



МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2 + 18x|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = 8$ ,  $BD = 17$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $1 \leq x \leq 24$ ,  $1 \leq y \leq 24$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leq ax + b \leq -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $ABCD$ , вершина  $A$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $AD$ . Известно, что  $AB = 1$ ,  $BD = 2$ ,  $CD = 3$ . Найдите длину ребра  $BC$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 \end{cases}$$

$$(1): \quad \Delta = 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2$$

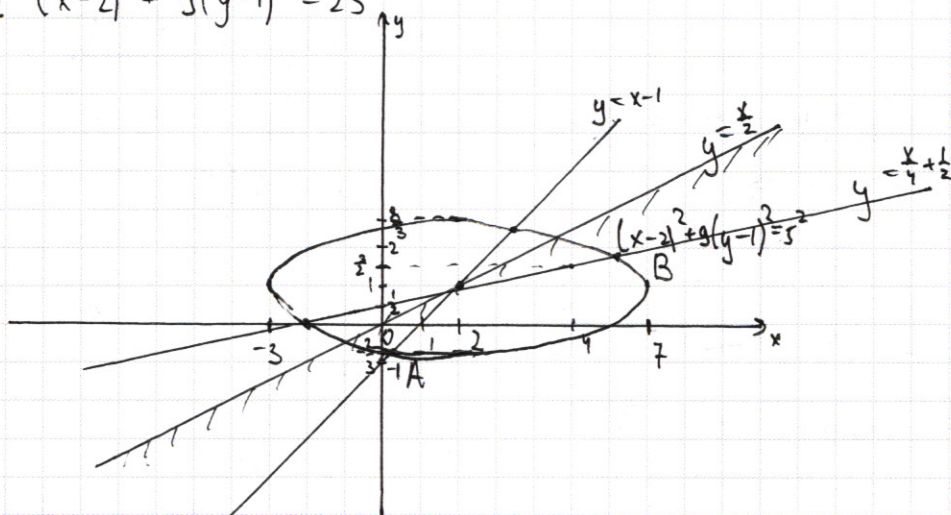
$$x_{1,2} = \frac{5y-1 \pm 3(y-1)}{2}$$

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2-x+2y-2=0 & \text{ОДЗ: } x-2y \geq 0 \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25 \\ y \leq \frac{x}{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 2 \\ x = y + 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \\ y = x - 1 \end{cases}$$

Множество Реш

$$\begin{cases} x^2 + x(1-5y) + 4y^2 + 2y - 2 = 0 \quad (1) \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$



Пересечение графиков  $\rightarrow$   
решения системы  
По ОДЗ решения - координаты т. А и т. В

$$I \quad \begin{cases} y = x - 1 \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow (x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2) = \pm \frac{5}{\sqrt{10}}$$

$$x = 2 \pm \frac{5}{\sqrt{10}}$$

т.к. мы ищем координаты для т. А  
по графику видно, что  $x < 1 \Rightarrow x = 2 - \frac{5}{\sqrt{10}}$

$$II \quad \begin{cases} y = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4y - 2 \\ (4y-4)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow$$

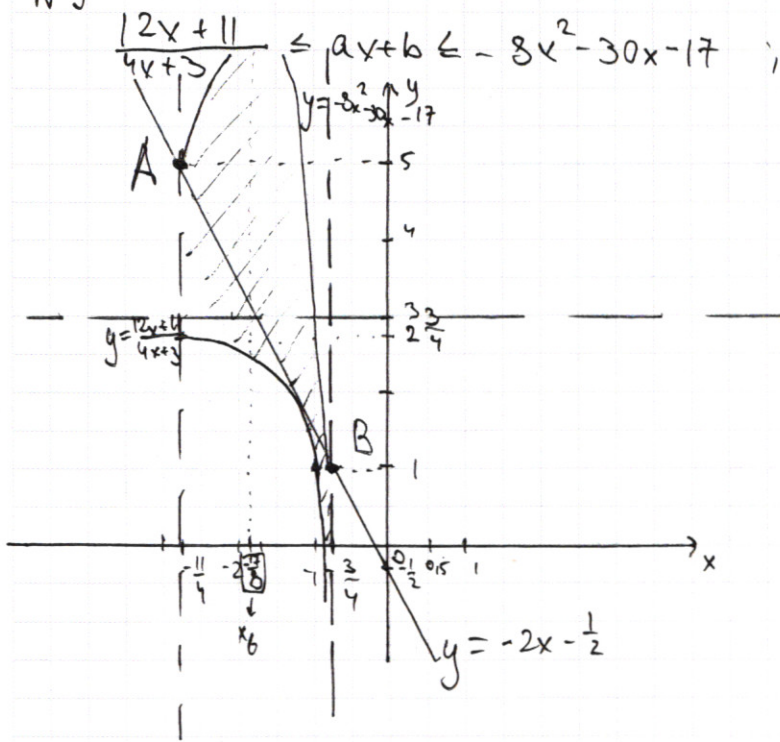
$$25(y-1)^2 = 25$$

$$(y-1)^2 = 1 \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ y = 2 \end{cases}$$

Тогда координаты т. В  
(6; 2)

Ответ:  $(2 - \frac{\sqrt{10}}{2}; 1 - \frac{\sqrt{10}}{2})$ ; (6; 2).

№5



$$ax+b \in [-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}]$$

Искомая прямая должна  
 летать "между" графиками  
 $y = \frac{12x+11}{4x+3}$  и  $y = -8x^2 - 30x - 17$   
 крайнее верхнее положение  
 такой прямой, когда она  
 проходит через точки  
 $A(-\frac{11}{4}; 5)$  и  $B(-\frac{3}{4}; 1)$   
 крайнее нижнее - касание  
 с графиком  $y = \frac{12x+11}{4x+3}$ .

Я утверждаю что такая прямая всего одна, и она проходит через  $A$  и  $B$

и касается графика  $y = \frac{12x+11}{4x+3}$ .

$$\begin{cases} -\frac{11}{4}a + b = 5 \\ -1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases} \quad \begin{cases} 4 = -\frac{11}{4}a + \frac{3}{4}a \\ b = 1 + \frac{3}{4}a \end{cases} \quad \begin{cases} a = -2 \\ b = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Проверим касание с графиком  $y = \frac{12x+11}{4x+3}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2} \quad (\text{дальнейшее возмущение ибо } x = -\frac{3}{4} \text{ не входит в ОДЗ)}$$

$$12x+11 = -8x^2 - 2x - 6x - \frac{3}{2}$$

$$16x^2 + 40x + 25 = 0$$

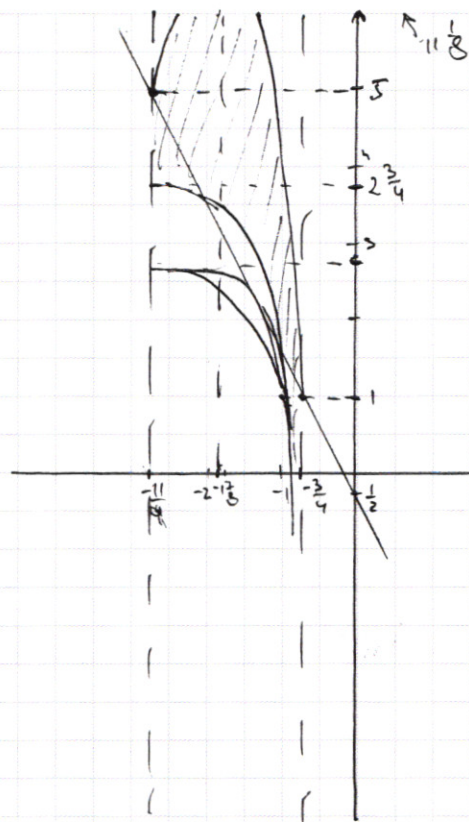
$$(4x+5)^2 = 0$$

$$x = -\frac{5}{4}, \text{ ч.т.д.}$$

$$y = -2x - \frac{1}{2} \rightarrow \text{искомая}$$

Ответ:  $(-2; -\frac{1}{2})$ .

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\left(-\frac{11}{4}; 5\right)$$

$$y = -2x - \frac{1}{2}$$

$$\begin{cases} 5 = -\frac{11}{4}a + b \\ 1 = -\frac{3}{4}a + b \end{cases}$$

$$4 = \left(-\frac{11}{4} + \frac{3}{4}\right)a$$

$$1 = +\frac{3}{4} \cdot (-2) + b$$

$$4 = -2a \Rightarrow a = -2 \Rightarrow b = -\frac{1}{2}$$

$$b = -\frac{1}{2}$$

$$y_{кас} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

(2:55)

37 минут

$$\frac{-12+11}{-4+3} \leq 2 - \frac{1}{2} \leq -8 + 30 - 17$$

$$-\frac{1}{1} \leq \dots$$

$$1 \leq \frac{3}{2} \leq 5$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = -2x - \frac{1}{2}$$

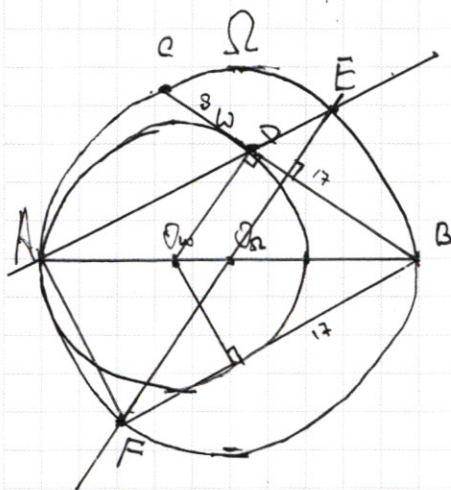
$$12x+11 = -8x^2 - 2x - 6x - \frac{3}{2}$$

$$8x^2 + 20x + 11 + \frac{3}{2} = 0$$

$$16x^2 + 40x + 25 = 0$$

$$\left(\frac{4}{3}\right)^2 = 100 - 16 \cdot 25 = 0$$

$$(4x+5)^2 = 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{4}$$



R<sub>1</sub>  
P  
LAFE  
SAEF

$$3+4+5+4+6$$

$$20+13+3=33$$

макс. 3/33.



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №       
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x| \log_{12} 13 - 18x$$

$$x^2 + 18x \geq |x^2+18x| \log_{12} 13 - 5^{\log_{12}(x^2+18x)}$$

$$\log_{12} x^2+18x \left( 5^{\log_{12} x^2+18x} \right)$$

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + (x^2)^{\log_{12} 12} \geq |x^2+18x| \log_{12} 13 - 18x$$

$$5+3=2+6$$

$$\ln(5+3) = \ln(2+6)$$

$$\ln 5 + \ln 3 = \ln 2 + \ln 6$$

$$\log_2 4 + \log_2 8 = \log_2 32 = 5$$

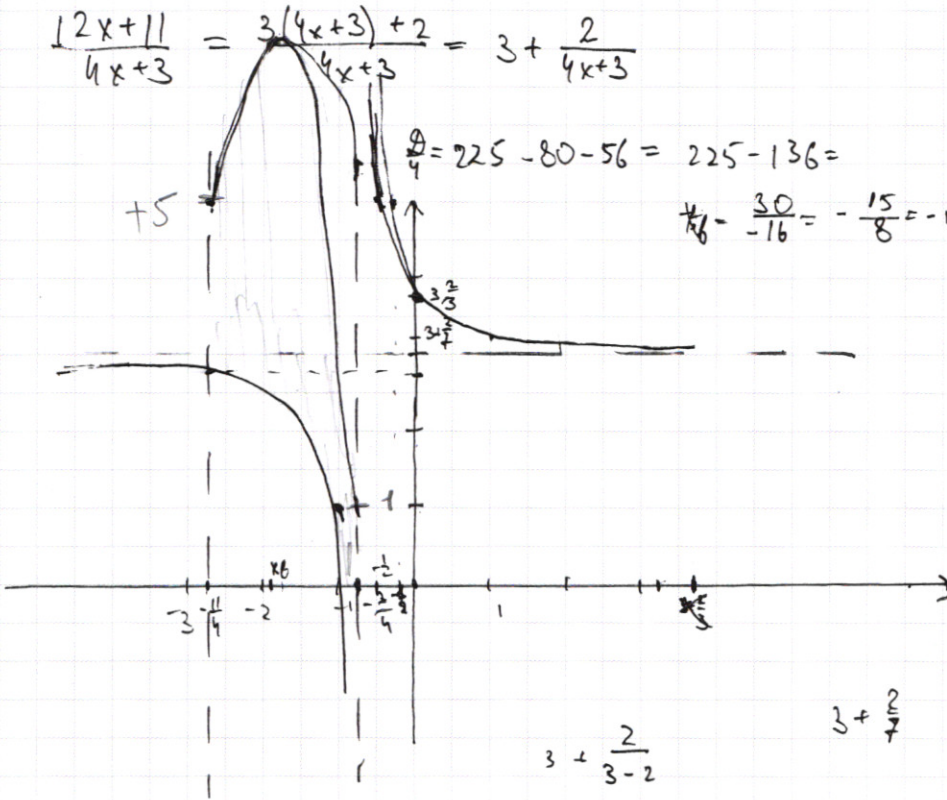
$$\ln 15 = \ln 12$$

$$x^2 + 18x \geq 0$$

$$x(x+18) \geq 0$$

$$x \leq -18 \quad x \geq 0$$

$$\frac{12x+11}{4x+3} = \frac{3(4x+3)+2}{4x+3} = 3 + \frac{2}{4x+3}$$



$$D = 225 - 80 - 56 = 225 - 136 = 89$$

$$x_1 = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8} = -1\frac{7}{8}$$

$$2^{\log_2 4} = 4$$

$$x^2 + 18x - 13 = 0$$

$$x_1 + x_2 = -18$$

$$x_1 x_2 = -13$$

$$150 + 75 = 225$$

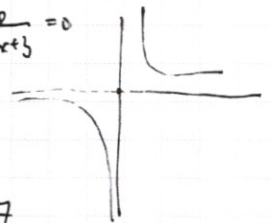
$$\frac{225}{89}$$

$$4x+3=0$$

$$x = -\frac{3}{4}$$

$$y=0$$

$$\frac{2}{4x+3} = 0$$



$$f'(x) = 0 + \frac{0+4 \cdot 2}{(4x+3)^2} = \frac{8}{(4x+3)^2}$$

$$3 + \frac{2}{-8} = 3 - \frac{1}{4} = \frac{11}{4}$$

$$-\frac{8 \cdot 121}{16 \cdot 2} + \frac{30 \cdot 11}{x_2} - 17$$

$$-\frac{8 \cdot 225}{8 \cdot 8} + \frac{30 \cdot 15}{x_1} - 17$$

$$\frac{-121 + 165 - 34}{2} = 5$$

$$-\frac{15^2}{8} + 2 \cdot \frac{15^2}{8} - 17 = \frac{15^2}{8} - 17 = \frac{225}{8} - 17$$

$$5 - \frac{1}{4} = \frac{19}{4} = 4\frac{3}{4}$$

$$\frac{22}{8} - \frac{15}{8} = \frac{7}{8}$$

$$\frac{288+1}{8} = 36\frac{1}{8}$$

$$\frac{288+1}{8} = 36\frac{1}{8}$$

$$-\frac{8 \cdot 9}{16 \cdot 2} + \frac{30 \cdot 3}{x_2} - 17$$

$$-\frac{9}{2} + 22.5 - 17 = 22.5 - 21.5 = 1$$





черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$\frac{1}{20} \cdot \frac{16}{15} = \frac{16}{300} = \frac{4}{75}$   
 $\frac{1}{5} + \frac{2\beta}{25} = \frac{\sqrt{45}}{5}$   
 не можем 3

$$\begin{cases} 2\sin\alpha\cos\alpha + \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha\cos 4\beta + \cos 2\alpha\sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha\cos 2\beta + \sin 2\beta\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad (1) \\ \sin 2\alpha(\cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + \cos 2\alpha \cdot 2\sin 2\beta\cos 2\beta + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \sin(4\beta) &= 2\sin 2\beta\cos 2\beta \\ \cos(4\beta) &= \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta = 1 - 2\sin^2 2\beta \\ \sin 2\alpha &= \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} = \frac{2\tg\alpha}{\tg^2\alpha + 1} \end{aligned}$$

$$(1) \frac{2\tg\alpha}{\tg^2\alpha + 1} \cdot \frac{1 - \tg^2\beta}{\tg^2\beta + 1} + \frac{2\tg\beta}{\tg^2\beta + 1} \cdot \frac{1 - \tg^2\alpha}{\tg^2\alpha + 1} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin 4\alpha = \frac{2\tg 2\alpha}{\tg^2 2\alpha + 1}$$

$$\frac{2\tg\alpha(1 - \tg^2\beta) + 2\tg\beta(1 - \tg^2\alpha)}{(\tg^2\beta + 1)(\tg^2\alpha + 1)} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(4\beta) = 1 - 2 \left( \frac{2\tg\beta}{\tg^2\beta + 1} \right)^2$$

$$2\tg\alpha + 2\tg\beta - 2\tg\alpha\tg^2\beta - 2\tg\beta\tg^2\alpha = \dots$$

$$\cos(2\beta) = \frac{\cos^2\beta - \sin^2\beta}{\sin^2\beta + \cos^2\beta} = \frac{1 - \tg^2\beta}{\tg^2\beta + 1}$$

$$2(\tg\alpha + \tg\beta) - 2\tg\alpha\tg\beta(\tg\alpha + \tg\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\cos(4\beta) = \frac{1 - \tg^2 2\beta}{\tg^2 2\beta + 1}$$

$$\frac{(a+b)(1-ab)}{(a^2+1)(b^2+1)} = -\frac{1}{2\sqrt{5}} \frac{(\tg\alpha + \tg\beta)(1 - \tg\alpha\tg\beta)}{(\tg^2\beta + 1)(\tg^2\alpha + 1)} = -\frac{1}{2\sqrt{5}}$$

$$\begin{aligned} \tg(2\alpha) &= \frac{\sin(2\alpha)}{\cos(2\alpha)} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha} = \frac{2\tg\alpha}{1 - \tg^2\alpha} \end{aligned}$$

$$(2) \frac{2\tg\alpha}{\tg^2\alpha + 1} \left( \frac{1 - \tg^2 2\beta}{\tg^2 2\beta + 1} \right) + \frac{1 - \tg^2\alpha}{\tg^2\alpha + 1} \cdot \frac{2\tg 2\beta}{\tg^2 2\beta + 1} + \frac{2\tg\alpha}{\tg^2\alpha + 1} = -\frac{4}{5}$$

$$\begin{aligned} A &= \frac{2a}{1 - a^2} \\ B &= \frac{2b(1 - b^2)}{b^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\frac{2a(1 - B^2) + (1 - a^2)(2B) + 2a \cdot (B^2 + 1)}{(a^2 + 1)(B^2 + 1)} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{2a - 2aB^2 + 2B - 2a^2B + 2aB^2 + 2a}{(a^2 + 1)(B^2 + 1)} = -\frac{4}{5}$$

$$\frac{4ab^2 + 4a + 2 - 2a^2 + 2b^2 - 2b^2}{(a^2 + 1)(B^2 + 1)} = \frac{4ab^2 + 4a + (2 - 2b^2)(1 - a^2)}{(a^2 + 1)(B^2 + 1) \cdot (1 - b^2 + b^2 + 1)} = \dots$$

$$= 2(B^2 + 1)(B^2(a^2 + 2a - 1) - (a^2 - 2a - 1))$$

$$2ab^2 + 2a + 1 - \frac{a^2 + a^2b^2 - b^2 - 2ab + 2ab + b^2}{-(a^2b^2)} - b^2 = b^2(a^2+1)^2 - (a+b)^2 - b^2 + 2ab + 2a + 1 + a^2 - a^2 =$$

$$= b^2(a^2+1)^2 - (a+b)^2 - (a+b)^2 + (a+1)^2 =$$

$$= (a+1)^2(b^2+1) - ((a+b)^2 + (a-b)^2) =$$

$$= (a+1)^2(b^2+1) - 2(a^2+b^2)$$

$$x(y-x-2y+2)$$

$$x(y-1) + 2(y-1) = (x-2)(y-1) \geq 0$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{x(y-x-2y+2)} \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} x \geq 2 & \text{или} & x \leq 2 \\ y \geq 1 & & y \leq 1 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} x-2y \geq 0 \\ x \geq 2y \\ y \leq \frac{x}{2} \end{matrix}$$

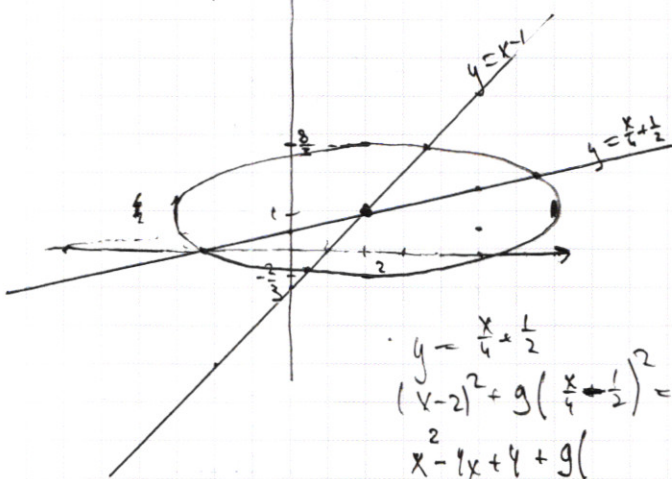
$$x^2 - 4x + 4 + 9y^2 - 18y + 9 = 25$$

$$(x-2)^2 + 9(y-3)^2 = 25$$

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{(x-2)(y-1)} \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 = 25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 - 4xy + 4y^2 - xy + x + 2y - 2 = 0 \\ (x-2y)^2 - (x-2)(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & x(y-x-2y) \\ & x(y-x) \\ & -5xy + 4y^2 + 2y = \\ & = -x^2 - x + 2 \\ & 4y(y-x) + y(2-x) \end{aligned}$$



$$(x-2y)^2 = (x-2)(y-1)$$

$$\begin{aligned} (y-1)^2 &= \frac{25}{9} \\ y-1 &= \pm \frac{5}{3} \\ y &= \frac{5}{3} + 1 = \frac{8}{3} = 2\frac{2}{3} \\ y &= -\frac{5}{3} + 1 = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

$$x^2 + x(1-5y) + 4y^2 + 2y - 2 = 0$$

$$\begin{aligned} D &= 1 - 10y + 25y^2 - 16y^2 - 8y + 8 = \\ &= 9y^2 - 18y + 9 = 9(y-1)^2 \end{aligned}$$

$$x_{1,2} = \frac{5y-1 \pm 3(y-1)}{2}$$

$$x_1 = \frac{8y-4}{2} = 4y-2$$

$$x_2 = \frac{2y+2}{2} = y+1$$

$$\begin{cases} y = \frac{x+2}{4} = \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \\ y = x-1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \frac{x}{4} + \frac{1}{2} &= x-1 \\ \frac{x+2}{4} - x + 1 &= 0 \\ \frac{x+2-4x+4}{4} &= 0 \\ x &= 2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2-2y &= \sqrt{10} \\ y &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= 0,5 \\ y &= -0,5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} y &= x-1 \\ (x-2)^2 + 9(y-1)^2 &= 25 \end{aligned}$$

$$(x-2)^2 + 9(x-2)^2 = 25$$

$$(x-2)^2 = \frac{25}{10}$$

$$x-2 = \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{\frac{5}{2}}$$

$$y = 1 \pm \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$

$$x = 2 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$

$$y = 1 - \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{10}}$$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО  
ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
(НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)



черновик     чистовик  
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №\_\_  
(Нумеровать только чистовики)