МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \quad (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

(1) $3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}$

$3xy-2x-3y+2=3y(x-1)-2(x-1)=$

$=(3y-2)(x-1)$

$3y-2x=(3y-2)-2(x-1)$

Пусть $3y-2=a$, $x-1=b$

$a-2b=\sqrt{ab}$

$\begin{cases} a^2+4b^2-4ab=ab, & a-2b\geq 0 \\ & a\geq 2b \end{cases}$

$a^2-5ab+4b^2=0$

По т. Виета

$\left[\begin{array}{l} a_1a_2=4b^2 \\ a_1+a_2=5b \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=4b \\ a_2=b \end{array}\right.$

$(a-4b)(a-b)=0$

$(3y-2-4x+4)(3y-2-x+1)=0$

$(3y-4x+2)(3y-x-1)=0$

$3y-2\geq 2x-2$

A: ~~$\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}\geq(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2$~~

$(x-1)^2+\left(\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$x^2+1-2x+\frac{16}{9}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2\cdot\frac{25}{9}=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2=1$

$x-1=\pm 1$

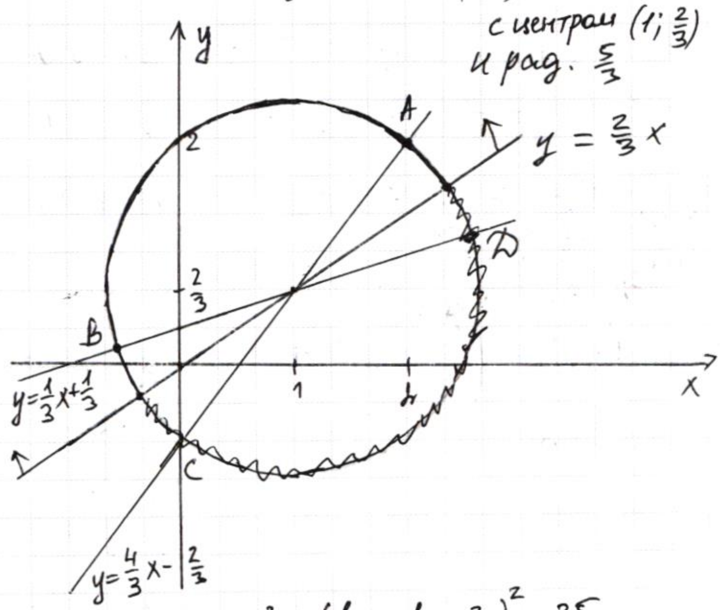
$\left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=0 \ \ominus \text{ (точка C: не подх.)} \end{array}\right.$

№2.

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (3y-4x+2)(3y-x-1)=0 \\ 3y\geq 2x \\ x^2+y^2-2x-\frac{4}{3}y=\frac{4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 3y-4x+2=0 \\ 3y-x-1=0 \end{array}\right. \\ y\geq\frac{2}{3}x \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{ll} y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3} & \text{– прямая} \\ y=\frac{1}{3}x+\frac{1}{3} & \text{– прямая} \end{array}\right. \\ y\geq\frac{2}{3}x \\ (x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=\left(\frac{5}{3}\right)^2 \ \text{– окружность с центром } (1;\frac{2}{3}) \text{ и рад. } \frac{5}{3} \end{cases}$$



B: $(x-1)^2+\left(\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}\right)^2=\frac{25}{9}$

$(x-1)^2+\frac{1}{9}(x-1)^2=\frac{25}{9}$

$\frac{10}{9}(x-1)^2=\frac{25}{9}$ (*)

$(x-1)^2=\frac{5}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$\circledast\ (x-1)^2 = \frac{5}{2}$

$x - 1 = \pm\sqrt{2,5}$

$x = 1 \pm \sqrt{2,5}$ $\ominus$ (точка D: не подходит

$x = 1 - \sqrt{2,5}$

A: $x = 2$

$y = \frac{4}{3}x - \frac{2}{3}$

$y(2) = \frac{8}{3} - \frac{2}{3} = 2$

B: $x = 1 - \sqrt{2,5}$

$y = \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}$

$y(1-\sqrt{2,5}) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2,5} + \frac{1}{3} =$

$= \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2,5}$

Ответ: $(2;2)$; $(1-\sqrt{2,5};\ \frac{2}{3} - \frac{1}{3}\sqrt{2,5})$

№1.

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos(2\alpha - 2\beta) = \pm\sqrt{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin 2(2\alpha + 2\beta) = \pm 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\frac{4}{\sqrt{17}} =$

$= \mp\frac{8}{17}$

$\cos 2(2\alpha + 2\beta) = 1 - 2\cdot\frac{1}{17} = \frac{15}{17}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2(2\beta + 2\alpha) - 2\alpha) = \sin(2(2\beta+2\alpha))\cdot\cos 2\alpha - \sin 2\alpha\cdot$

$\cdot\cos(2(2\beta + 2\alpha)) = \mp\frac{8}{17}\cdot\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha$

$-\frac{8}{17} = \mp\frac{8}{17}\cos 2\alpha - \frac{15}{17}\sin 2\alpha + \sin 2\alpha \quad |\cdot 17$

$-8 = \mp 8\cos 2\alpha + 2\sin 2\alpha \quad |:8$

$\frac{1}{4}(2\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha) \mp (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) + (\sin^2\alpha + \cos^2\alpha) = 0$

$|:\cos^2\alpha$

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \mp (1 - \operatorname{tg}^2\alpha) + \operatorname{tg}^2\alpha + 1 = 0$

$\cos^2\alpha \neq 0$ т.к $\operatorname{tg}\alpha$ определен

$\left[\begin{array}{l}\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + 2\operatorname{tg}^2\alpha = 0\\ \frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha + 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ 2\operatorname{tg}\alpha + \frac{1}{2} = 0\\ \frac{1}{2}\operatorname{tg} + 2 = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l}\operatorname{tg}\alpha = 0\\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{4}\\ \operatorname{tg}\alpha = -4\end{array}$

Ответ: $0;\ -\frac{1}{4};\ -4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2 \qquad x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(6x+x^2) \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

Пусть $a=x^2+6x=x(6+x)$, $a>0$

$3^{\log_4 a}+a \geq a^{\log_4 5}$

$\cancel{\log_3(3^{\log_4 a}+a) \geq \log_3(a^{\log_4 5})}$

$3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 5}-a$ *

* $a^{\log_4 5}-a \vee 0$

$(a-1)(\log_4 5-1) \vee 0 \qquad \log_4 5>1$

$\log_4 5-1>0$

$a-1 \vee 0$

$a \vee 1$

$a>1$

$\cancel{\log_3(3^{\log_4 a}) \geq \log_3|a^{\log_4 5}-a|}$

$\cancel{\log_4 a \geq \log_3 a(a^{\log_4 5-1}-1)} \quad a>0$

$\cancel{\log_4 a-\log_3 a-\log_3(a^{\log_4 5-1}-1) \geq 0}$

Если $0<a\leq 1$ $\quad a^{\log 5}-a \leq 0$, т.к

$3^{\log_4 a}>0$ при всех $a>0 \Rightarrow 3^{\log_4 a} \geq a^{\log_4 5}-a$

при всех $a\in(0;1]$

Если $a>1$

$3^{\log_4 a}=3^{\frac{\log_3 a}{\log_3 4}}=a^{\frac{1}{\log_3 4}}=a^{\log_4 3}$

$a^{\log_4 3}-a^{\log_4 5}+a \geq 0$

$a^{\log_4 3}+a \geq a^{\log_4 5}$

$-\log_4 3+\log_4 5 \leq 1$

$\log_4 \frac{5}{3} \leq 1$ при $a\leq 4$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$0 < x^2 + 6x \le 4$

$x^2 + 6x > 0$

$x(x+6) > 0$

$+ \quad -6 \quad - \quad 0 \quad + \quad x$

$-3 - \sqrt{13} < -6$

$-\sqrt{13} < -3$

$13 > 9$

$-3 + \sqrt{13} > 0$

$13 > 9$

$x^2 + 6x - 4 \le 0$

$\frac{D}{4} = 9 + 4 = 13$

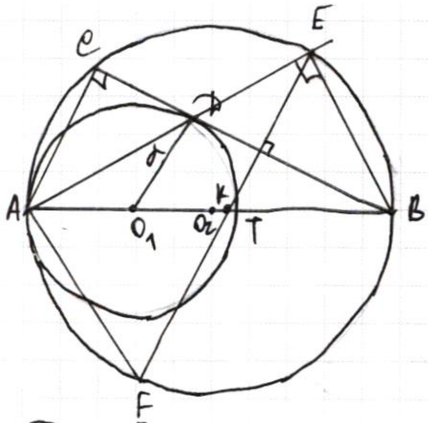
$x = -3 \pm \sqrt{13}$

$+ \quad -3-\sqrt{13} \quad - \quad -3+\sqrt{13} \quad +$

$\Rightarrow [-3 - \sqrt{13}; 6) \cup (0; -3 + \sqrt{13}]$

Ответ: $[-3 - \sqrt{13}; 6) \cup (0; -3 + \sqrt{13}]$

№4



1) $\angle ACB = 90°$ (вписан., опирается на диам. AB)

2) $O_1D \perp CB$ (CB - касательная)

3) $\triangle O_1BD \sim \triangle ABC$ ($\angle ABC$ - общий; $\angle O_1DB$ и $\angle ACB$ - прямые) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{BO_1}{AB}$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{2R - r}{2R}$

$\Omega \to R$

$\omega \to r$

$\frac{13 \cdot 2}{2(13+5)} = \frac{2R - r}{2R}$

$52R = 18 \cdot 4R - 36r$

$36r = 5 \cdot 4R$

$R = 1{,}8\, r$

4) $\left.\begin{array}{l} O_1D \perp CB \\ EF \perp CB \end{array}\right| \Rightarrow O_1D \parallel EF \Rightarrow \angle ADO_1 = \angle AEF$ (при секущ. AE)

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

5) BD – касат. к ω

AB – секущая

$\Rightarrow BT \cdot BA = BD^2$

$(2R-2z)2R = \frac{13^2}{4}$

$16(R-z)R = 169$

$16 \cdot 0{,}8z \cdot 1{,}8z = 169$

$z = \sqrt{\frac{169 \cdot 100}{16 \cdot 8 \cdot 18}} = \frac{130}{8 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{65}{24}$

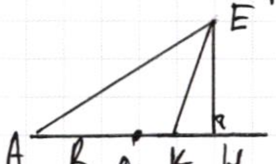
$R = 1{,}8z = \frac{\cancel{18}^{3} \cdot 65^{13}}{\cancel{10} \cdot \cancel{24}_{8}} = \frac{117}{24} = \frac{39}{8}$

~~6) Рассмотрим $\triangle AEK$~~

6) $\triangle ADO_1 \sim \triangle AEK$ ($\angle ADO_1 = \angle AET$; $\angle EAB$ – общий) $\Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{O_1A}{O_1D} = \frac{z}{z} = \frac{AK}{KE} = 1 \Rightarrow AK = KE$

7) Рассмотрим $\triangle AEK$:

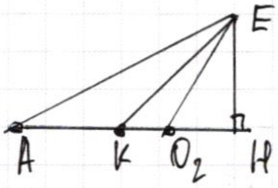


$AK > R$

$KH < O_2H \Rightarrow EK < EO_2 = R$ (т.к. $EK^2 = EH^2 + KH^2$, $EO_2^2 = EH^2 + HO_2^2$)

но $AK = EK \Rightarrow W$

$AO_2 = R = EO_2$



$AK < AO_2 = R$

$KH > O_2H \Rightarrow EK > EO_2 = R$, но $EK = AK \Rightarrow W$

Из этого следует, что $K = O_2 \Rightarrow EF$ – диаметр

8) $\angle AEB$ – прямой (AB – диаметр) – впис. угол

9) $\angle FAE$ – прямой аналогично (EF – диам.)

10) $AC^2 = (2R)^2 - \left(\frac{13+5}{2}\right)^2 = \frac{39^2}{16} - \frac{18^2 \cdot 2^2}{16} = \frac{3 \cdot 75}{16} = \frac{9 \cdot 25}{16} \Rightarrow AC = \frac{15}{4}$

11) $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} = \sqrt{\frac{225}{16} + \frac{25}{4}} = \sqrt{\frac{135}{16}}$

12) по т. косинусов:

$\cancel{AD^2 =}$ $AO_1^2 = O_1D^2 + AD^2 - 2\cdot AD\cdot O_1D\cdot\cos\alpha$

$\cancel{\left(\frac{65}{24}\right)^2} = \cancel{\left(\frac{65}{24}\right)^2} + \frac{135}{16} - 2\cdot\sqrt{\frac{135}{16}}\cdot\frac{65}{24}\cdot\cos\alpha$

$\sqrt{\frac{135}{16}} = \frac{65}{12}\cos\alpha \quad |\cdot 4$

$\frac{\sqrt{27\cdot 5}\cdot 3}{65} = \cos\alpha$

$\cos\alpha = \frac{9\cdot\sqrt{3}}{13\sqrt{5}}$

$\cos(90-\alpha) = \sqrt{1 - \frac{81\cdot 3}{169\cdot 5}} = \sqrt{\frac{602}{169\cdot 5}} = \frac{1}{13}\cdot\sqrt{12,4} = \cos\angle AEF$

Ответ: $r = \frac{65}{24}$; $R = \frac{39}{8}$; ~~cos∠AEF = arccos~~

$\angle AEF = \arccos\frac{1}{13}\cdot\sqrt{12,4}$

№6

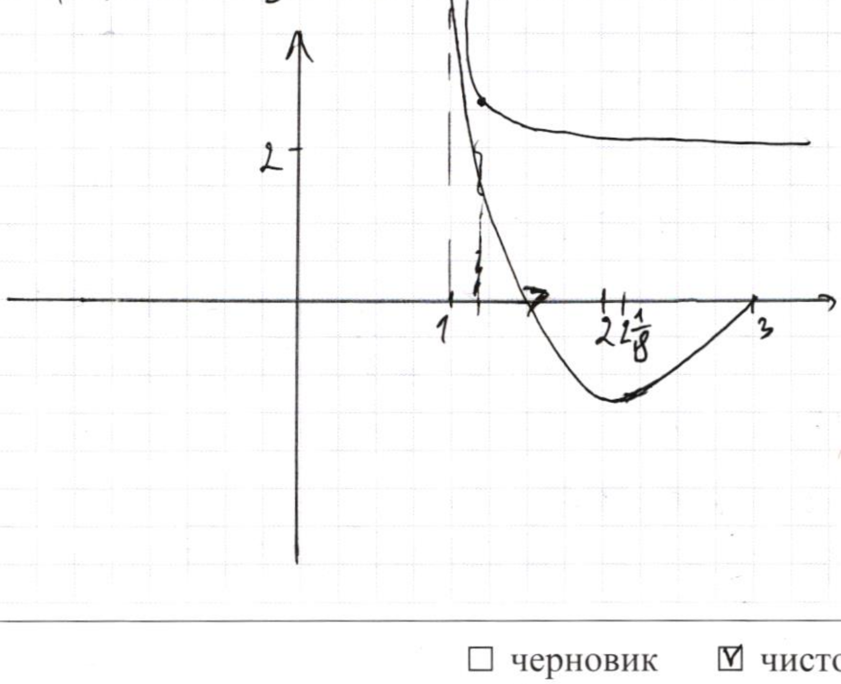
$\frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2(x+1)}$ — гипербола

$f(x) = 8x^2 - 34x + 30$ — парабола, ветви вверх

вершина $-\frac{b}{2a} = \frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$f(1) = 8 - 34 + 30 = 4$

$f(3) = 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 0$



$g(x): ax + b$:

$g(3) \geq 0$

$g(1) \geq 4$

$g(2) \leq 3$

$3a + b \geq 0$

$a + b \geq 4$

$2a + b \leq 3$

R, 2 ∠AFE SAFE $CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$\frac{AK}{2} = \frac{KE}{2}$ $AK = KE$

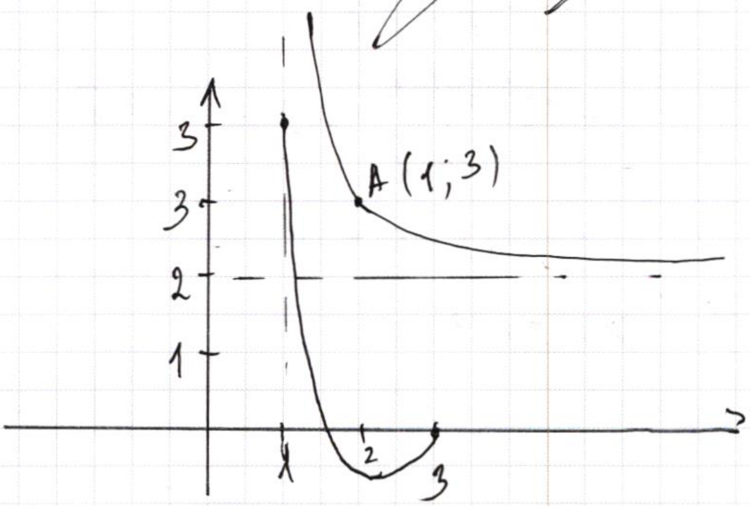
$BD = (2R - 22)\, 2R = 4(R-2)R$

$\frac{BT}{BD} = \frac{KT}{2} = \frac{BK}{2R-2}$

$CD \cdot BD = \frac{65}{4} = AD \cdot DE$

$\frac{BD}{BD+CD} = \frac{2R-2}{2R}$

$2R\,\cancel{BD}\,\cancel{A} = \cancel{CD}\,(2R-2)$ BD2



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

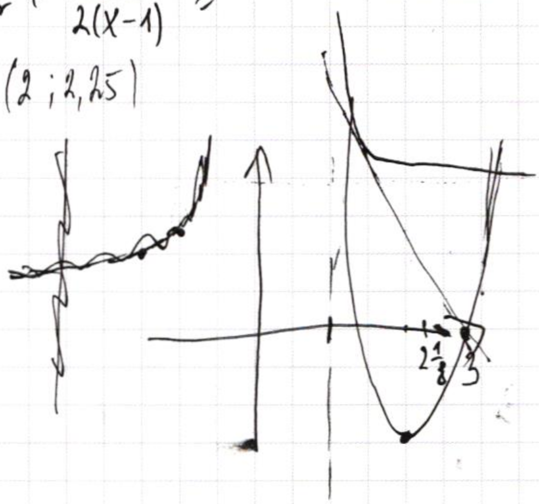
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$

$2 + \frac{1}{2(x-1)} \geq$

$(2 ; 2,25)$



$4x^2 - 17x + 15$

$D = 17^2 - 15 \cdot 16 = 289 - 240 = 49$

$x = \frac{17 \pm 7}{8}$ 3 1,25

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8} = 2\frac{1}{8}$

$-\frac{289}{8} + \frac{289}{16} + 30 = -6\frac{1}{8}$

$36\frac{1}{8}$

$8 - 34 + 30 = 4$

$a3 + b \geq 0$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) < 0$ n5

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

(1) $\sin 2(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2(\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$ $\quad \cos\alpha \neq 0$

$\cos 2\alpha = 1-$

$\sin(x+y)=\sin x\cdot\cos y+\sin y\cdot\cos x$

(1) $\sin 2\alpha\cdot \cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2$

$\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot(\cos^2\beta-\sin^2\beta)+ \dots = -\frac{1}{2\sqrt{17}}$ $\quad 1-2\sin^2\beta$

$\sin 2\alpha\cdot(1-2\sin^2\beta)$

(2) $= \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}-\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta-\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$\sin 2\alpha(1+\cos 4\beta) = -\frac{8}{17}-\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha$

$1 \pm 2 \sin 2\beta$

$\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}-\sin(2\alpha+4\beta)$ $\quad \pm\frac{8}{17}$

$1-$

$\cos(2\alpha+2\beta) = \pm\sqrt{1-\frac{1}{17}} = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\cdot -\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin(2(2\beta+2\alpha)-2\alpha) = \sin 2(2\beta+2\alpha)\cdot\cos 2\alpha -$

$-\sin 2\alpha\cdot\cos 2(\dots) = \pm\frac{8}{17}\cos\alpha-\frac{15}{17}\sin 2\alpha+\sin 2\alpha$ $= -\frac{8}{17}$

$1-2\cdot\frac{1}{17}=\frac{15}{17}$

$\pm\frac{8}{17}\cos 2\alpha+\frac{2}{17}\sin 2\alpha = -8$

$\frac{1}{4}\sin\alpha\cdot\cos\alpha\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha) = -1$

$\pm\cos 2\alpha = -1 - \frac{1}{4}\sin 2\alpha$

$\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha \pm (1-\operatorname{tg}^2\alpha) = -\operatorname{tg}^2\alpha - 1$ $\quad \pm\cos 2\alpha+\frac{1}{4}\sin 2\alpha = -1$

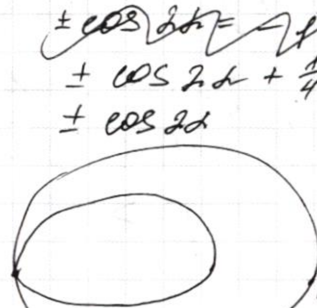
$\pm\cos 2\alpha$

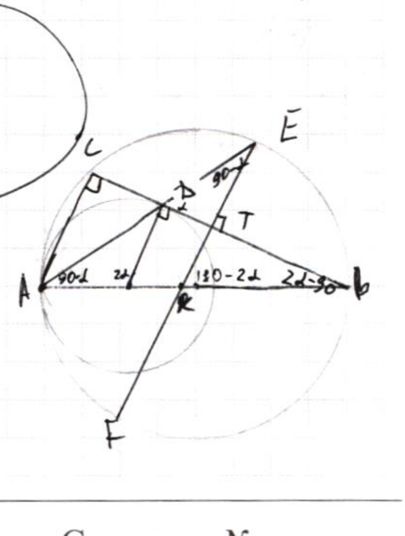
(7) $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha = -2$ $\quad -\frac{1}{2}\operatorname{tg}\alpha+2\operatorname{tg}^2\alpha=0$

$\operatorname{tg}\alpha = -4$ $\quad \operatorname{tg}\alpha = 0$

$2\operatorname{tg}\alpha-\frac{1}{2}=0$

$\operatorname{tg} = \frac{1}{4}$



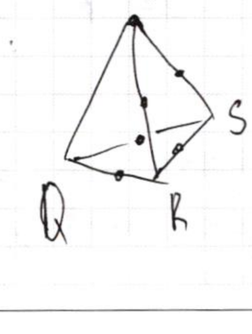


85
4
51

48

78
403
243
845
5
591

308



$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$3y(x-1)-2(x-1)$

$(3y-2)(x-1)$

$3y-2x\geq 0$

$y\geq \frac{2}{3}x$

$(x-1)^2+(y-\frac{2}{3})^2=$ $=\frac{4}{3}+1=\frac{11}{3}$

$\frac{4}{3}+1+\frac{4}{9}=\frac{16}{9}=\frac{25}{9}$

$9y^2+4x^2-12yx=3xy-2x-3y+2$

$(3y-2)-2(x-1)$

$9y^2+4x^2-15yx+2x+3y-2=0$

$(2x+\frac{1}{2})^2+(3y+\frac{1}{2})^2$

$(x-1)^2+(y-1)^2=1$

$(x+1)^2+$

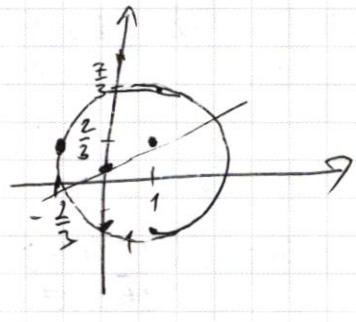
$(3y-2)^2+4(x-1)^2-4(3y-2)(x-1)=(3y-2)(x-1)$

$a^2+4b^2-5ab=0$

$(a-b)(a-4b)=0$ $\quad 4b^2 \quad 5b \quad b=a \quad 4b=a$

$(3y-2-x+1)(3y-2-4x+4)=0$

$y=\frac{x}{3}+\frac{1}{3} \qquad y=\frac{4}{3}x-\frac{2}{3}$



$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(6x+x^2)\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4 a}+a\geq a^{\log_4 5}$ $\quad 1+1\geq 1$ $\quad a=1$

$\log_4 a \geq \log_3 a(a^{\log_4 \frac{5}{4}}-1)$

$\log_4 a+\log_3 a-\log_3 a^{\log_4 5}\geq 0$ $\quad \log_4 5 \; 1 \quad \log_4 4 = \frac{5}{4}$

$\log_4 a+\log_3 a(1-\log_4 5)\geq 0$

$3^{\log_4 a}$ $\quad \frac{17}{24}$ $\quad \log_a 3+\log_a 4-\frac{\log_4 5}{\log_4 a}\geq 0$

$\log_a 12-\log_a 5\geq 0$ $\qquad \frac{\log_a \frac{3}{4}}{\log_a 3}$

$(a-1)(12-5)\geq 0$ $\qquad \log_a 3-\log_a 4$

$a\geq 1$

$3^{\frac{\log_3 4}{\log_3 a}}$ $\quad 4^{\log_a 3}$ $\quad \log_3 \frac{3}{11}/\log_a 4$

$\log_4 a \; \frac{1}{\log_3 4}$

$\log_4 3+1 \qquad \log_a(b+c) \qquad 1+2$

$3^{\log_4 3}$ $\quad 2$ $\quad 3$ $\quad \log_3(9+27)=2=$ $\quad 3+6$ $\quad a$

$\frac{\log_4 3}{\frac{1}{\log_3 4}}$ $\quad \frac{\log_3 2}{\log_3 2}$ $\quad 3+4\geq 5$ $\quad 1+\log_3 4\cdot\log_3 2$ $\quad 3^{\log_4\frac{4}{3}}-3^{\frac{5}{4^3}}\geq 1$ $\quad 4 \; 5$

$3\geq 3^{\log_4 5}-\log_4 3$

$3^{\log_4 3}(3^{\log_4\frac{5}{3}}-1)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)