МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg} \alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{xy - x - 2y + 2}, \\ x^2 + 9y^2 - 4x - 18y = 12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geqslant \left|x^2 + 18x\right|^{\log_{12} 13} - 18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = 8$, $BD = 17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $1 \leqslant x \leqslant 24$, $1 \leqslant y \leqslant 24$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x + 11}{4x + 3} \leqslant ax + b \leqslant -8x^2 - 30x - 17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB = 1$, $BD = 2$, $CD = 3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

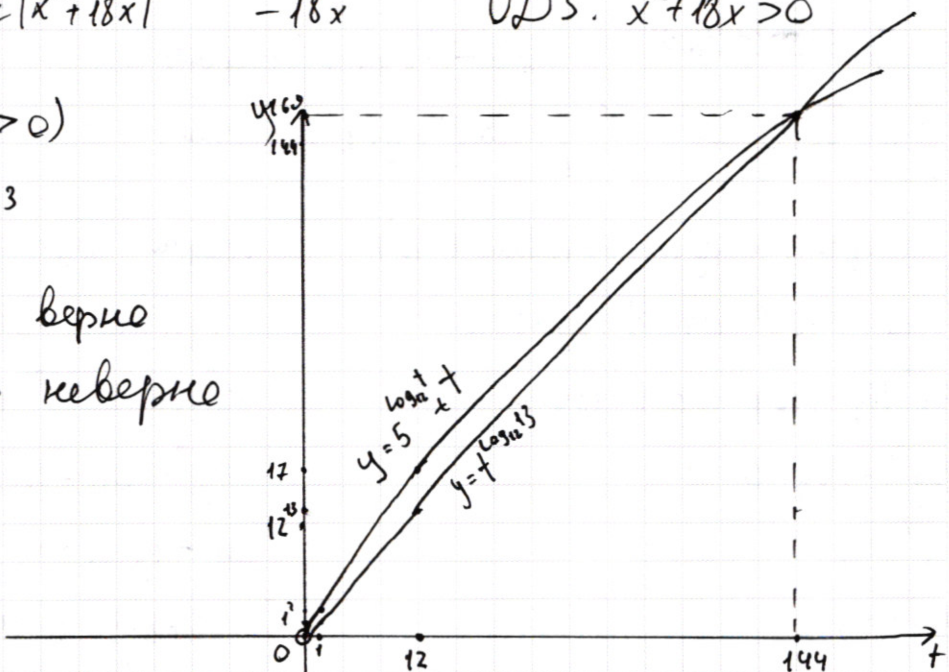
Задание 3.

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0$

Пусть $t = x^2+18x$ $(t>0)$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq t^{\log_{12}13}$$



При $t \in (0;144]$ нер-во верно

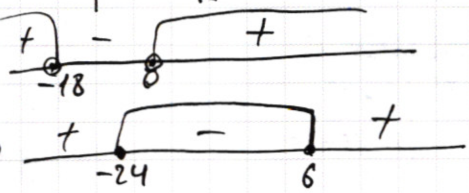
При $t \notin (0;144]$ нер-во неверно

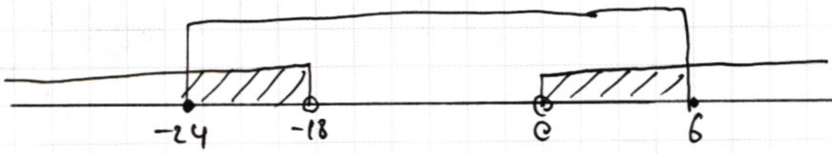
$t \in (0;144]$

⇓

$$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x \leq 144 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144 \leq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(x+18)>0 \\ (x+24)(x-6) \leq 0 \end{cases}$$





$x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

Ответ: $x \in [-24;-18) \cup (0;6]$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задание 2

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} & (I) \\ x^2+9y^2-4x-18y=12 & (II) \end{cases}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ xy-x-2y+2\geq 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-2y\geq 0 \\ (y-1)(x-2)\geq 0 \end{cases}$

Из (I): $x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2} \Rightarrow x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2 \Rightarrow x^2+x(1-5y)+4y^2+2y-2=0$

$x^2+(1-5y)x+4y^2+2y-2=0$

$D=(1-5y)^2-4\cdot(4y^2+2y-2)=25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=9y^2-18y+9=(3y-3)^2$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{5y-1+|3y-3|}{2} \\ x=\frac{5y-1-|3y-3|}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{8y-4}{2}=4y-2 \text{ (1 случай)} \\ x=\frac{2y+2}{2}=y+1 \text{ (2 случай)} \end{array}\right.$$

1 случай: $x=4y-2$ – подставим в (II)

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$25y^2-50y=0$

$y^2-2y=0$

$y(y-2)=0$

$\begin{cases} y=0 \\ x=-2 \end{cases}$ или $\begin{cases} y=2 \\ x=6 \end{cases}$ (+) – удовлетворяет ОДЗ, т.к. $\begin{cases} 6-4\geq 0 \\ (2-1)(6-2)\geq 0 \end{cases}$

не удовлетворяет ОДЗ, т.к. $-2-0<0$

2 случай: $x=y+1$ – подставим в (II):

$(y+1)^2+9y^2-4(y+1)-18y-12=0$

$y^2+2y+1+9y^2-4y-4-18y-12=0$

$10y^2-20y-15=0$

$2y^2-4y-3=0$

$D=16+8\cdot 3=16+24=40$

$\begin{cases} y=\frac{4+2\sqrt{10}}{4}=1+\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x=2+\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$ или $\begin{cases} y=\frac{4-2\sqrt{10}}{4}=1-\frac{\sqrt{10}}{2} \\ x=2-\frac{\sqrt{10}}{2} \end{cases}$

не удовлетворяет ОДЗ, т.к. $2+\frac{\sqrt{10}}{2}-2-\sqrt{10}<0$

удовлетворяет ОДЗ, т.к. $\begin{cases} 2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2+\sqrt{10}\geq 0 \\ \left(1-\frac{\sqrt{10}}{2}-1\right)\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}-2\right)\geq 0 \end{cases}$

Ответ: $(6;2)$; $\left(2-\frac{\sqrt{10}}{2}; 1-\frac{\sqrt{10}}{2}\right)$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5 Задание 5

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\qquad f(p)=[p/4]$ при всех простых p

$f(x)=f(x)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=[\frac{2}{4}]=0$; $f(3)=[\frac{3}{4}]=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=[\frac{5}{4}]=1$; $f(6)=f(2)+f(3)=0$;

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1$; $f(8)=f(4)+f(2)=0$; $f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=f(5)+f(2)=1$; $f(11)=[\frac{11}{4}]=2$;

$f(12)=f(3)+f(4)=0$; $f(13)=[\frac{13}{4}]=3$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=f(8)+f(2)=0$;

$f(17)=[\frac{17}{4}]=4$; $f(18)=f(2)+f(9)=0$; $f(19)=[\frac{19}{4}]=4$; $f(20)=f(4)+f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$;

$f(22)=f(2)+f(11)=2$; $f(23)=[\frac{23}{4}]=5$; $f(24)=f(8)+f(3)=0$

$f(\frac{24}{2})=f(24)+f(\frac{1}{2})=f(12)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{2})=0$ $\qquad f(\frac{24}{4})=f(24)+f(\frac{1}{4})=f(6)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{4})=0$

$f(\frac{24}{3})=f(24)+f(\frac{1}{3})=f(8)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{3})=0$ $\qquad f(\frac{20}{5})=f(20)+f(\frac{1}{5})=f(4)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{5})=-1$

$f(\frac{18}{6})=f(18)+f(\frac{1}{6})=f(3)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{6})=0$ $\qquad f(\frac{21}{7})=f(21)+f(\frac{1}{7})=f(3)=0 \Rightarrow f(\frac{1}{7})=-1$

$f(\frac{1}{8})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{4})=0$ $\quad f(\frac{1}{9})=f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{3})=0$ $\quad f(\frac{1}{10})=f(\frac{1}{2})+f(\frac{1}{5})=-1$; $f(\frac{1}{11})=f(\frac{22}{11})-f(22)=0-2=-2$

$f(\frac{1}{12})=f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{4})=0$ $\quad f(\frac{1}{13})=f(\frac{26}{13})-f(26)=0-f(13)-f(2)=-3$ $\quad f(\frac{1}{14})=f(\frac{1}{7})+f(\frac{1}{2})=-1$ $\quad f(\frac{1}{15})=f(\frac{1}{3})+f(\frac{1}{5})=-1$

$f(\frac{1}{16})=f(\frac{1}{4})+f(\frac{1}{4})=0$ $\quad f(\frac{1}{17})=-4$ $\quad f(\frac{1}{18})=0$ $\quad f(\frac{1}{19})=-4$ $\quad f(\frac{1}{20})=-1$ $\quad f(\frac{1}{21})=-1$ $\quad f(\frac{1}{22})=-2$ $\quad f(\frac{1}{23})=-5$

$f(\frac{1}{24})=0$

$f(\frac{1}{y})=f(\frac{2y}{y})-f(2y)=0-f(2)-f(y)=-f(y)$

$f(\frac{x}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0$ При этом $\begin{cases} x\in[1;24] \\ y\in[1;24] \\ x,y \text{ -натурал.} \end{cases}$

a-натурал $a\in[1;24]$

~~Ср.~~ ~~Пр~~ Рассмотрим все знач. $f(a)$: $\quad f(a)=0$ в 11 случаях

$f(a)=1$ в 7 случаях

$f(a)=2$ в 2 случаях

$f(a)=3$ в 1 случае

$f(a)=4$ в 2 случаях

$f(a)=5$ в 1 случае

Тогда ~~всего случаев~~ кол-во пар чисел x,y когда

$f(x)-f(y)<0$ равно:

$11\cdot13+7\cdot6+2\cdot4+1\cdot3+2\cdot1=$

$=143+42+8+3+2=143+55=198$

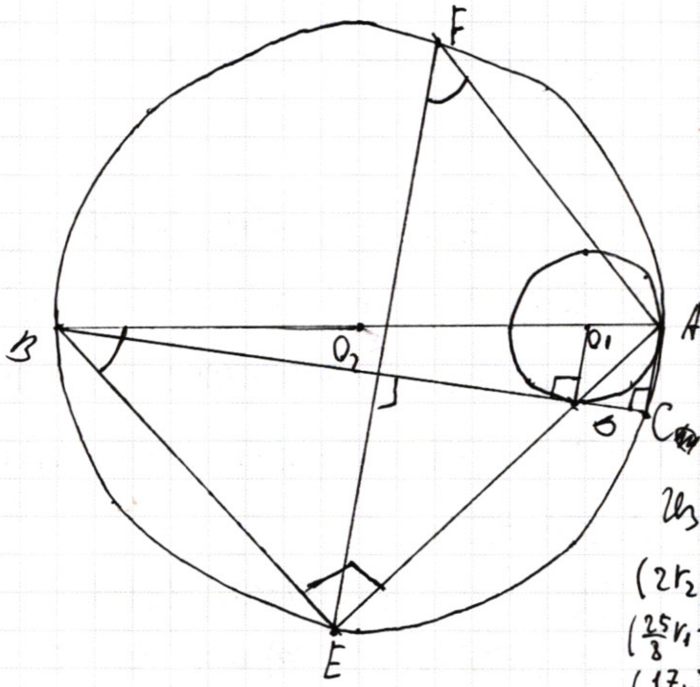
Ответ: 198 пар

Задание 4

Дано: $\omega_1(O_1; r_1)$ $\omega_2(O_2; r_2)$ $A \in \omega_1$ $A \in \omega_2$ AB - диаметр ω_2 BC - касательная ω_1 в т. D

$AD \cap \omega_2 = E$ $EF \perp BC$ $F \in \omega_2$; $CD = 8$ $BD = 17$

Найти: $\angle AFE$, r_1, r_2, S_{AEF}



$O_1A = O_1D = r_1$ $AB = 2r_2$

$\angle ACB = 90°$, т.к. AB - диаметр

$\angle O_1DB = 90°$, т.к. $O_1D \perp BC$, т.к. BC - касательная в т. D.

$\triangle CBA \sim \triangle DBA$ =>

$\frac{AB}{BO_1} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow \frac{2r_2}{2r_2 - r_1} = \frac{17+8}{17}$

$34r_2 = 50r_2 - 25r_1 \Rightarrow 25r_1 = 16r_2 \Rightarrow$

$r_2 = \frac{25}{16} r_1$

Из $\triangle O_1DB$: $BO_1^2 = O_1D^2 + BD^2$ - по т. Пифагора

$(2r_2 - r_1)^2 = r_1^2 + 17^2$

$(\frac{25}{8} r_1 - r_1)^2 = r_1^2 + 17^2$

$(\frac{17}{8} r_1)^2 = r_1^2 + 289 \Rightarrow \frac{289}{64} r_1^2 - r_1^2 = 289$

$\frac{225}{64} r_1^2 = 289$

$r_1 = \sqrt{\frac{289 \cdot 64}{225}} = \frac{17 \cdot 8}{15} = \frac{136}{15} \Rightarrow r_2 = \frac{25}{16} \cdot \frac{136}{15} = \frac{85}{6}$

$\angle AFE = \angle ABE$, т.к. опираются на хорду AE

$\angle AEB = 90°$, т.к. AB - диаметр

$\frac{AC}{O_1D} = \frac{BC}{BD} \Rightarrow AC = r_1 \cdot \frac{25}{17} = \frac{136}{15} \cdot \frac{25}{17} = \frac{40}{3} \Rightarrow \sin\angle ADC = \frac{CD}{AD} = \frac{8}{\sqrt{\frac{1600}{9} + 64}} = \frac{8}{\frac{\sqrt{1664}}{3}} = \frac{24}{\sqrt{1664}} =$

$= \frac{12}{\sqrt{416}} = \frac{6}{\sqrt{104}} = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow \cos\angle O_1DA = \frac{3}{\sqrt{26}}$, т.к. $\angle O_1DA + \angle ADC = 90°$

$\triangle DO_1A$ - равнобедр., т.к. $O_1D = O_1A = r_1 \Rightarrow \angle BAD = \angle O_1DA \Rightarrow \cos\angle BAD = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow \sin\angle EBA = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow$

$\sin\angle AFE = \frac{3}{\sqrt{26}} \Rightarrow \angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{26}}$

Ответ: $r_2 = \frac{85}{6}$; $r_1 = \frac{136}{15}$; $\angle AFE = \arcsin\frac{3}{\sqrt{26}}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задание 1

$\sin(2a+2b) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ (I)

$\Downarrow$

$\left[\begin{array}{l} \cos(2a+2b) = \frac{4}{5} \\ \cos(2a+2b) = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$

$\sin(2a+4b) + \sin 2a = -\frac{4}{5}$ (II)

$\left[\begin{array}{l} 2\cos(2a+2b)\cdot\cos(2b) = \cos(2a+2b) \\ 2\cos(2a+2b)\cdot\cos(2b) = -\cos(2a+2b) \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \cos 2b = \frac{1}{2} \\ \cos 2b = -\frac{1}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2b = \pm\frac{\pi}{3} + 2\pi n, n\in\mathbb{Z} \\ 2b = \pm\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, k\in\mathbb{Z} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} b = \pm\frac{\pi}{6} + \pi n \\ b = \pm\frac{\pi}{3} + \pi k \end{array}\right.$

~~Из (II):~~

~~$\sin 2a\cos 4b + \cos 2a \sin 4b + \sin 2a = -\frac{4}{5}$~~

~~$\left[\begin{array}{l} -\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2a + \sin 2a = -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{4}{5} \end{array}\right.$~~

~~$b = \frac{\pi}{6}$~~

$\left[\begin{array}{l} \sin 2b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 2b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

$\cos 4b = \cos^2 2b - \sin^2 2b = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} = -\frac{1}{2}$

$\sin 4b = 2\sin 2b\cos 2b \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 4b = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin 4b = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right.$

Из (I): $\sin 2a\cos 2b + \sin 2b\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{2}\sin 2a + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ -\frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{2}\sin 2\alpha - \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2a = -\frac{1}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2a + \sqrt{3}\cos 2\alpha = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\sin 2a + \sqrt{3}\cos 2a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ -\sin 2a - \sqrt{3}\cos 2a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin 2a - \sqrt{3}\cos 2a = -\frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right.$

$\left[\begin{array}{l} \sin 2a = -\frac{2}{\sqrt{5}} - \sqrt{3}\cos 2\alpha \\ \sin 2\alpha = \sqrt{3}\cos 2a + \frac{2}{\sqrt{5}} \\ \sin 2\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}} - \sqrt{3}\cos 2\alpha \\ \sin 2a = \sqrt{3}\cos 2a - \frac{2}{\sqrt{5}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos^2 2a + \left(\sqrt{3}\cos 2a + \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \\ \cos^2 2a + \left(\sqrt{3}\cos 2a - \frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 = 1 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 4\cos^2 2a + \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cos 2\alpha - \frac{1}{5} = 0 \ (1) \\ 4\cos^2 2a - \frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cos 2a - \frac{1}{5} = 0 \ (2) \end{array}\right.$

(1): $D = \frac{16\cdot 3}{5} + 4\cdot 4\cdot\frac{1}{5} = \frac{16\cdot 3 + 16}{5} = \frac{16\cdot 4}{5} = \frac{64}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2a = \dfrac{-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} - \frac{8}{\sqrt{5}}}{8} = \dfrac{-4\sqrt{3} - 8}{8\sqrt{5}} = \dfrac{-\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5}} \\ \cos 2a = \dfrac{-\frac{4\sqrt{3}}{\sqrt{5}} + \frac{8}{\sqrt{5}}}{8} = \dfrac{-\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{5}} \end{array}\right.$

(2): $D = \frac{64}{5} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \cos 2a = \frac{\sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5}} \\ \cos 2a = \frac{\sqrt{3} + 2}{2\sqrt{5}} \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{1 - \cos 2a}{\cos 2a + 1}} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2}{-\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{5}}} \\ \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}} \\ \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}} \\ \operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2}} \end{array}\right.$

Ответ: $\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2}{-\sqrt{3} - 2 + 2\sqrt{5}}}$; $\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}}$; $\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3} + 2}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} - 2}}$; $\pm\sqrt{\frac{2\sqrt{5} - \sqrt{3} - 2}{2\sqrt{5} + \sqrt{3} + 2}}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\cos2\beta+\sin2\beta\cos2\alpha=-\frac{1}{\sqrt5}$

$\cos\alpha\neq0$

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha=-\frac45$

$\sin2\alpha\cos4\beta+\sin4\beta\cos2\alpha+\sin2\alpha=-\frac45$

$\cos2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi=2\cos^2\varphi-1$

$\sin2\alpha(\cos4\beta-\cos2\beta)+\cos2\alpha(\sin4\beta-\sin2\beta)+\sin2\alpha=-\frac45+\frac{1}{\sqrt5}$

$\sin2\alpha\left(2\cos^22\beta-\cos2\beta-1\right)+\cos2\alpha\left(2\sin2\beta\cos2\beta-\sin2\beta\right)+\sin2\alpha=-\frac45+\frac{1}{\sqrt5}=\frac{\sqrt5-4}{5}$

$\sin2\alpha\ (\cos2\beta-1)(2\cos2\beta+1)+\cos2\alpha\cdot\sin2\beta(2\cos2\beta-1)+\sin2\alpha=\frac{\sqrt5-4}{5}$

$\sin2\alpha\left(2\cos^2\beta-2\right)\left(4\cos^2\beta-1\right)+\cos2\alpha\cdot2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot(4\cos^2\beta-3)+\sin2\alpha=\frac{\sqrt5-4}{5}$

$2\alpha+2\beta=\varphi\Rightarrow\ \sin\varphi=-\frac{\sqrt5}{5}\quad\sin(\varphi+2\beta)+\sin2\alpha=-\frac45$

$1-\frac{5}{25}=\frac{20}{25}=\sqrt{\frac45}=\frac{2}{\sqrt5}=\frac{2\sqrt5}{5}\quad\sin\varphi\cos2\beta+\sin2\beta\cos\varphi+\sin2\alpha=-\frac45$

$-\frac{\sqrt5}{5}\cos2\beta\pm\frac{2\sqrt5}{5}\sin2\beta+\sin2\alpha=-\frac45\ \Big|\cdot(-5)$

$\sqrt5\cos2\beta\mp2\sqrt5\sin2\beta-5\sin2\alpha=4$

$\sqrt5\left(\cos2\beta\mp2\sin2\beta\right)=4+5\sin2\alpha$

$\sqrt5\left(\cos^2\beta-\sin^2\beta\mp4\sin\beta\cos\beta\right)=4+5\sin2\alpha$

$\sqrt5\left((\cos\beta\pm\sin\beta)^2\pm2\sin\beta\cos\beta-2\sin^2\beta\right)=4+5\sin2\alpha$

$\cancel{\sqrt5\ (\ 1}$

№2 $\begin{cases}x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}\\x^2+9y^2-4x-18y=12\end{cases}\quad\begin{cases}xy-x-2y+2\geq0\\x-2y\geq0\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+4y^2-4xy=xy-x-2y+2\\x^2-4x+4+9y^2-18y+9=25\end{cases}$

$\begin{cases}x^2+4y^2-5xy+x+2y-2=0\\(x-2)^2+(3y-3)^2=25\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x-2y)^2-x(y-1)+2(y-1)=0\\(x-2)^2+(3y-3)^2=25\end{cases}\quad\begin{cases}(x-2y)^2+(y-1)(2-x)=0\\(x-2)^2+(3y-3)^2=25\end{cases}$

$\begin{cases}(x-2y)^2+(y-1)(2-x)=0\\(x-2)^2-16+(3y-3)^2-9=0\end{cases}\quad\begin{cases}(x-2y)^2+(y-1)(2-x)=0\\(x-6)(x+2)+(3y-6)\cdot3y=0\end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

5

$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13} - 18x$

$x^2+18x = t$

$t>0$

$5^3 + 1726 \geq 13^3$

$5^{\log_{12} t} + t \geq |t|^{\log_{12}13}$

$5^{\log_{12} t} + t \geq t^{\log_{12}13}$

$2\cdot\cos(2a+2b)\cos 2b = \cos(2a+2b)$

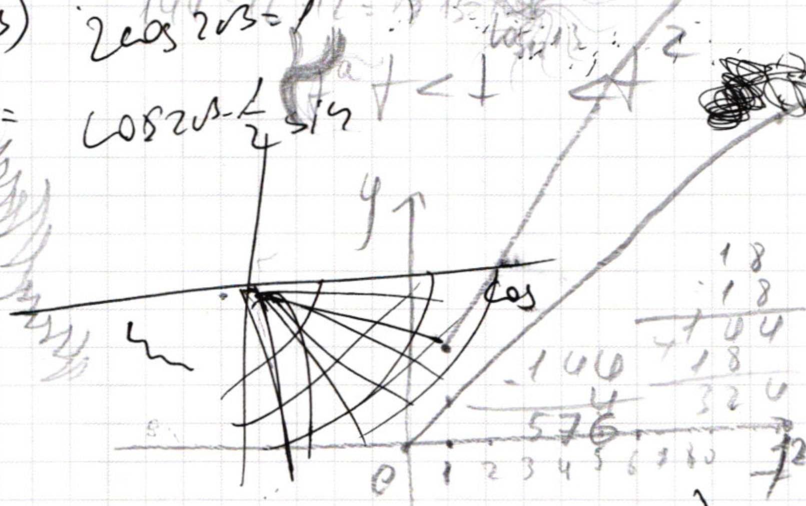
$\sin(2a+4b)+\sin 2a = \cos(2a+2b)$

$2\cos 2b = 1$

$\sin 2a\cos 4b + \cos 2a \sin 4b + \sin 2a =$

$\cos 2b = \frac{1}{2}$

$t<t$



$t\in(0;144]$

$2\cdot\cos 2b\cdot(\cos 2a\cos 2b - \sin 2a\sin 2b)$

$\begin{cases} x^2+18x>0 \\ x^2+18x\leq 144 \end{cases}$ $\begin{cases} x(x+18)>0 \\ x^2+18x-144\leq 0 \end{cases}$

$\frac{-18+30}{2}$

$\frac{-18-30}{2}$

$t>144 \Rightarrow t^{\log_{12}13} > 169$

$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

$\cos 2a = 1-2\sin^2 a$

$x^2+4y^2-4xy-xy-x-2y+2$

$t>144 \Rightarrow 5^{\log_{12} t} > 25$

$\cos a = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2a}{2}}$

$x^2+x(1-5y)+(4y^2+2y-2)=0$

$(4y-2)^2+9y^2-4(4y-2)-18y-12=0$

$\sin a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}$

$D = 25y^2-10y+1-16y^2-8y+8=$

$16y^2-16y+4+9y^2-16y+8-18y-12=0$

$\operatorname{tg} a = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{\cos 2a+1}}$

$= 9y^2-18y+9 = (3y-3)^2$

$25y^2-50y=0$

$y^2-2y=0$

$x = \frac{5y-1+3y-3}{2} = \frac{8y-4}{2} = 4y-2$

$y(y-2)=0$

$x = \frac{5y-1-3y+3}{2} = \frac{2y+2}{2} = y+1$

$y=0$ $y=2$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$$\frac{12x+11}{4x+13} \le ax+b \le -8x^2-30x-17 \quad \left[-\frac{11}{4}; -\frac{3}{4}\right] \quad x \neq -\frac{3}{4}$$

$(-8x^2-30x-17)(4x+13)=12x+11$

$(-8x^2-30x+17)(4x+3)=-12x-11$

$$\begin{cases} \frac{12x+11}{4x+3} \le ax+b \\ -8x^2-30x-17 \ge ax+b \end{cases}$$

$32x^3+120x^2+68x+24x^2+90x+51+12x+11=0$

$32x^3+144x^2+170x+62=0$

$900-4\cdot 8\cdot 17=356=4\cdot 3\cdot 8$

$$\begin{cases} \frac{12x+11-4ax^2-4bx-3ax-3b}{4x+3} \le 0 \\ -8x^2-(30+a)x-17-b \ge 0 \end{cases}$$

$16x^3+72x^2+85x+31=0$

$\pm 1 \pm 31$

$$\begin{cases} \frac{-4ax^2-(4b+3a-12)x+11-3b}{4x+3} \le 0 \\ 8x^2+(30+a)x+b+17 \le 0 \end{cases}$$

$-\frac{16}{31^3}+72\frac{16^2}{31^2}+\frac{85\cdot 16}{31}+31=0$

$-16x-30$ $\quad \frac{-11\cdot 3+11}{3-11}=\frac{-22}{-8}=\frac{11}{4}$

$-\frac{8}{31} > -\frac{11}{4}$ $\quad \frac{8}{31} < \frac{11}{4}$

$-\frac{30}{16}$ $\quad \frac{15}{8}$ $\quad \frac{10}{4}$ $\quad \frac{11-30}{3-10}=\frac{-19}{-7}=\frac{19}{7}$

$-\frac{800}{16}+\frac{300}{4}-17=\frac{100}{4}-17=\frac{100-68}{4}=\frac{32}{4}=8$

$\frac{11-12}{3-4}=1$

$\frac{11}{4} \le ax+b \le -8\cdot\frac{121}{16}+\frac{15\cdot 11}{4}-17=\frac{-11\cdot 2+15\cdot 11}{4}-17=$

$=\frac{11(15-22)}{4}-17=-\frac{77}{4}-17=$

$=\frac{-77-68}{4}=-\frac{145}{4}$

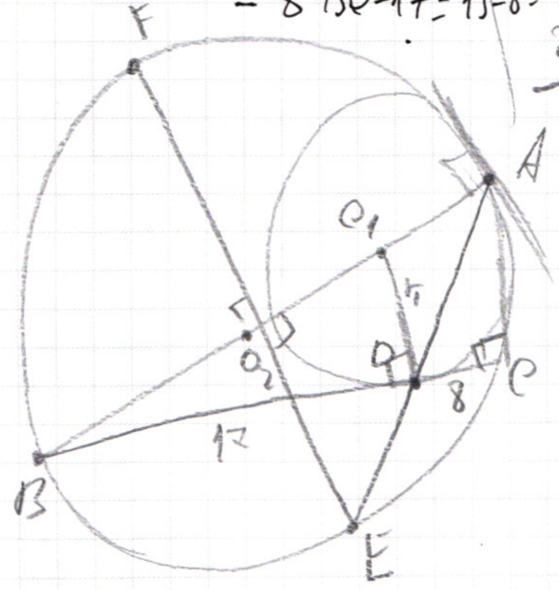
$-8+30-17=13-8=5$

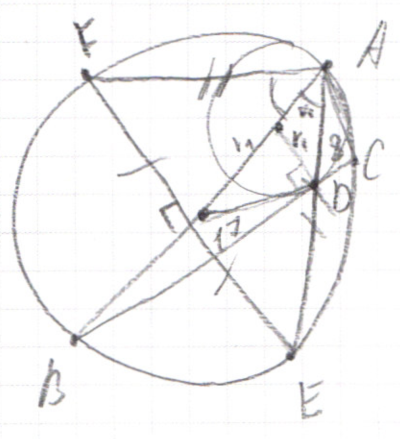
$\frac{2r_2-r_1}{2r_2}=\frac{17}{25} \Rightarrow 34r_2=50r_2-25r_1$

$25r_1=16r_2$

$CD=8 \quad BD=17$

$\angle AFE$





$r_1 \; r_2$

S_{AEF}

$(2r_2-r_1)^2=r_1^2+17^2$

$4r_2^2+r_1^2-4r_1r_2=r_1^2+289$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a+2n) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$ $\sin(2a+4n)+\sin 2a = -\frac{4}{5}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$ при p - простое

$\begin{cases} f\left(\frac{x}{y}\right) < 0 \\ 1 \le x \le 24 \\ 1 \le y \le 24 \end{cases}$ - кол-во таких пар

x, y - не являются простыми одновременно

$\frac{1}{24} \le \frac{x}{y} \le 24$

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$

$f(24) = f(24) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f\left(\frac{24}{1}\right) = f(24) + f(1) = 0$

$f\left(\frac{24}{2}\right) = f(12) = 0 = f(24) + f\left(\frac{1}{2}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$

$f\left(\frac{24}{3}\right) = f(8) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$

$f\left(\frac{24}{4}\right) = f(6) = 0 \Rightarrow f\left(\frac{1}{4}\right) = 0$

$f\left(\frac{20}{5}\right) = f(4) = 0 = f(20) + f\left(\frac{1}{5}\right) = f(4) + f(5) + f\left(\frac{1}{5}\right) = 1 + f\left(\frac{1}{5}\right) \Rightarrow f\left(\frac{1}{5}\right) = -1$

$f(1) = 0$

$f(2) = 0$

$f(3) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$f(11) = 2$

$f(13) = 2$

$f(17) = 4$

$f(19) = 4$

$f(23) = 5$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(8) = f(2) + f(4) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1$

f

$f(24) = 0 + 0 = 0$

$f\left(\frac{22}{11}\right) = f(22) + f\left(\frac{1}{11}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = f\left(\frac{2a}{2}\right) = f(2a) + f\left(\frac{1}{2}\right) =$

$f(2a) - f(2) = f(2a) = f(a) + f(2) =$

$= f(a)$

~~$f\left(\frac{2a}{2}\right) = f(2$~~ $f\left(\frac{2a}{a}\right) = f(2a) + f\left(\frac{1}{a}\right) =$

$f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) = 0$

$f\left(\frac{1}{a}\right) = -f(a)$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)