МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y = \sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a)+f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3} \leqslant ax+b \leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \\ x^2-4x+4+9y^2-18y+9=12+13 \end{cases}$$

$(x-2)^2+(3y-3)^2=25$

$4(y-\frac{1}{2})(y+1)$

$(2y-1)(2y+2)$

$= 4y^2+2y-2 = 2(2y^2+y-1)$

$+ = 5y-1$

$D/4 = 1+8=9$

$y_1 = \frac{-1+3}{4} = \frac{1}{2}$

$y_2 = \frac{-1-3}{4} = -1$

$y=-1$, $y=\frac{1}{2}$

$(x-2y)^2 = xy-x-2y+2$

$x^2-4xy+4y^2-xy+x+2y-2=0$

$x^2-5xy+4y^2+x+2y-2=0$

$x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0$

$D=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$= 9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$x_1 = \frac{5y-1+3y-3}{2} = 4y-2$

$x_2 = \frac{5y-1-3y+3}{2} = y+1$

$(y-1)^2 = \pm\frac{5}{2}$

$y = 1+\frac{5}{3} = \frac{8}{3}$

$y = 1-\frac{5}{3} = -\frac{2}{3}$

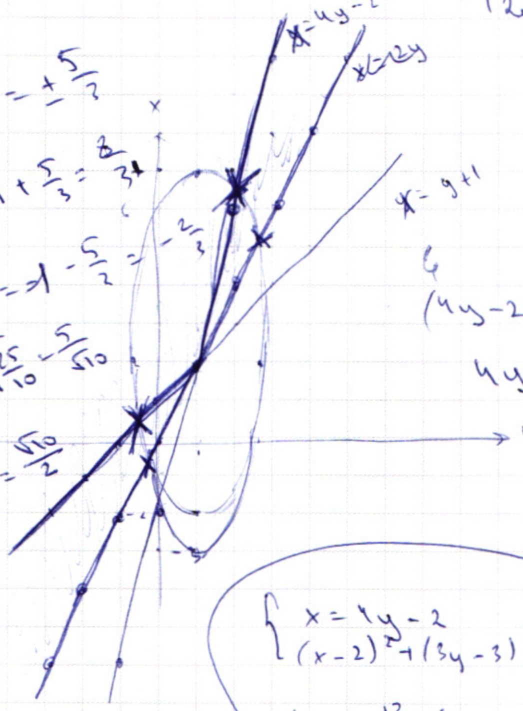
$y-1 = \sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}}$

$\frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$(4y-2)(y+1)$

$4y^2+4y-2y-2$

$5y-1$



$$\begin{cases} x=4y-2 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

$(4y-4)^2+(3y-3)^2=25$

$16(y-1)+9(y-1)=25$

$25(y-1)^2=25$

$\begin{cases} \boxed{y=2} \to \boxed{x=6} \\ y=0 \to x=-2 \end{cases}$

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x=4y-2 \\ x=y+1 \end{array}\right. \\ x\geq 2y \end{cases}$$

$(x-4y+2)(x-y-1)$

$x^2-xy-x-4xy+4y^2-4y+2x-2y-2$

$x^2-5xy+x+4y^2-2y-2$

$(y-1)^2=9$

$9(y-1)^2=9$

$\left[\begin{array}{l} y=2 \\ y=0 \end{array}\right.$

$(3y-3)^2=0$

$$\begin{cases} x=y+1 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \end{cases}$$

$y=1$ $x-2=\pm5$ $\boxed{\begin{array}{l} x=6 \\ y=2 \end{array}}$

$(y-1)^2+9(y-1)^2=25$

$10(y-1)^2=25$

$(y-1)^2=2{,}5=\frac{25}{10}$

$y-1=\sqrt{2{,}5}=\frac{5}{\sqrt{10}}$

$y-1=-\sqrt{2{,}5}=-\frac{5}{\sqrt{10}}$

$(3y-3)^2=25$

$3y-3=5$ $\quad 3y=8$ $\quad y=\frac{8}{3}$

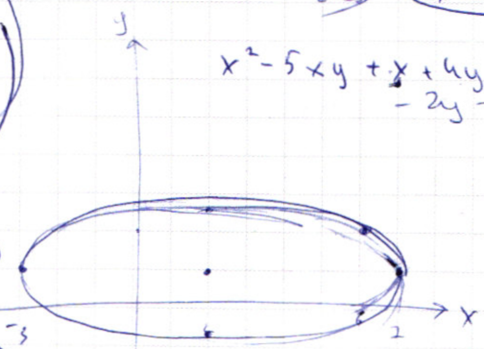
$3y-3=-5$ $\quad 3y=-2$ $\quad y=-\frac{2}{3}$

$\left[\begin{array}{l} x=\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \\ x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} y=\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \\ y=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1 \end{array}\right.$

$\sqrt{\frac{25}{10}} = \frac{5}{\sqrt{10}} = \frac{5\sqrt{10}}{10} = \frac{\sqrt{10}}{2}$

$\boxed{\begin{array}{l} x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2 \\ y=-\frac{10}{2}+1 \end{array}}$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$t = x^2 + 18x$, $t > 0$

$2^6 - 2^4 = 64 - 16 = 48$

$a^{\log_a x} = x$

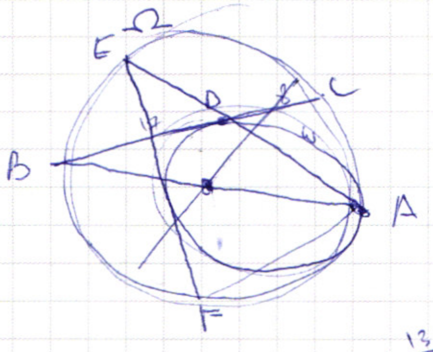
$3^{\log_3 9} = 9$

$\frac{144 \cdot 12}{288 \; 144}$ $\frac{}{1728}$ $\frac{125}{1853}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12} 13}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12} 13}$

$a = \log_{12} t \Rightarrow t = 12^a$



$\frac{ED}{DA} = \frac{FD}{DK}$

$125 + 1$

169

$5^a + 12^a \geq 12^{a \log_{12} 13}$

$5^a \geq 12^{a\log_{12} 13} - 12^a$

$\frac{13}{507}$ $\frac{169}{2197}$

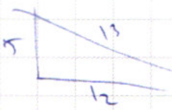
$\left(\frac{5}{12}\right)^a \geq 12^{a\log_{12} 13 - a} \cancel{\;\;} 3 - 1$

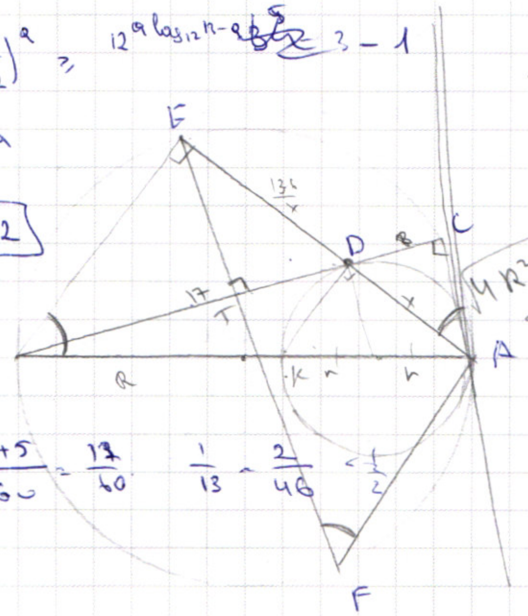
$x + \frac{136}{x} = \frac{x^2 + 136}{x}$

$\frac{136}{x^2} = \frac{FD}{8}$ $FD = \frac{136 \cdot 8}{x^2}$

$5^a + 12^a \geq 13^a$

$\boxed{a \leq 2}$





$ED \cdot DA = 8 \cdot 17 = 136$

$\frac{ED}{DA} =$ $ED = \frac{136}{x}$

$\sqrt{4R^2 - 25^2}$ $\sqrt{y^2 - 8^2}$

$\frac{S_{ADK}}{S_{AEB}} = \frac{AD^2}{AE^2} = \frac{x^2}{\;}$

$\frac{1}{5} + \frac{1}{12} = \frac{12+5}{60} = \frac{17}{60}$ $\frac{1}{13} - \frac{2}{46}$ $< \frac{1}{2}$

$DK = \sqrt{4R^2 - x^2}$

$4R^2 - 25^2 = x^2 - 8^2$

$4R^2 = x^2 + 25^2 - 8^2$

$BC = 25$

$\frac{DK}{EB} = \frac{\sqrt{4r^2 - x^2}}{EB} = \frac{x}{x + \frac{136}{x}} = \frac{2r}{2R}$

$\log_{12} t \leq 2$

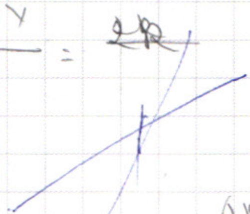
$\frac{\frac{136}{x} + x}{\sin \alpha} = \cancel{2R}$

$\log_{12} t \leq \log_{12} 144$

$t \leq 144$

EB $BE^2 = 4R^2 - \left(\frac{136}{x} + x\right)^2 =$

$\cancel{BE^2 = \left(17^2 - \frac{136}{x}\right)^2}$



$BE^2 = \frac{(4r^2 - x^2)\left(x + \frac{136}{x}\right)^2}{x^2}$

$x^2 + 18x - 144 \leq 0$

$BE^2 = 17^2 - \left(\frac{136}{x}\right)^2 = 4R^2 - \left(\frac{136}{x} + x\right)^2$

$4R^2 - \left(\frac{136}{x} + x\right)^2 = \frac{(4r^2 - x^2)\left(x + \frac{136}{x}\right)^2}{x^2}$

$D_{/4} = 81 + 144 = 225$

$x^2 + 25^2 - 8^2$

$4R^2 - \left(\frac{136}{x} + x\right)^2 = \left(\frac{4r^2}{x^2} - 1\right)\left(x + \frac{136}{x}\right)^2$

$x = \frac{-9 + 15}{1} = 6$ $\cancel{\frac{x^4}{(136 + x^2)^2}} =$

$x = -9 - 15 = -24$

$289 - \left(\frac{136}{x}\right)^2 = x^2 + \cancel{25^2 - 8^2}$ $561 + \left(\frac{136}{x} + x\right)^2$

$\frac{DK}{BE} = \frac{x}{\frac{136}{x} + x} = \frac{x}{\frac{136 + x^2}{x}} = \frac{x^2}{136 + x^2}$

$289 - \frac{136^2}{x^2} = x^2 + 561 + \frac{136^2}{x^2} + \frac{2 \cdot 136}{\;} + y^2$

$\frac{17 \cdot 17}{119 \; 17}$ $\frac{}{289}$

$625 - 64 =$ $\frac{64}{561}$

$\cancel{-127 = 272} =$

$x(x + 18)$

$(x - 6)(x + 24)$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$[3,8]=3$

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=\left[\frac{p}{4}\right]$, p - простое

$1\le x\le 24$

$1\le y\le 24$

$\cancel{f(x/y)>0}$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0$

$f\left(x\cdot\frac{1}{y}\right)=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)<0$

$f(1\cdot p)=f(1)+f(p)=f(1)+\left[\frac{p}{4}\right]=\left[\frac{p}{4}\right]$

$f(1)=1$

$f(2p)=f(2)+\left[\frac{p}{4}\right]=$

$\frac{12x+11}{4x+3}\le ax+b\le \underbrace{-8x^2-30x-17}_{f(x)}$

$-\frac{11}{4}$ $-\frac{3}{4}$

$f(x)\le 11\frac{1}{8}$

$\frac{3(4x+3)+2}{4x+3}=3+\frac{2}{4x+3}$

$\cancel{12x+11=12x+9}$

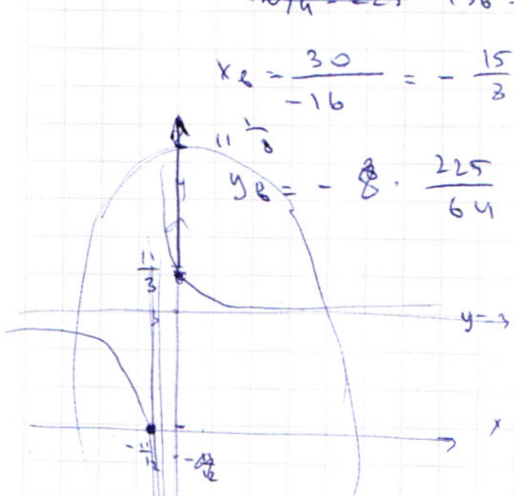
$y=-8x^2-30x-17$

$\cancel{D/4=225-136=25+64=89}$

$-\frac{15}{8}$ $11\frac{1}{8}$

$x_в=\frac{30}{-16}=-\frac{15}{8}$

$y_в=-8\cdot\frac{225}{64}+\frac{30\cdot15}{8}-17=-\frac{225}{8}+\frac{450}{8}-\frac{136}{8}=\frac{89}{8}=11\frac{1}{8}$



$-\frac{3}{4}$

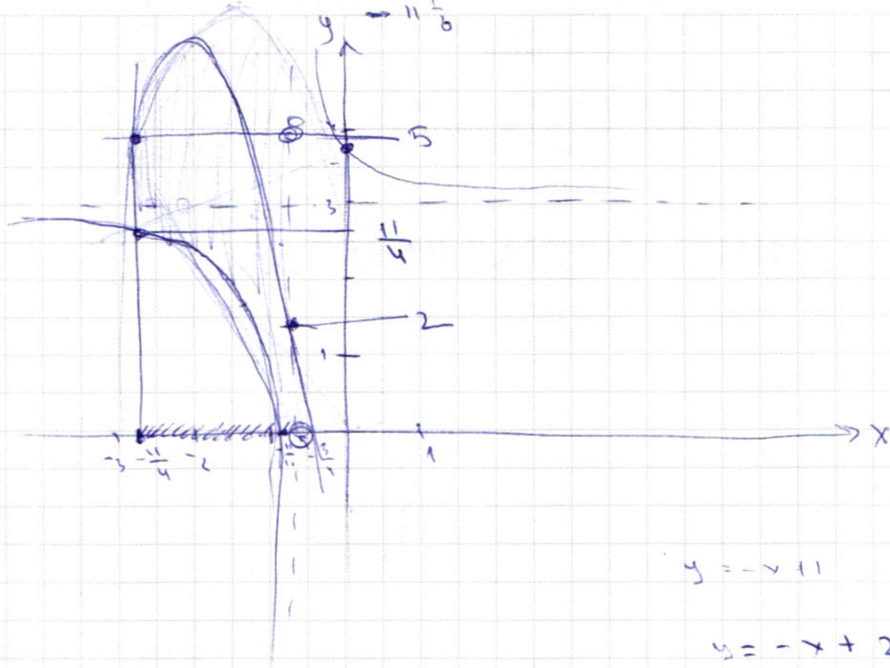
450
− 225
225
− 136
89

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)



$\frac{23}{7} = 3,$

$y = -x + 11$ $\quad 10$

$y = -x + 2$ $\quad = 3$

$-8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - \frac{34}{2} = \frac{10}{2} = 5$

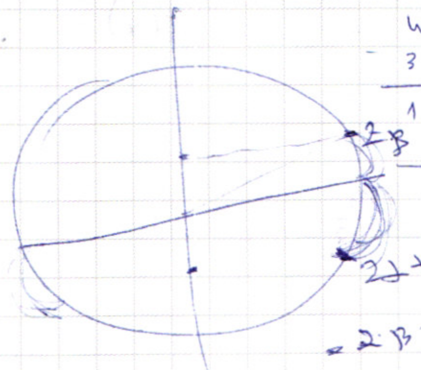
$-8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 =$

$= -\frac{9}{2} + \frac{15 \cdot 3}{2} - \frac{34}{2} = 2$

$\begin{array}{r} 165 \\ -121 \\ \hline 44 \\ -34 \\ \hline 10 \end{array}$

$\frac{-1}{-1} = 1$

$\begin{array}{r} 45 \\ -34 \\ \hline 11 \\ -9 \\ \hline 2 \end{array}$



$\frac{-\frac{11}{4} \cdot 12 + 11}{-4 \cdot \frac{11}{4} + 3} = \frac{-33+11}{-11+3} = \frac{-22}{-8} = \frac{11}{4}$

$\frac{-12 \cdot \frac{3}{4} + 11}{-4 \cdot \frac{3}{4} + 3} = \frac{-9+11}{-3+3} = 0$

$-2\beta = 2\alpha + 2\beta$

$2\alpha = -4\beta$

$\sin 2(\alpha+\beta)$ $\quad 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\quad \alpha = -$ $\quad \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}$ $\quad tg\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$

$2\sin(2\alpha + 2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2\alpha + 4\beta - 2\alpha$

$-\frac{2}{\sqrt{5}} \cos 2\beta = -\frac{4}{5}$ $\quad \cos 2\beta = \frac{4}{5} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

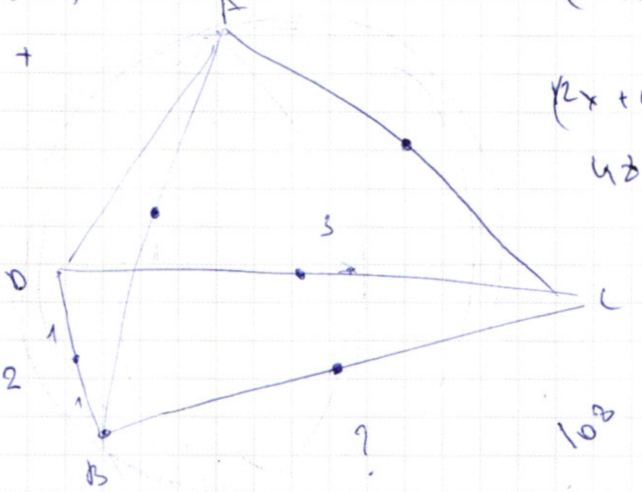
☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\frac{8x_0}{(4x_0+3)^2} + \frac{12x_0+11}{4x_0+3} = \frac{8x_0 + 48x_0^2 + 80x_0 + 33}{(4x_0+3)^2} = \frac{48x_0^2+88x_0+33}{(4x_0+3)^2}$

$-\frac{3}{64}x +$



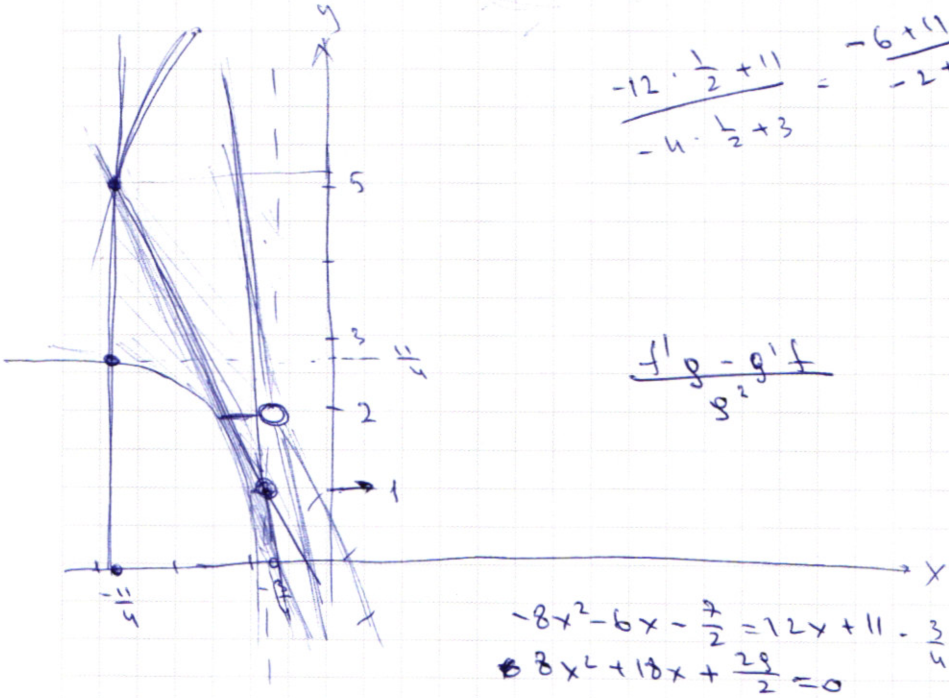
$(12x+11)(4x+3) =$

$48x^2+36x+44+33$

$\frac{-12\cdot\frac{1}{2}+11}{-4\cdot\frac{1}{2}+3} = \frac{-6+11}{-2+3} = \frac{5}{1} = 5$

$(4x+3)^2 = 4$

$D_{/4} = 81-4\cdot 29 =$



$\frac{f'g-g'f}{g^2}$

$\cancel{1 = \frac{3}{4}x}$

$a\left(-\frac{3}{4}\right)+b = 1$

$a\left(-\frac{11}{4}\right)+b = 5$

$2a = -4$

$\boxed{a=-2}$

$-8x^2-6x-\frac{7}{2} = 12x+11$ $\quad \frac{3}{4}+\frac{11}{4} = \frac{8}{4}$

$8x^2+18x+\frac{29}{2} = 0$

$48x+36-48x-44$

$\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right)' = \frac{12(4x+3)-(12x+11)\cdot 4}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2} = -2$

$b = 1+\frac{3}{4}a =$

$= 1-\frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$\boxed{b=-\frac{1}{2}}$

$(4x+3)\left(-2x-\frac{1}{2}\right)$ $\quad -2x-\frac{1}{2} = \frac{12x+11}{4x+3}$

$\cancel{26x} = -\frac{29}{2}$

$-2x-\frac{1}{2} = y$

$-8x^2-2-6x-\frac{3}{2} = \cancel{-14x}-\frac{7}{2} = \cancel{12x}+11$

$-22-2$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (1)\\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (2)\end{cases}$$

1) Рассмотрим ур-е (1): оно эквивалентно системе ур-й

$$\begin{cases}(x-2y)^2=xy-x-2y+2\\ x-2y\geq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-(5y-1)x+4y^2+2y-2=0 \quad (3)\\ x\geq 2y\end{cases}$$

Рассматривая ур-е (3) как квадратное относительно x, находим его корни: $x=4y-2$ или $x=y+1$

Тогда система принимает вид $\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x=4y-2\\ x=y+1\end{array}\right.\\ x\geq 2y\end{cases}$

Рассмотрим координатную плоскость $x(y)$ и построим эскизы графиков $x=4y-2$, $x=y+1$. Далее построим эскиз графика $x=2y$ и выделим ту часть графиков $x=4y-2$ и $x=y+1$, которая находится выше прямой $x=2y$

(см. рис. 1)

2) Рассмотрим ур-е (2): оно примет вид $(x-2)^2+9(y-1)^2=25$,

его графиком является эллипс, вытянутый вдоль оси OX, с центром в точке с координатами $x=2$ и $y=1$.

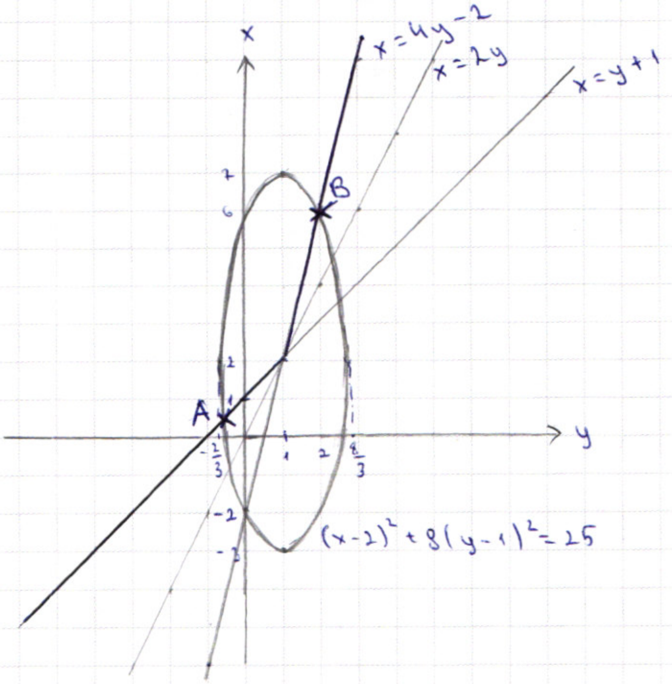
При $x=2$, $y=-\frac{2}{3}$ или $y=\frac{8}{3}$

При $y=1$, $x=-3$ или $x=7$

Построим эскиз данного графика в той же координатной плоскости $x(y)$:

(см. рис. 1)

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)



(Рис. 1)

Таким образом, заметим, что графики имеют две общие точки (обозначим их знаком "x" и буквами A и B), след-но, координаты этих точек и являются решением изначальной системы ур-й.

Найдем координаты точки A: для этого рассмотрим систему

$$\begin{cases} x=y+1 \\ (x-2)^2+8(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Подставив 1ое ур-е во 2ое, получим $10(y-1)^2=25$,

тогда $y=\frac{\sqrt{10}}{2}+1$ или $y=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1$

На графике видно, что нам удовл-ет $\underbrace{y=-\frac{\sqrt{10}}{2}+1}_{\text{значение } y<0, \text{ т.е.}}$

тогда $x=-\frac{\sqrt{10}}{2}+2$

т.о., получили 1ое решение $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}+2;\ -\frac{\sqrt{10}}{2}+1\right)$

Найдем координаты точки B из системы:

$$\begin{cases} x=4y-2 \\ (x-2)^2+8(y-1)^2=25 \end{cases}$$

Подставляя 1ое ур-е во 2ое получим $25(y-1)^2=25$,

след-но, $y=2$ или $y=0$

По графику видим, что нам удовл-ет $y>0$, т.е. $y=2$,

тогда $x=6$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Т.о. $2^{ым}$ решением является $(6;2)$

Ответ: $\left(-\frac{\sqrt{10}}{2}+2;\ -\frac{\sqrt{10}}{2}+1\right)$, $(6;2)$

№ 3

$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x \quad (1)$

1) Пусть $t=x^2+18x$ ($t>0$ из условия сущ-е $\log_{12}(x^2+18x)$), тогда ур-е (1) примет вид

$5^{\log_{12}t}+t \geq |t|^{\log_{12}13}$

т.к. $t>0$, тогда опустим модуль

$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13} \quad (2)$

2) Пусть $a=\log_{12}t$, тогда $t=12^a$, тогда ур-е (2) примет вид $5^a+12^a \geq 12^{a\log_{12}13}$, пользуясь св-вом логарифмов

след-но, $5^a+12^a \geq 13^a$

Заметим, что при $a=2$, $5^a+12^a=13^a$

Т.о., $a \leq 2$

3) Подставим значение a, то

$\log_{12}t \leq 2$

$\log_{12}t \leq \log_{12}144$

т.к. $12>1$ (основание логарифма), то с учётом монотонности $t\leq 144$, а т.к. есть ограничение $t>0$, то $t\in(0;144]$

4) Подставим значение t:

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x-6)(x+24)\leq 0 \end{cases}$

Рассмотрим числовую прямую:

Таким образом, $x \in [-24; -18) \cup (0; 6]$

Ответ: $[-24; -18) \cup (0; 6]$

$\boxed{№6}$

$$\frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \le -8x^2-30x-17$$

Рассмотрим $f(x) = -8x^2-30x-17$:

$$x_в = \frac{30}{-16} = -\frac{15}{8}$$

$$y_в = -8 \cdot \frac{225}{64} + \frac{15}{8} \cdot 30 - 17 = \frac{89}{8} = 11\frac{1}{8}$$

т.е., вершина имеет координаты $\left(-\frac{15}{8}; 11\frac{1}{8}\right)$

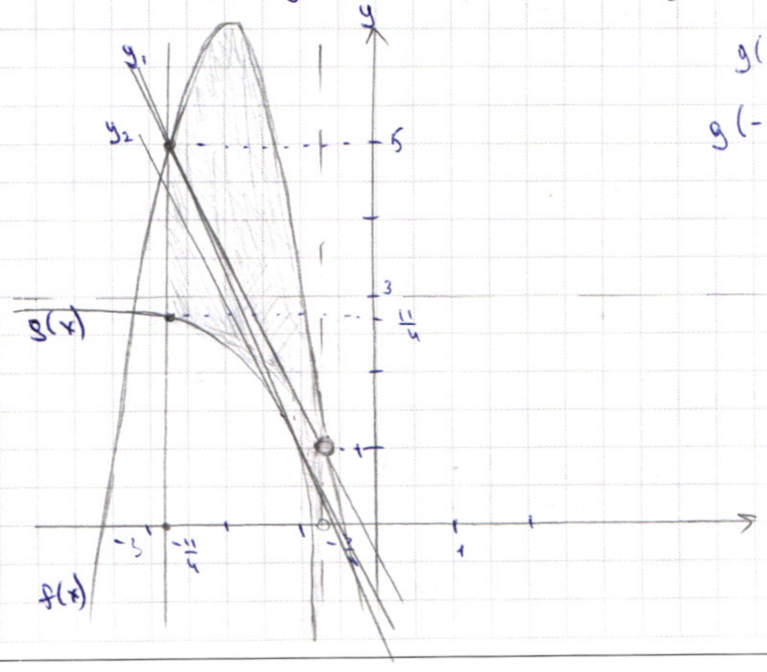
Найдем значения $f\left(-\frac{11}{4}\right)$ и $f\left(-\frac{3}{4}\right)$:

$$f\left(-\frac{11}{4}\right) = -8 \cdot \frac{121}{16} + \frac{30 \cdot 11}{4} - 17 = -\frac{121}{2} + \frac{15 \cdot 11}{2} - \frac{34}{2} = 5$$

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = -8 \cdot \frac{9}{16} + \frac{30 \cdot 3}{4} - 17 = -\frac{9}{2} + \frac{45}{2} - \frac{34}{2} = 1$$

Рассмотрим $g(x) = \frac{12x+11}{4x+3}$, рассмотрим только ту часть гиперболы, которая левее прямой $x = -\frac{3}{4}$, т.к. график стремится к $x = -\frac{3}{4}$ и положительные x нас не интересуют

~~Рассмотрим эскизы~~ построим эскизы графиков:



$g(x)$ стремится к $y=3$

$$g\left(-\frac{11}{4}\right) = \frac{-33+11}{-11+3} = +\frac{22}{8} = +\frac{11}{4}$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Закрасим ту часть полуплоскости, которая ~~лежит~~ ниже $f(x)$ и выше $g(x)$ и ~~—~~ находится на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$

~~4) Условию (неравенству) удовлетворяют все прямые, которые параллельны проходят между y_1 и y_2~~

Рассматривая данный эскиз и опираясь на условие задачи, что неравенство должно выполняться для всех x на промежутке $[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4})$, заметим, что $1^{ая}$ прямая, удовлетворяющая условию - это прямая, проходящая через точки $(-\frac{11}{4}; 5)$ и $(-\frac{3}{4}; 1)$, назовем её y_1.

тогда составим систему: $\begin{cases} -\frac{11}{4}\cdot a + b = 5 \\ -\frac{3}{4}\cdot a + b = 1 \end{cases}$,

тогда $a = -2$, $b = -\frac{1}{2}$, т.е. прямая имеет вид $y_1 = -2x - \frac{1}{2}$

Тогда условию удовлетворяют все прямые параллельные y_1 и расположенные ниже y_1 до тех пор, пока прямая не будет являться касательной к графику $g(x)$

Найдем производную $g(x)$:

$$\left(\frac{12x+11}{4x+3}\right)' = \frac{12(4x+3) - 4(12x+11)}{(4x+3)^2} = -\frac{8}{(4x+3)^2}$$

тогда $y_{кас.} = -\frac{8}{(4x_0+3)^2}(x - x_0) + \frac{12x_0+11}{4x_0+3}$

$$y_{кас.} = -\frac{8}{(4x_0+3)^2}x + \frac{48x_0^2+88x_0+33}{(4x_0+3)^2}$$

Также условию удовлетворяет касательная к $g(x)$, проходящая через точку $(-\frac{11}{4}; 5)$

$$5 = -\frac{8}{(4x_0+3)^2}\cdot\left(-\frac{11}{4}\right) + \frac{48x_0^2+88x_0+33}{(4x_0+3)^2}$$

$$5 = \frac{48x_0^2+88x_0+55}{(4x_0+3)^2}$$

$$48x_0^2+88x_0+55 = 80x_0^2+120x_0+45$$

$$32x_0^2+32x_0-10=0$$

$$16x_0^2+16x_0-5=0$$

$$D/4 = 64+80 = 144$$

$$x_0 = \frac{-8+12}{16} = \frac{1}{4} \quad \text{или} \quad x_0 = \frac{-8-12}{16} = -\frac{5}{4}$$

условию уд-ет $x_0<0$, т.е. $x_0 = -\frac{5}{4}$

тогда $$\frac{48x_0^2+88x_0+33}{(4x_0+3)^2} = \frac{\frac{48\cdot25}{16} - \frac{88\cdot5}{4}+33}{\left(-\frac{5}{4}\cdot4+3\right)^2} =$$

$$= \frac{75-110+33}{4} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$$

т.е. при $a=-2$, $b=-\frac{1}{2}$, то $y=-2x-\frac{1}{2}$ - является касательной к $g(x)$.

Таким образом ~~(...; -½)~~ $y_1 = -2a-\frac{1}{2}$ - единственная удовлетворяющая условиям. т.е., пара $(-2; -\frac{1}{2})$

Ответ: $(-2; -\frac{1}{2})$

$\boxed{N=1}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$, то $2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos2\beta = -\frac{2}{\sqrt5}\cdot\cos2\beta = -\frac{4}{5}$

то $\cos2\beta = \frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$, то $\sin2\beta = \sqrt{1-\frac{4}{5}} = \frac{1}{\sqrt5}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \cos 2\alpha \cdot \sin 2\beta$

Заметим, что $\sin(2\alpha+2\beta) = -\sin 2\beta$, тогда

$2\alpha + 2\beta = -2\beta$

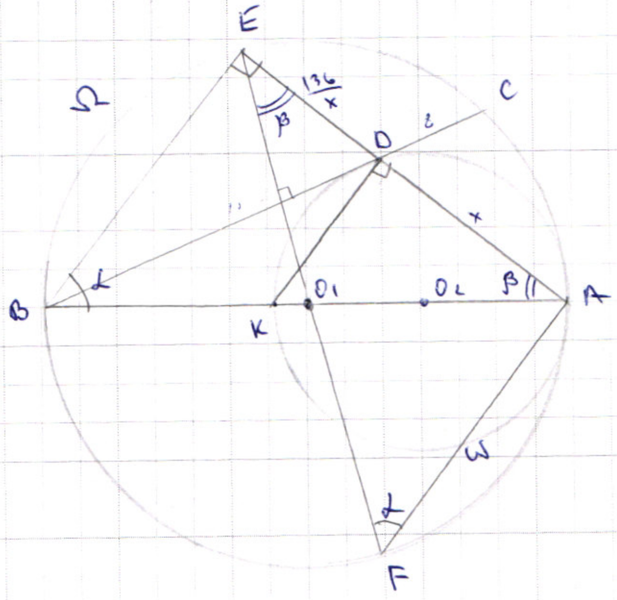
$\alpha = -2\beta$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\sin(-2\beta)}{\cos(-2\beta)} = \frac{\sin(\pi+2\beta)}{\cos 2\beta} =$$

$$= \frac{\sin\pi \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos\pi}{\cos 2\beta} = \frac{\frac{1}{\sqrt5}\cdot(-1)}{\frac{2}{\sqrt5}} = -\frac{1}{\sqrt5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = -\frac{1}{2}$$

Ответ: $-\frac{1}{2}$

№4



Пусть Ω с центром O_1 и радиусом R

ω с центром O_2 и радиусом r

1) По свойству отрезков хорд

$BD \cdot DC = ED \cdot DA$, то $ED \cdot DA = 17 \cdot 8 = 136$

2) Проведем BE, тогда $\angle BEA = 90°$, т.к. опирается на диаметр AB — вписанный в Ω,

3) ~~Пусть~~ По св-ву A, O_1, O_2 лежат на одной прямой, т.е. AB

Пусть $AB \cap \omega = K$, $K \neq A$

Построим KD, то $\angle KDA = 90°$, т.к. опирается на диаметр AK — вписанный в ω,

4) т.к. $BE \perp AE$ и $KD \perp AE$, то $EB \parallel DK$ по св-ву транзитивности

5) $\triangle KAD \sim \triangle BAE$ по 2-м углам, то $\frac{AK}{AB} = \frac{AD}{AE}$

т.е., $\frac{r}{R} = \frac{x}{\frac{136}{x} + x} = \frac{x^2}{136 + x^2}$

6) $\angle AFE = \angle ABE$ — вписанные в Ω, опираются на 1 дугу AE

7) $\triangle AO_1E$ — р/б, т.к. $AO_1 = O_1E = R$, то $\angle O_1AE = \angle O_1EA = \beta$

8) $\triangle EBA$: $\exists \angle EBA = \alpha$, то $\angle\alpha + \angle\beta = 90°$ $\Rightarrow$ $\angle EAF = 90°$ из $\triangle EAF$

$\Rightarrow$ $\triangle EAF$ — прямоуг. и $\triangle AEB = \triangle EAF$ $\Rightarrow$ $S_{AEF} = S_{BEA}$

~~9) $\triangle BED$ по т синусов~~

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)