) \end{cases}$$



Ответ: $(0;1]\cup[25;26)$.

№7



№6

$x=0$: $-4 \ge b \ge 28$

$x=1$: $2 \ge a+b \ge -5$

$x=2$: $-1 \ge 2a+b \ge -2 \longrightarrow a\in[3;4]$

$b\in[-8;-2]$

Ответ: все пары a и b, такие, что: $a\in[3;4]$, $b\in[-8;-2]$.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

$9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9x^2-18x+9+y^2-12y+36-45=45$

$(3x-3)^2+(y-6)^2=90$

$\begin{cases}\sqrt{(x-1)(y-6)}=y-6x\\ 9(x-1)^2+(y-6)^2=90\end{cases}$

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\sin(\alpha+2\beta)\cos(\alpha+2\beta)$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\begin{cases}2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{2}{17}\\ (\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{1}{\sqrt{17}}\end{cases}$

$\frac{\frac{2}{17}}{\frac{1}{\sqrt{17}}}=2\cos 2\beta$

$\frac{2\sqrt{17}}{17}=2x$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cos^2\beta-1=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos^2\beta=\frac{\sqrt{17}+1}{2\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+\arcsin(\pm\frac{4}{\sqrt{17}}))=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad\sin 2\beta=\pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 4\beta=2\cdot\frac{1}{17}-1=$

$=-\frac{15}{17}$

$\sin 4\beta=2\cdot\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{\pm4}{\sqrt{17}}=\pm\frac{8}{17}$

$\frac{\sin 2\alpha}{\sqrt{17}}\pm\frac{\cos 2\alpha\cdot 4}{\sqrt{17}}=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\pm4\cos 2\alpha=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha\pm(8\cos^2\alpha-4)=-1$

$2\sin\alpha\cos\alpha\pm8\cos^2\alpha\mp4=-1=-1\pm4$

① ++

$2\sin\alpha\cos\alpha+8\cos^2\alpha-3=0$

$2\sin\alpha\cos\alpha+\underbrace{8\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha}_{5\cos^2\alpha-3\sin^2\alpha}=0\quad|:\cos^2\alpha$

$\operatorname{tg}\alpha=t$

$2t+5-3t^2=0$

$3t^2-2t-5=0$

$t=-1$

$t=\frac{5}{3}$

$\left(65-\frac{13\cdot12}{5}\right)^2$

$13\cdot5^2-13\cdot12=\frac{13^2}{5^2}$

$$\underbrace{|x^2-26x|}_{<0}^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5\underbrace{(26x-x^2)}_{\geq 0}}$$

$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$$\underbrace{(26x-x^2)}_{t}^{\log_5 12}-(26x-x^2)^{\log_5 13}+(26x-x^2)\geq 0$$

$$13^{\frac{\log_{13}(26x-x^2)}{\log_{13}5}}=(26x-x^2)^{\frac{1}{\log_{13}5}}=(26x-x^2)^{\log_5 13}$$

$$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t\geq 0$$

$$t\left(t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\right)\geq 0$$

$$\log_5\frac{13}{5}=\log_5\frac{12}{5}\cdot\frac{13}{12}=$$
$$=\log_5\frac{12}{5}+\log_5\frac{13}{12}$$

$$t^{\log_5\frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{12}{5}}\cdot t^{\log_5\frac{13}{12}}+1$$

$$t^{\log_5\frac{12}{5}}\left(1-t^{\log_5\frac{13}{12}}\right)+1$$

$$338-156=\left(\frac{182}{5}\right)^2$$

$$\left(\frac{5\cdot 13}{5}\right)^2+\left(\frac{13\cdot 12}{5}\right)^2$$

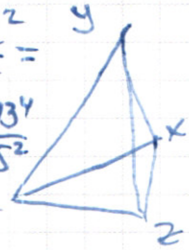
$$\underbrace{(26x-x^2)}_{t}^{\log_5 12}+(26x-x^2)\geq$$
$$\geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$$

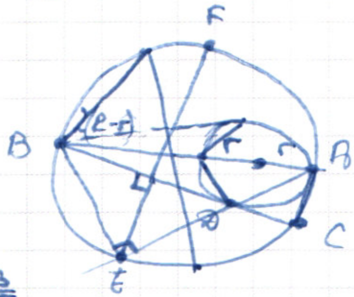
$$13^2+\frac{13^2\cdot 12^2}{5^2}=$$
$$=13^2\cdot\frac{5^2+12^2}{5^2}=\frac{13^4}{5^2}$$

$$13^2(25+144)=13^4$$

и

$$\frac{\log_{13}(26x-x^2)}{\log_{13}(5)}$$





$$\times\frac{13}{12}\over 26$$

$$\frac{13}{156}t^{\log_5 12}+t\geq t^{\log_5 13}$$

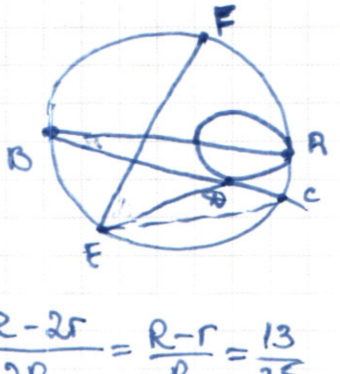
$$\log_5 12x^{\log_5\frac{12}{5}}-\log_5 13x^{\log_5\frac{13}{5}}+1$$

$r=$

$$r^2=\frac{13^2\cdot 12^2}{5^2}=\frac{156}{5}$$

$$18\cdot 4-102+28=$$
$$=72+28-102=-2$$

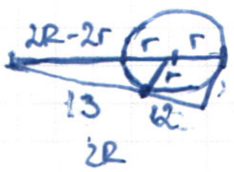
$$f(p)=f(1)+f(p)$$
$$f(1)=0$$
$$f(x/y)=f(x)+f(y)$$



$$\frac{2}{1}\geq a+b\geq -5$$

$$\frac{-4}{4}\geq 2a+b\geq -2$$

$$-1\geq 2a+b\geq -2$$



$$\frac{2R-2r}{2R}=\frac{R-r}{R}=\frac{13}{25}$$
$$25R-25r=13R$$
$$12R=25r$$
$$R=\frac{25}{12}r$$

$$r=\frac{6\sqrt{13}}{5}\quad R=\frac{6\sqrt{13}\cdot 25}{12\cdot 5}=\frac{5\sqrt{13}}{2}$$

$$(2R-r)^2=169+r^2$$
$$\left(\frac{25}{6}-1\right)^2r^2=169+r^2$$

$$\left(\frac{19}{6}\right)^2r^2=169+r^2$$
$$\left(\frac{361}{36}-1\right)r^2=169$$
$$\frac{325}{36}r^2=169$$

$$r^2=\frac{13\cdot 6^2}{13\cdot 5^2}=13\cdot\left(\frac{6}{5}\right)^2\quad\frac{5\cdot 65}{36}=\frac{5^2\cdot 13}{6^2}\quad r^2=\frac{36\cdot 169}{325}$$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2) – – $2\sin\alpha\cos\alpha - 8\cos^2\alpha + 4 = -1$

$2\sin\alpha\cos\alpha \underbrace{- 8\cos^2\alpha + 5\cos^2\alpha}_{-3} + 5\sin^2\alpha = 0$

$5t^2 + 2t - 3 = 0$

$\left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{3}{5} \end{array}\right.$

$t^{\log_5 \frac{12}{5}} + 1 \geq t^{\log_5 \frac{13}{5}}$

$t^{\frac{\log_t \frac{12}{5}}{\log_t 5}} - t^{\frac{\log_t \frac{13}{5}}{\log_t 5}} + 1$

$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$

$y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)}$

$\times\begin{array}{r}125\\13\end{array}$
$+\begin{array}{r}375\\125\end{array}$
1625

$x^2 + \frac{y^2}{9} - 2x - \frac{4}{3}y = 5$

$y - 6x = -6(x-1) - y(x-1) - 6 + yx =$

$(x^2 - 2x + 1) - 1 + \left(\frac{y^2}{9} - \frac{4}{3}y + 4\right) - 4 = 5$

$-(x-1)(6+y) - 6 + yx$

$\left(\frac{y}{3} - 2\right)^2 + (x-1)^2$

$\frac{12^2 \cdot 26 + 65^2 - 13^2}{2 \cdot 12 \cdot \sqrt{26}}$

$\frac{1}{9}(y-6)^2 + (x-1)^2 = 10$

$a \neq 0 \quad b \neq 0$

$\begin{cases} \frac{a^2}{9} + b^2 = 10 \\ b + 6 - 6a - 6 = \\ = \sqrt{ab} \end{cases}$

$a = x - 1$
$b = y - 6$
$y = b + 6$
$6x = 6a + 6$

$b^2 - 13ab + 36a^2 = 0 \quad | : a^2$

$b^2 - 12ab + 36a^2 = ab$

$\begin{cases} b - 6a = \sqrt{ab} \\ a^2 + 9b^2 = 90 \end{cases}$

$b > 6a$
$ab > 0$

$\frac{b}{a} = t \quad t^2 - 13t + 36 = 0$

$a^2 + 9b^2 = 90$

$t = 4$
$t = 9$

$\frac{b}{a} = 4 \quad b = 4a \quad a^2 + 9b^2 = 90$

$\frac{b}{a} = 9 \quad b = 9a \quad a^2 + 9b^2 = 90$

$\frac{27}{\sqrt{73}} - \frac{18}{\sqrt{73}} = \sqrt{\frac{81}{73}}$

$\frac{18\sqrt{2} - 12\sqrt{2}}{\sqrt{29}} = \sqrt{\frac{36 \cdot 2}{29}}$

$a^2 + 16 \cdot 9a^2 = 90$

$a^2 + 9^3 a^2 = 90$

$145a^2 = 90$

$730a^2 = 90$

$29 \cdot \cancel{5}a^2 = \cancel{5} \cdot 18$

$\cancel{10} \cdot 73a^2 = \cancel{10} \cdot 9$

$730a^2 = 90$

$a^2 = \frac{18}{29} \quad a^2 = \frac{9}{73}$

$\left(\frac{3}{\sqrt{73}}; \frac{27}{\sqrt{73}}\right); \left(-\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}}; -\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{29}}\right)$

$a = \pm\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{29}} \quad a = \pm\frac{3}{\sqrt{73}}$

$\frac{9}{73} + \frac{9 \cdot 9^2 \cdot 3^2}{73} =$

$= \cancel{9 + 72927}$

$b = \pm\frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{29}} \quad b = \pm\frac{27}{\sqrt{73}}$

$13 \cdot 24$

$\frac{\cancel{13 \cdot 5^2} + 24 \cdot 12 - 13}{5 \cdot 12 \cdot \sqrt{26}} =$

$\times\begin{array}{r}729\\9\end{array}$
6561

$6570 \cancel{73}$

$\frac{3}{\sqrt{73}} = x - 1$

$\cancel{18} \cdot 9 + 288 =$

$= \frac{162 + 288}{5} = 90$

$= \frac{\overset{2}{\cancel{24}} \cdot \overset{5}{\cancel{25}}}{\cancel{5} \cdot \cancel{12} \cdot \sqrt{26}} = \frac{10}{\sqrt{26}}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$$\left(\frac{12}{5}\right)^{\log_5 t} - \left(\frac{13}{5}\right)^{\log_5 t} + 1$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)