МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \quad (1)$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) = \sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta\cdot\cos2\alpha \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha = -\frac{2}{5} \quad (2)$$

Вычтем из (2) (1):

$$\sin2\alpha\cdot\cos4\beta + \sin4\beta\cdot\cos2\alpha + \sin2\alpha - \sin2\alpha\cdot\cos2\beta - \sin2\beta\cdot\cos2\alpha = \frac{1}{\sqrt5} - \frac{2}{5}$$

$$\sin2\alpha(\cos4\beta - \cos2\beta + 1) + \cos2\alpha(\sin4\beta - \sin2\beta) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$\sin2\alpha(2\cos^2 2\beta - \cos2\beta) + \cos2\alpha(2\sin2\beta\cdot\cos2\beta - \sin2\beta) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta(2\cos2\beta-1) + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta(2\cos2\beta-1) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$(2\cos2\beta-1)(\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos2\alpha) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$(2\cos2\beta-1)\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$(2\cos2\beta-1)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right) = \frac{\sqrt5-2}{5}$$

$$2\cos2\beta - 1 = \frac{2\sqrt5}{5} - 1$$

$$\cos2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$$

Данному значению $\cos2\beta$ соответствует два значения $\sin2\beta$: $\sin2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \frac{2\sqrt5}{5}$ и $\sin2\beta = -\frac{2\sqrt5}{5}$. Рассмотрим эти два случая по-очереди:

1) Подставим $\cos2\beta = \frac{\sqrt5}{5}$ и $\sin2\beta = +\frac{2\sqrt5}{5}$ в уравнение (1): $\sin2\alpha\cdot\frac{\sqrt5}{5} + \frac{2\sqrt5}{5}\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt5} \;\Big|: \frac{\sqrt5}{5}$

$$\sin2\alpha + 2\cos2\alpha = -1$$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 1 = 0$

$\sin^2\alpha - 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0$

Т.к. $\cos\alpha = 0$ не является решением данного уравнения, то поделим его на $\cos^2\alpha$:

$tg^2\alpha - 2tg\alpha - 3 = 0$

Пусть $t = tg\alpha$, $t \in R$. Тогда:

$t^2 - 2t - 3 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 2^2 \Rightarrow t_{1,2} = 1 \pm 2 = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = 3 \\ tg\alpha = -1 \end{array}\right.$

2) Подставим $\cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$ и $\sin 2\beta = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$ в уравнение (1):

$\sin 2\alpha \cdot \frac{\sqrt{5}}{5} - \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \quad \Big| : \frac{\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = -1$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

Т.к. $\cos\alpha = 0$ не является корнем данного уравнения, то поделим его на $\cos^2\alpha$:

$3tg^2\alpha + 2tg\alpha - 1 = 0$

$3t^2 + 2t - 1 = 0$

$\frac{D}{4} = 1 + 3 = 2^2 \Rightarrow t_{1,2} = (-1 \pm 2)\cdot\frac{1}{3} = \left[\begin{array}{l} -1 \\ \frac{1}{3} \end{array}\right.$ $\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \end{array}\right.$

Объединив все значения, получим ответ:

$\left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = \frac{1}{3} \\ tg\alpha = 3 \end{array}\right.$

Ответ: $-1; \frac{1}{3}; 3$.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~2

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(x-6)(2y-1)} \\ (x-6)^2+(6y-3)^2=90 \end{cases}$$

Пусть $a=x-6$, $b=6y-3$. Тогда исходная система равносильна следующей:

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=\frac{ab}{3} \quad (1) \\ a^2+b^2=90 \quad (2) \\ a-2b\geq 0 \quad (3) \end{cases}$$

(1) $3a^2-13ab+\cancel{4}12b^2=0$

Если $b=0$, то данное уравнение имеет единственное решение $a=0$ и $b=0$, но $0^2+0^2\neq 90 \Rightarrow$ $\Rightarrow a\neq 0$ и $b\neq 0$. Тогда поделим данное уравнение на b^2:

$$3\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^2-13\cdot\frac{a}{b}+\cancel{4}12=0$$

Пусть $t=\frac{a}{b}$, $t\neq 0$. Тогда:

$$3t^2-13t+\cancel{4}12=0$$

$$D=169-144=5^2;\quad t_{1,2}=\frac{13\pm 5}{6}=\left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{4}{3} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \frac{a}{b}=3 \\ \frac{a}{b}=\frac{4}{3} \end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l} a=3b \\ a=\frac{4}{3}b \end{array}\right.$$

Рассмотрим 2 случая:

1) $a=3b$. Подставим $a=3b$ в уравнение (2):

$$9b^2+b^2=90$$

$$b=\pm 3$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=9 \\ b=3 \end{cases} \\ \begin{cases} a=-9 \\ b=-3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Необходимо, чтобы эти значения удовлетворяли неравенству (3):

1. $9-2\cdot 3\geq 0 \iff 3\geq 0$ — верно $\Rightarrow$ $\Rightarrow$ решение $a=9$, $b=3$ — подходит. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-6=9 \\ 6y-3=3 \end{cases} \quad \begin{cases} x=15 \\ y=1 \end{cases}$$

2. $-9+2\cdot 3\geq 0$; $-3\geq 0$ — неверно $\Rightarrow$ решение $a=-9$, $b=-3$ — не подходит.

2) $a=\frac{4}{3}b$. Подставим $a=\frac{4}{3}b$ в уравнение (2):

$$\frac{16b^2}{9}+b^2=90; \quad 25b^2=81\cdot 10$$

$$5b=\pm 9\sqrt{10}$$

$$b=\pm\frac{9\sqrt{10}}{5}$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b=\frac{9\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} a=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ b=-\frac{9\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

Необходимо, чтобы эти ~~нерав~~ значения удовлетворяли неравенству (3):

1. $\frac{12\sqrt{10}}{5}-\frac{18\sqrt{10}}{5}\geq 0 \iff -\frac{6\sqrt{10}}{5}\geq 0$ — неверно $\Rightarrow a=\frac{12\sqrt{10}}{5}$, $b=\frac{9\sqrt{10}}{5}$ — не подходят

2. $-\frac{12\sqrt{10}}{5}+\frac{18\sqrt{10}}{5}\geq 0 \iff \frac{6\sqrt{10}}{5}\geq 0$ — верно $\Rightarrow$

$\Rightarrow a=-\frac{12\sqrt{10}}{5}$, $b=-\frac{9\sqrt{10}}{5}$ — подходят $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \\ 6y-3=-\frac{9\sqrt{10}}{5} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5} \\ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{cases}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Объединив все полученные значения, получим ответ: $(15;1)$; $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$.

Ответ: $(15;1)$ и $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$.

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

По смыслу задачи: $10x - x^2 > 0$

$x \in (0;10) \Rightarrow |x^2-10x| = 10x - x^2$

$$10x - x^2 + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Т.к. $10x - x^2 > 0$, то пусть $10x - x^2 = 3^t$, $t \in R$.

$$3^t + 3^{t\cdot\log_3 4} \geq 5^{\log_3 3^t}$$

$$3^t + 4^t \geq 5^t$$

1) Пусть $t < 0$, тогд $3^t > 5^t$ и $4^t > 5^t \Rightarrow 3^t + 4^t > 5^t \Rightarrow$

$\Rightarrow$ неравенство выполняется.

При $t < 0$, $3^t \in (0;1)$: $\begin{cases} 10x - x^2 < 1 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 10x + 1 > 0 \\ x \in (0;10) \end{cases}$

$\frac{D}{4} = 25 - 1 = 24$; $x_{1,2} = 5 \pm 2\sqrt{6}$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 5-2\sqrt{6}) \cup (5+2\sqrt{6}; \infty) \\ x \in (0;10) \end{cases}$

Т.к. $5-2\sqrt{6}>0 \Leftrightarrow 25>24$ — верно и $10>5+2\sqrt{6} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow 25>24$ — верно, то $x\in(0;5-2\sqrt{6})\cup(5+2\sqrt{6};10)$

2) Пусть $t=0$: $3^0+4^0\geq 5^0$

$2\geq 1$ — верно $\Rightarrow t=0$ — подходит

$3^t=3^0=1 \Rightarrow 10x-x^2=1$; $x=5\pm 2\sqrt{6}$.

3) Пусть $t>0$. $3^t+4^t\geq 5^t$

Т.к. при $t\leq 0$ неравенство выполнялось и функции $f(t)=3^t+4^t$ и $g(t)=5^t$ монотонны, то неравенство будет выполнять как минимум до момента пересечения графиков $y=f(t)$ и $y=g(t)$.

Заметим, что $3^2+4^2=5^2 \Rightarrow$ при $t\in(0;5)$ неравенство выполняется. Докажем, что $3^t+4^t<5^t$ для всех $t>2$.

~~Если верно для некоторого~~

~~Т.к. при $t=2$ выполняется равенство, необходимо, чтобы при $t+\varepsilon$, $\varepsilon\to 0$ выполнялось $3^{t+\varepsilon}+4^{t+\varepsilon}<5^{t+\varepsilon}$.~~

Докажем по индукции:

Для $t=3$: $27+64<125$; $91<125$ — верно.

Докажем для $t+1$: $3^{t+1}+4^{t+1}<5^{t+1} \,|:5$

$\frac{3}{5}\cdot 3^t+4\cdot\frac{1}{5}\cdot 4^t<5^t$

Т.к. $3^t+4^t>\frac{3}{5}\cdot 3^t+\frac{4}{5}\cdot 4^t$ и $3^t+4^t<5^t$, то
$\frac{3}{5}\cdot 3^t+\frac{4}{5}\cdot 4^t<5^t$ — верно

Значит неравенство верно для $t\in(0;2]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} 10x - x^2 \le 2 \\ 10x - x^2 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 - 10x + 2 \ge 0 \\ x \in (0;10) \end{cases}$ $\frac{D}{4} = 25 - 2 = 23$

$x_{1,2} = 5 \pm \sqrt{23}$

$\begin{cases} x \in (-\infty; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; \infty) \\ x \in (0;10) \end{cases}$

$5 - \sqrt{23} > 0 \Leftrightarrow 25 > 23$ - верно

$10 > 5 + \sqrt{23} \Leftrightarrow 25 > 23$ - верно

$x \in (0; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; 10)$

Объединив, получим ответ:

$\left[\begin{array}{l} x \in (0; 5-2\sqrt{6}] \cup [5+2\sqrt{6}; 10) \\ x \in (0; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; 10) \end{array}\right.$

Т.к. $\sqrt{23} < 2\sqrt{6}$, то: $x \in (0; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; 10)$

Ответ: $x \in (0; 5-\sqrt{23}] \cup [5+\sqrt{23}; 10)$

№5

~~$f(1 \cdot 1) = f(1) + f(1) = f$~~

$f(2) = [\frac{2}{4}] = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = f(2 \cdot 2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2 \cdot 3) = 0$

$f(7) = 1$

$f(8) = f(4 \cdot 2) = 0$

$f(9) = f(3 \cdot 3) = 0$

$f(10) = f(5 \cdot 2) = 1$

$f(11) = 2$

$f(12) = f(3 \cdot 4) = 0$

$f(13) = 3$

$f(14) = f(7 \cdot 2) = 1$

$f(15) = f(5 \cdot 3) = 1$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

$f(16) = f(4\cdot 4) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = f(9\cdot 2) = 0$

$f(19) = 4$

$f(20) = f(4\cdot 5) = 1$

$f(21) = f(3\cdot 7) = 1$

$f(22) = f(2\cdot 11) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = f(4\cdot 6) = 0$

$f(25) = f(5\cdot 5) = 2.$

Т.к. $f(1\cdot 1) = f(1) + f(1) = f(1)$, то $f(1) = 0.$

Тогда $f(a\cdot \frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a}) = f(1) = 0$

$f(\frac{1}{a}) = -f(a).$

Тогда $f(\frac{1}{2}) = 0, f(\frac{1}{3}) = 0, f(\frac{1}{4}) = 0, f(\frac{1}{5}) = -1\ldots$

Отриц-ые значения будут только у:

$f(\frac{1}{5}) = -1, f(\frac{1}{7}) = -1, f(\frac{1}{10}) = -1, f(\frac{1}{11}) = -2,$

$f(\frac{1}{13}) = -3, f(\frac{1}{14}) = -1, f(\frac{1}{15}) = -1, f(\frac{1}{17}) = -4\ldots$

Всего -14

Тогда пар: $\overset{0}{10}\cdot 14 + \overset{1}{7}\cdot 7 + \overset{2}{3}\cdot 4 + \overset{3}{1}\cdot 3 + \overset{4}{2}\cdot 1 =$

$= 140 + 49 + 12 + 3 + 2 = 189 + 17 = 206$

Ответ: 206

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\sin 2\alpha - 2\cos 2\alpha = -1$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 2 = -1$

$3\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \cos^2\alpha = 0$

$3\operatorname{tg}^2\alpha + 2\operatorname{tg}\alpha - 1 = 0;\quad D = 1+3 = 4;\quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{1\pm 2}{3} = \left[\begin{array}{l} 1 \\ -\frac{1}{3}\end{array}\right.$

-2

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ (x-6)^2 + (6y-3)^2 \cancel{= 0} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 6 \\ y = \frac{1}{2} \end{cases}$

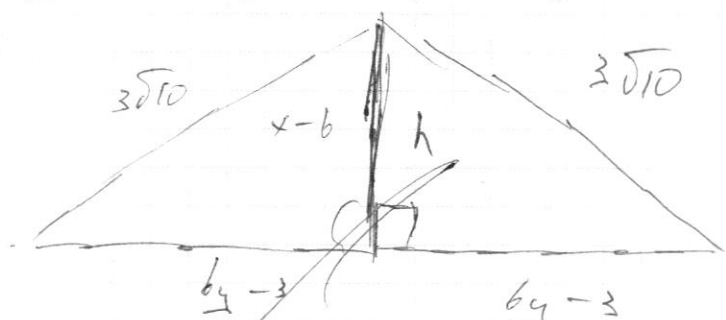
$\cancel{(x-6)^2 + (6y-3)^2 - 45 = 45}$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90;\qquad a = x-6;\ b = 6y-3$

$x^2 - 24xy + 144y^2 = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + x - 26xy + 144y^2 + 12y - 6 = 0$

$(x+1)^2 - x + (12y+1)^2 - 12y - 2 - 6 - 26xy = 0$



$a = 12y - 6 \Rightarrow h - a = x - 12y$

$\begin{cases} a - 2b = \sqrt{\ldots} \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$

$a^2 - 4ab - 4b^2 - a^2 - b^2 = \sqrt{\ldots} - 90$

$-4ab - 5b^2 = \sqrt{\ldots}$

$\cancel{(x-6)(12y-3) = 6xy}$

$(x-6)(2y-1) =$

$= 2xy - x - 12y + 6$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha\,(\cos 4\beta - \cos 2\beta + 1) + \cos 2\alpha\,(\sin 4\beta - \sin 2\beta) = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

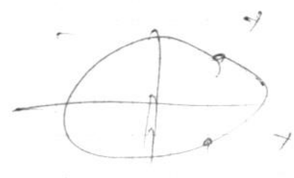
$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta\,(2\cos 2\beta - 1) + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta\,(2\cos 2\beta - 1) = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

$(2\cos 2\beta - 1)(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta) = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}}$

$(2\cos 2\beta - 1)\cdot\underbrace{\sin(2\alpha+2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt{5}}} = -\frac{2}{5} + \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}-2}{5}$

$2\cos 2\beta - 1 = \frac{2\sqrt{5} - 5}{5}$

$2\cos 2\beta = \frac{2\sqrt{5}}{5}; \quad \cos 2\beta = \frac{\sqrt{5}}{5}$



Т.к. [illegible] $\exists$ 2 возможных значения $\sin 2\beta$:

$\sin 2\beta = \sqrt{1-\cos^2 2\beta} = \sqrt{1 - \frac{5}{25}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$

$\sin 2\beta = -\sqrt{1-\cos^2 2\beta} = -\frac{2\sqrt{5}}{5}$

1) $\sin 2\alpha\cdot\frac{\sqrt{5}}{5} + \frac{2\sqrt{5}}{5}\cdot\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin 2\alpha + 2\cos 2\alpha = -1;$ $\quad$ $2\sin\alpha\cos\alpha + 2\cos 2\alpha = -1$

~~$\sin 2\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 = -1$~~ $\quad$ $\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 2\sin^2\alpha + 1 = -\frac{1}{2}$

$\sin\alpha\,(\cos\alpha - 2\sin\alpha) = -\frac{1}{2}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 2 = -1$

$4\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - 1 = 0$

$3\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha - \sin^2\alpha = 0 \;\Big|\; :\cos^2\alpha \;\Rightarrow\; \operatorname{tg}^2\alpha - 2\operatorname{tg}\alpha - 3 = 0$

$D = 1 + 3 = 2^2; \; \operatorname{tg}\alpha = 1 \pm 2 = \left[\begin{array}{l} 3 \\ -1 \end{array}\right.$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

По усл. 3. $10x - x^2 > 0$; $x(10-x) > 0$; $x \in (0;10)$

$x^2 - 10x < 0$

$10x + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

Пусть $t = 10x - x^2$, $t > 0$:

$t + t^{\log_3 4} - 5^{\log_3 t} \geq 0$

~~$f(t) = t + t^{\log_3 4}$; $f'(t) = 1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} > 0$~~

$t =$

$t + t^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3 t}$ $t = 9$

$1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1}$

$5^{\log_3 t} \cdot \ln 5$

Д-ть: $1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} \geq 5^{\log_3 t} \cdot \ln 5$ $\forall t > 0$:

$t = 3$: $1 + \log_3 4 \cdot \frac{4}{3} > 5 \cdot \ln 5$

$3 + 4\log_3 4 > 15 \cdot \ln 5$

$3^3 \cdot 4^4 \geq 3^{15 \cdot \ln 5}$

$27 \cdot 256$

$1 + \log_3 4 \cdot (t+1)^{\log_3 4 - 1}$ $t \in [0; 9]$

$< 5^{\log_3 t + 1} \cdot \ln 5$

$5^{\log_3 t} > 3^{\log_3 t}$

~~$1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 4 - 1} < t \cdot \ln 5$~~ $a > 1 \Rightarrow \log_3 \frac{4}{3} > 0$

$1 + \log_3 4 \cdot t^{\log_3 \frac{4}{3}} < t \cdot \ln 5$

$< 1 + \log_3 4 \cdot \sqrt{t} < t \cdot \ln 5$ $0{,}5 \Rightarrow \log_3 \sqrt{3}$; $\sqrt{3} = 1{,}42$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a = x-6$; $b = 6y-3 \Rightarrow a^2+b^2=90$

$a-2b = x-12y$

$a\cdot\frac{b}{3} = (x-6)(2y-1) = \ldots$

$\begin{cases} a-2b = \sqrt{a\cdot\frac{b}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = \frac{ab}{3} \\ a^2+b^2=90 \\ a-2b\geq 0 \end{cases}$

$90-4ab+3b^2 = \frac{ab}{3}$

$3b^2 - \frac{13ab}{3} + 90 = 0$

$\cancel{\Delta = \frac{169}{9}a^2 +}$ $\Delta = \frac{165a^2}{9} -$

$\frac{3a^2-13ab+12b^2=0}{3t^2-13t+12=0}$

$\Delta = 169-144=5^2$

$\begin{cases} a-2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\begin{cases} a^2-4ab+4b^2 = \frac{ab}{3} \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$

$t = \frac{13\pm5}{6} = \left[\begin{array}{l} 3 \\ \frac{4}{3} \end{array}\right.$

$\frac{a}{b}=3$ или $\frac{a}{b}=\frac{4}{3}$; $a=3b$; $a=\frac{4}{3}b$

1) $a=3b \Rightarrow 9b^2+b^2=90 \Rightarrow \underline{b=\pm3}$; $a=\pm9$

$a\geq 2b$

$b=3; a=9$

2) $a=\frac{4}{3}b$; $\frac{16b^2}{9}+b^2=90$

$25b^2 = 81\cdot10$

$5b = \pm9\sqrt{10}$

☑ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t+t^{\log_3 4}-5^{\log_3 t}\geq 0$ $\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{4}\neq\frac{1}{5}$?

$\cancel{t+t^{\log_3 4}-5^{\frac{\log_3 4}{\log_3 t}}\geq 0}$

$\log_5(t+t^{\log_3 4})\geq\log_3 t$; $\cancel{\log_a b\cdot\log_a c}=\cancel{\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\frac{\log_b c}{\log_b a}}$

$\frac{\log_c b}{\log_c a}\cdot\log_a c=\log_c b$

$\log_5 3\cdot\log_5(t+t^{\log_3 4})\geq\log_5 t$

$\log_3 t+t^{\log_3 4}\geq\log_5 t$.

$\log$

1) $t\in(0;1)$: $\log_5(t+t^{\log_3 4})\geq\cancel{\log}\frac{\log_5 t}{\log_5 3}$

$f(2\cdot\frac{1}{2})=f(2)+f(\frac{1}{2})=0+f(\frac{1}{2})$

$f(3\cdot\frac{1}{3})=0+f(\frac{1}{3})$

$f(5\cdot\frac{1}{5})=1+f(\frac{1}{5})$

$f(1)=f(\frac{1}{2})=f(\frac{1}{3})=1+f(\frac{1}{5})=1+f(\frac{1}{7})=2+f(\frac{1}{11})=$
$=3+f(\frac{1}{13})$

$D=25-1=24$ $\quad 5>2\sqrt{6}$

$\frac{1}{9}+\frac{1}{16}=\frac{1}{25}$ $\quad 25>$

3^{-100}: $\boxed{\frac{1}{3^{100}}+\frac{1}{4^{100}}}\geq\frac{1}{5^{100}}$ $\quad 10>5+2\sqrt{6}$

Пусть $t=3^b$: $3^b+4^b\geq 5^b$ $\quad b<0$ – верно

$3^b\ln 3+4^b\ln 4\geq 5^b\ln 5$ $\quad b=0$ – верно

$3^t + 4^t \ge 5^t$

$3^t \cdot \ln 3 + 4^t \cdot \ln 4 \ge 5^t \cdot \ln 5$

$t = 0$ – верно

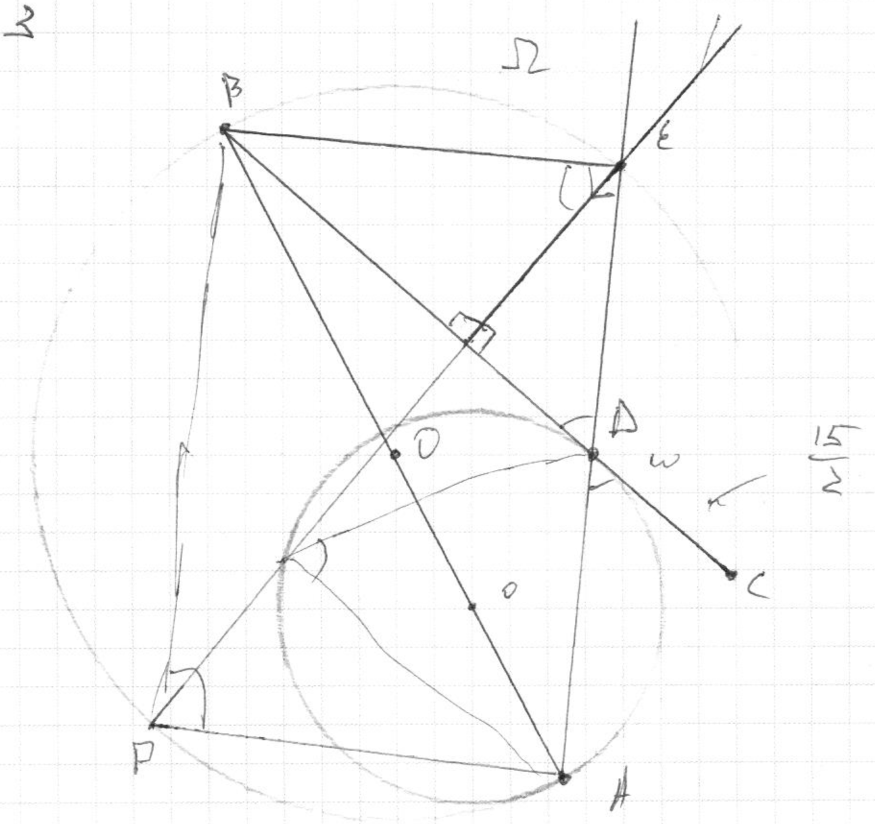
$3^{t+1} \cdot \ln 3 + 4^{t+1} \cdot \ln 4 \ge 5^{t+1} \cdot \ln 5$

$3 \cdot 3^t \cdot \ln 3 + 4 \cdot 4^t \cdot \ln 4 \ge 5 \cdot 5^t \cdot \ln 5$

$3^{t+1} + 4^{t+1} < 5^{t+1}$

$\frac{3}{5} \cdot 3^t + \frac{4}{5} \cdot 4^t < 5^t$

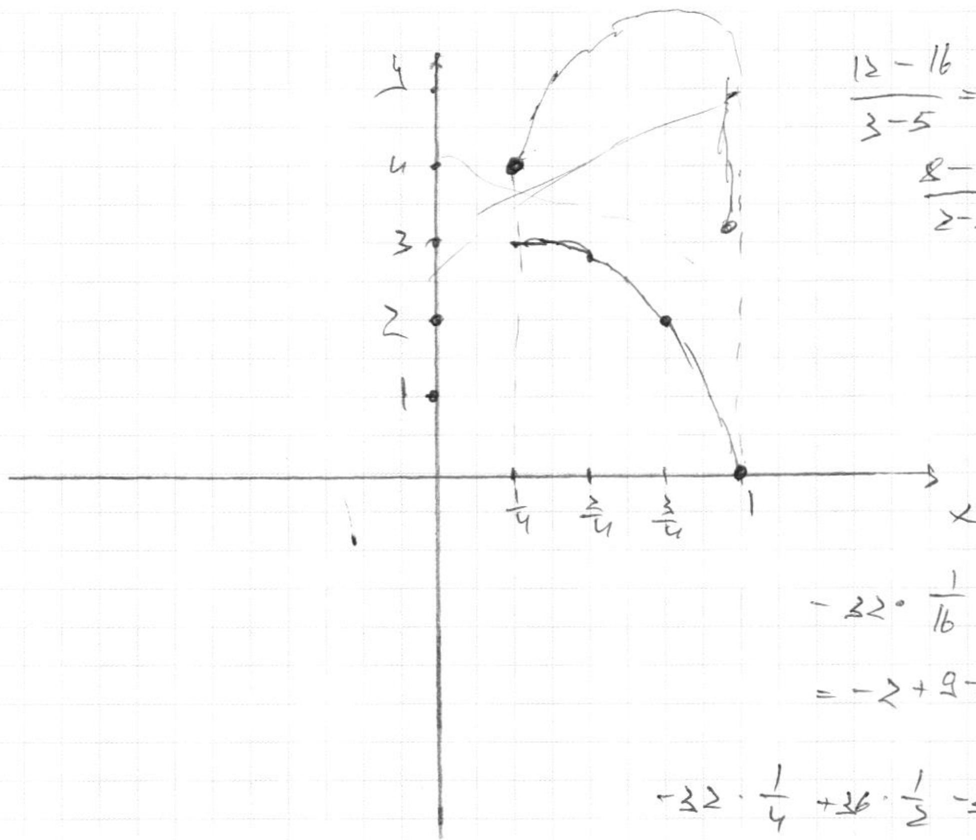
3



$BD = \frac{17}{2}$

$DC = \frac{15}{2}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$$\frac{12-16}{3-5} = \frac{4}{2} = 2$$

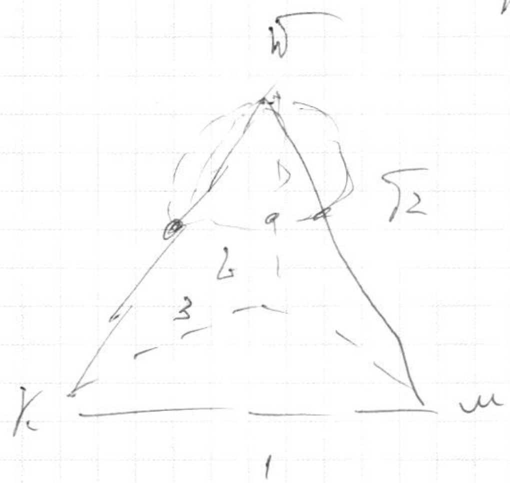
$$\frac{8-16}{2-5} = \frac{8}{3}$$

$$\frac{-12}{-4} = 3$$

$$-32 \cdot \frac{1}{16} + 36 \cdot \frac{1}{4} - 3 =$$
$$= -2 + 9 - 3 = 4$$

$$-32 \cdot \frac{1}{4} + 36 \cdot \frac{1}{2} - 3 =$$
$$= -8 + 18 - 3 = 7$$

$$\begin{cases} \frac{a}{4} + b \le 4 \\ \frac{a}{4} + b \ge 3 \\ a + b \le 1 \\ a + b \ge 0 \end{cases}$$



$KW \le 1+\sqrt{2}$

[illegible]

$LM < 4$

$WL < 4+\sqrt{2}$

$LM < 4+2\sqrt{2}$

$\cancel{f(0\cdot 1) = f(0) = f(0) + f(1) = 1} \quad f(1) = 0$

$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0; \quad f\left(\frac{1}{3}\right) = 0; \quad f\left(\frac{1}{5}\right) = f\left(\frac{1}{7}\right) = -1; \quad f\left(\frac{1}{11}\right) = -2$

$f\left(\frac{1}{13}\right) = -3; \quad f\left(\frac{1}{14}\right) = -4; \quad f\left(\frac{1}{19}\right) = -4; \quad f\left(\frac{1}{23}\right) = -5$

$f(1) = 0$

$f(\cancel{2\cdot 3}) =$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(4) = 2f(2) = 0$

$f(5) = 1$

$f(6) = f(2) \cdot f(3) = 0; \quad f(7) = 1$

$f(8) = f(4) + f(2) = 0; \quad f(9) = 0; \quad f(10) = 0;$

$f($

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА