МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2 ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

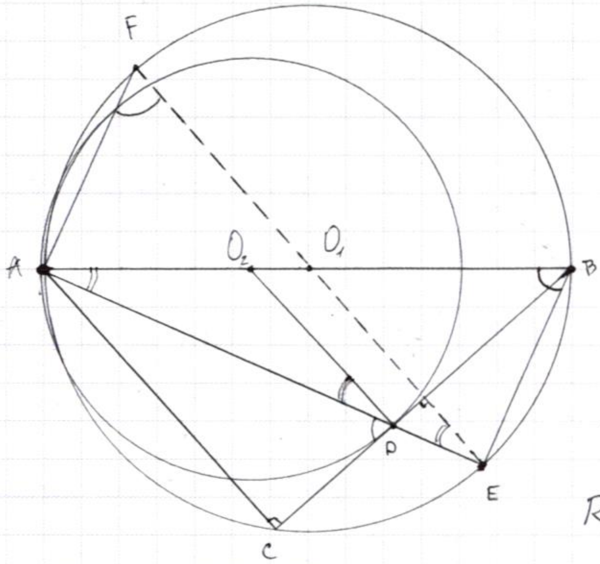
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

4.



1. Пусть R и r – радиусы Ω и ω, а O_1 и O_2 – их центры. Тогда $O_2D \perp BC$ как радиус, пров. в т. касания. Заметим, что $\triangle ABC \sim \triangle O_2AD$, ведь $\angle ACD = 90°$, т.к. опирается на диаметр, угол при верш. B общий. Тогда $\frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{AB}$, или $\frac{17}{32} = \frac{2R-r}{2R}$, откуда $R = \frac{16}{15}r$.

Теорема Пифагора в $\triangle O_2BD$:

$(2R-r)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{32}{15}r - r\right)^2 = r^2 + \left(\frac{17}{2}\right)^2 \Rightarrow r^2 = \frac{17^2 \cdot 15^2}{16^2}$, $r = \frac{17 \cdot 15}{16}$, $R = \frac{16}{15}r = 17$.

2. Заметим, что $O_1 \in EF$. Действительно, ведь $\angle AEF = \angle O_1AE$, т.к. $\angle AEF = \angle ADO_2$ как соотв. при $(BC\perp)\ O_2D \parallel FE\ (\perp BC)$, а $\angle O_2DA = \angle O_2AD$ в р/б $\triangle AO_2D$, значит, $\triangle AO_1E$ – р/б, $O_1E = O_1A = R$, EF – диаметр, $\angle EAF = 90°$.

3. Пусть $\angle AFE = \alpha$, $\angle AEF = 90° - \alpha$, $\angle ADC = 90° - (90° - \alpha) = \alpha$. Запишем т. Пифагора в $\triangle ADC$: $AD^2 = \left(\frac{15}{2}\right)^2 + \left(\frac{32}{17} \cdot O_2D\right)^2 \Rightarrow AD = \sqrt{\left(\frac{15}{2}\right)^2 + 30^2} = \frac{15\sqrt{17}}{2}$. $\cos\angle ADC = \cos\alpha = \frac{DC}{AD} = \frac{1}{\sqrt{17}}$, $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{17}}$; $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$.

4. $S_{AFE} = \frac{1}{2}\sin\angle AFE \cdot AF \cdot FE = \frac{1}{2}\sin\alpha \cdot (2R\cdot\cos\alpha) \cdot 2R = 2R^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 8 \cdot 17 = 136$.

Ответ: $R = 17$, $r = \frac{17 \cdot 15}{16}$, $\alpha = \arccos\frac{\sqrt{17}}{17}$, $S = 136$.

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

5. Заметим для начала, что $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$.

Теперь будем считать $f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, $n \leq 25$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0$; $f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$; $f(4) = f(2) + f(2) = 0$; $f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1$ и т. д.

В итоге получим следующий ряд:

0, 0, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 0, 1, 2, 0, 3, 1, 1, 0, 4, 0, 4, 1, 1, 2, 5, 0, 1.

Заметим теперь, что $f(1) = f(a) + f(\frac{1}{a})$, откуда $f(\frac{1}{a}) = -f(a)$.

Тогда $f(x/y) = f(x) + f(\frac{1}{y}) = f(x) - f(y)$. Необходимо посчитать кол-во пар (x, y) таких, что $f(y) > f(x)$. Для 10 значений $x \in \{2, 3, \ldots, 25\}$ выполняется $f(x) = 0$, и для каждого можно подобрать 14 знач. $y \mid f(y) > 0$; для 8 знач. x $f(x) = 1$, и для 6 знач. y $f(y) > 1$; для 2 знач. x $f(x) = 2$, для 4 знач. y $f(y) > 2$; для $x = 13$ $f(x) = 3$, и для 3 знач. y $f(y) > 3$; для 2 знач x $f(x) = 4$ и для $y = 23$ $f(y) > 4$; наконец, при $f(x) \geq 5$ не найдется y из мн-ва $\{2, 3, \ldots 25\}$, что $f(y) > 5$. Значит, кол-во пар $(x; y)$ равно

$$10 \cdot 14 + 8 \cdot 6 + 2 \cdot 4 + 1 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 140 + 48 + 8 + 3 + 2 = 201.$$

Ответ: 201.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45; \end{cases}$

$2xy-12y-x+6=(2y-1)(x-6)$

$x^2+36y^2-12x-36y=(x^2-24xy+144y^2)+12(2xy-12y-x+6)-18(4y^2-4y+1)-72=$

$=(x-12y)^2+12(2y-1)(x-6)-18(2y-1)^2-72=45.$

Пусть $2y-1=a$, $x-6=b$, тогда $x-12y=b-6a$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab}, \\ (b-6a)^2+12ab-18a^2=117; \end{cases}$

$\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0, \\ b^2-12ab+36a^2+12ab-18a^2=117; \end{cases}$

$\begin{cases} b^2-13ab+36a^2=0, & (1) \\ b^2+18a^2=117; & (2) \end{cases}$

$\cancel{\begin{cases} b^2+18a^2=117, \\ -13ab-18a^2=117; \end{cases}}$

(1) Решим отн. b

$D=169a^2-4\cdot 36a^2=25a^2$

$b=\frac{13a\pm 5a}{2}=9a \vee 4a$

I) $b=9a \Rightarrow (2): 99a^2=117 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{117}{99}} = \pm\sqrt{\frac{13}{11}}$, $b=\pm 9\sqrt{\frac{117}{99}}=\pm 9\sqrt{\frac{13}{11}}$

$\cancel{b^2+18\cdot 81b^2=117 \Rightarrow}$

II) $b=4a \Rightarrow (2): 34a^2=117 \Rightarrow a=\pm\sqrt{\frac{117}{34}}$, $b=\pm 4\sqrt{\frac{117}{34}}$

Обратная подстановка: $x=b+6$

и проверка ОДЗ $y=\frac{a+1}{2}$

Ответ: $\left(\pm 9\sqrt{\frac{117}{99}}+6;\ \frac{\pm\sqrt{\frac{117}{99}}+1}{2}\right)$,

3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geq x^2 + 5^{\log_3(10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0 \Rightarrow x \in (0;10)$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} - \left(5^{\log_5(10x - x^2)}\right)^{\frac{1}{\log_5 3}} \geq 0$

$10x - x^2 = t$ ~~$(t>0)$~~ $(t \in (0;25])$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \geq 0$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$= (x-12y)^2 + 12(2y+1)(x-6) - 12(-12y-x+6) - 144y^2 + 36y^2 - 12x - 36y =$

черн
чист
зов
залв
анкета

$= (x-12y)^2 + 12(2y-1)(x-6) + 144y + 12x - 72 - 144y^2 + 36y^2 - 12x - 36y =$

$= (x-12y)^2 + 12(2y-1)(x-6) - 72y^2 + 72y - 72 = -72(y^2 - y + 1) =$

$= (x-12y)^2 + 12(2y-1)(x-6) - 18(4y^2 - 4y + 4) = -18(4y^2 - 4y + 1) - 72 =$

$= -18(2y-1) - 72 =$

$= (x-12y)^2 + 12(2y-1)(x-6) - 18(2y-1)^2 - \cancel{72} = \cancel{45}\ 117$

$2y-1 = a, \quad x-6 = b$

$\begin{cases}(b-6a)^2 = ab \\ ab + 12ab - 18a^2 = 117\end{cases} \Leftrightarrow b^2 - 12ab + 36a^2 = ab \Rightarrow 13ab = b^2 + 36a^2$

$-18a^2 + 13ab - 117 = 0$

$b^2 + 36a^2 - 18a^2 - 117 = 0$

$a+b = \alpha \quad \alpha^2 - \beta = 0$
$ab = \beta$

$b^2 + 18a^2 - 117 = 0$

$18a^2 - 13b \cdot a + 117 = 0$

$b^2 + 18a^2 = 117$

$\begin{cases} b^2 - 13ab + 36a^2 = 0 \\ b^2 - 12ab + 36a^2 + 12ab - 18a^2 = 117 \end{cases}$

I. $a = 0 \qquad b^2 + 18a^2 = 117$

$D = 169a^2 - 144a^2 = 25a^2$

$b = \frac{13a \pm 5a}{2} =$

$\frac{16x-16}{4x-5} - (ax + b) \le 0$

$16x - 16 \le 4bx - 5b$

$\frac{16x - 16 - 4ax^2 - (4b - 5a)x + 5b}{4x-5} \le 0$

$(16 - 4b)x - 16 + 5b \le 0$

$b \ne 4$

$x = \frac{16-5b}{16-4b}$ — корень

$\frac{-4ax^2 - (4b - 5a - 16)x - (16 - 5b)}{4x-5} \le 0$

1) $b < 4$

$-a($

$\frac{4ax^2 + (4b - 5a - 16)x + 16 - 5b}{4x-5} \le 0$

$\frac{16-5b}{16-4b} > 1 \Leftrightarrow 16 - 5b > 16 - 4b \Rightarrow \underline{0 > b}$

$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} - 5^{\frac{\log_5(10-x^2)}{\log_5 3}} \ge 0$

$= \left(5^{\frac{1}{\log_5 3}}\right)^{\log_5(10-x^2)} = (10x - x^2)^{\frac{1}{\log_5 3}} = t^{\log_3 5}$

$t + t^{\log_3 4} - t^{\log_3 5} \le 0$

$1 + \log_3 4\, t^{\log_3 \frac{4}{3}} - \log_3 5\, t^{\log_3 \frac{5}{3}} = 0$

$\log_3 5 = \log_t t$

$-t^x + t^y + 1 = 0$

$t^x = t^y + 1 \Rightarrow x = \log_t t^y + 1, \quad y = \log_t t^x - 1$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2+36y^2-12x-36y=45 \end{cases}$$

$(ax+by+c)(dx+ey+f) = \underline{adx^2}+\underline{aexy}+\underline{afx}+\underline{bdxy}+\underline{bey^2}+bfy+\underline{dcx}+cey+cf =$

$= x^2+36y^2-12x-36y-45 = ad\cdot x^2+(ae+bd)xy+be\cdot y^2+(af+de)x+(bf+ce)y+cf$

$$\begin{cases} ad=1 \\ be=36 \\ ae=-bd \end{cases} \quad d=\frac{1}{a} \quad e=\frac{36}{b} \quad a\frac{36}{b}=-b\cdot\frac{1}{a} \iff 36a^2=-b^2$$

!

$-$ ~~X~~ 2 3 ~~4~~ ~~5~~ 6 ~~7~~

$(x+ay+b)(x-ay$

3. $10x+|x^2-10x|^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)} = x^2+5^{\frac{\log_5(10x-x^2)}{\log_5 3}} = (10x-x^2)^{\frac{1}{\log_5 3}} =$

$= x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

ОДЗ: $10x-x^2>0$

$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$\underbrace{(10x-x^2)}_{t}{}^{\log_3 3}+(10x-x^2)^{\log_3 4}-(10x-x^2)^{\log_3 5} \geq 0 \qquad \frac{\log_3 5-1}{\log_3 4-1} = \frac{\log_3 5/3}{\log_3 4/3} = \log_{4/3} 5/3 =$

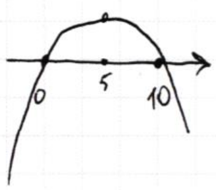
$t^{\log_3 3}+t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5} \geq 0 \qquad t^{\log_3 3}>0 \qquad =$

$1+t^{\log_3 4-\log_3 3} \cancel{+} t^{\log_3 5-\log_3 3} = 1+t^{\log_3\frac{4}{3}} \cancel{+} t^{\log_3\frac{5}{3}} \geq 0 \qquad \log_3$

$10x-x^2>0 \qquad t+t^{\log_3} \qquad t+z+z^{\log_4 5}$

$x(10-x)>0 \qquad 25=t_{max} \qquad 1+\cancel{z+}\, z^{\log_{4/3}\frac{5}{3}} >0 \qquad z^{\log_4 3}+z+z^{\log_4 5}$

$t^{\log_3\frac{5}{3}} = \log_3 5-1 = t$



$1+z \geq z^{\log_{4/3} 5/3}$

$t\in(0;25)$

$t+t^{\log_3 4} \cancel{+} t^{\log_3 5} \geq 0$

$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$

$t(1+t^{\log_3\frac{4}{3}}) \geq t(t^{\log_3 5-1}) \qquad 1 \geq t^{\log_3 5-1}-t^{\log_3 4-1}$

>1

$1+t^{\log_3\frac{4}{3}} \geq t^{\log_3\frac{5}{3}}$

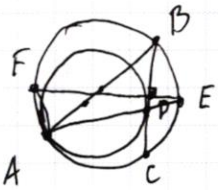
$1 \geq \underbrace{t^{\log_3\frac{4}{3}}}_{>1}\underbrace{(t^{\log_{4/3}\frac{5}{3}}-1)}_{<0} \qquad I.\ t=1$

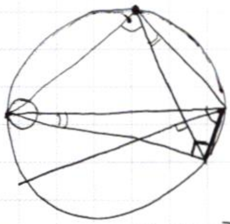
☑ черновик ☐ чистовик

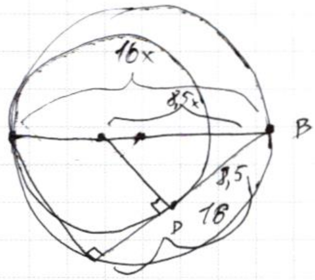
(Поставьте галочку в нужном поле)

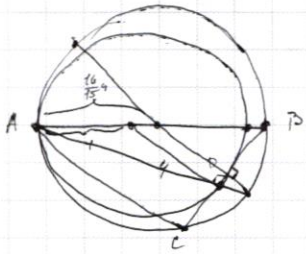
Страница №__

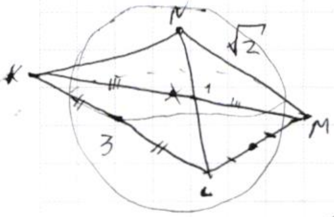
(Нумеровать только чистовики)











$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)(x-6)} \\ x(x-12)+36y(y-1)=45 \end{cases}$$

$$(2R-y)^2 = y^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\frac{2R}{2R+(R-y)} = \frac{16}{8,5}$$

$$\left(\frac{32}{15}y-y\right)^2 = y^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\left(\frac{17}{15}y\right)^2 = y^2+\left(\frac{17}{2}\right)^2$$

$$\cancel{\frac{2R}{R+y} = \frac{16}{8,5}}$$

$$\frac{2\cdot 32}{15^2}y^2 = \frac{17^2-15^2}{15^2}y^2 = \frac{17^2}{4}$$

$$y^2 = \frac{17^2\cdot 15^2}{4\cdot 64} \Rightarrow$$

$$\frac{R}{R+y} = \frac{16}{17}$$

$$\Rightarrow \boxed{y = \frac{17\cdot 15}{16}}$$

$$17R = 16R+16y \Rightarrow \boxed{R=16y}$$

$$\boxed{R=17}$$

$$\frac{R}{2R-y} = \frac{16}{17}$$

$$17R = 32R-16y$$

$$16y = 15R$$

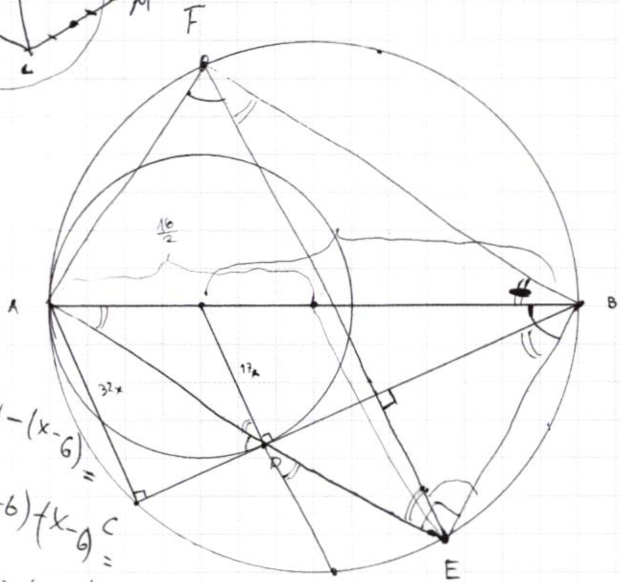
$$R = \frac{16}{15}y$$

$17 \times 17 = 289$

63×63

67×67

$+189$
378
3969

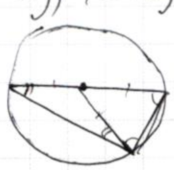


$2xy-12y-(x-6) =$

$= 2y(x-6)-(x-6) =$

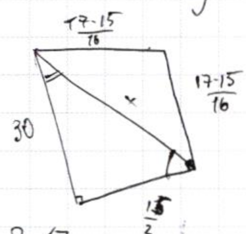
$= (2y-1)(x-6)$

$(x-12y)^2+24xy-144y^2+36y^2-12x-36y=$



$(x-12y)^2 =$

$= x^2-24xy+144y^2$



$x = \sqrt{30^2+\frac{15^2}{4}} = \sqrt{\frac{3600+225}{4}} =$

$\sqrt{900\cdot 4+17^2} = \frac{\sqrt{3889}}{2} = \frac{\sqrt{3825}}{4}$

$x = \sqrt{15^2\cdot 2^2+15^2\cdot\left(\frac12\right)^2} = 15\sqrt{4+\frac14} =$

$= 15\sqrt{\frac{17}{4}} =$

$= 15\frac{\sqrt{17}}{2}$

$S = \frac{1}{2}\cdot 2R\cdot(2R\cdot\cos\angle AFE)\cdot\sin\angle AFE =$

$= 2R^2\cdot\sin\cdot\cos = 2R^2\cdot\frac{4}{17} = 8\cdot 17 =$

$=$

$\cos\angle APC = \frac{15}{2}\cdot\frac{2}{15\sqrt{17}} = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$f(1) = f\left(\frac1a\right)+f(a) \Rightarrow f\left(\frac1a\right) = -f(a)$

$85+51 = 136$

$\angle AFE = \angle APC = \arccos\left(\frac{\sqrt{17}}{17}\right)$

$Q_{>0}$

$f(ab) = f(a)+f(b)$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$

$f\left(\frac1a\right) =$

$f(a)+f\left(\frac{1}{a^2}\right)$

$f\left(\frac12\right) = f(2)\cdot f\left(\frac14\right)$

$f(1)=0$		
$f(2)=0$		
$f(3)=0$	$f(13)=3$	$f(23)=5$
$f(4)=0$	$f(14)=1$	$f(24)=0$
$f(5)=1$	$f(15)=1$	$f(25)=2$
$f(6)=0$	$f(16)=0$	
$f(7)=1$	$f(17)=4$	
$f(8)=0$	$f(18)=0$	
$f(9)=0$	$f(19)=4$	
$f(10)=1$	$f(20)=1$	
$f(11)=2$	$f(21)=1$	
$f(12)=0$	$f(22)=2$	

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x)\cdot f\left(\frac1y\right) =$

$= f(x)-f(y)$

$f(y) > f(x)$ how much?

$\frac{16x-20+4}{4x-5} = \frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$

$x\in\left[\frac14;1\right]$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА