МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

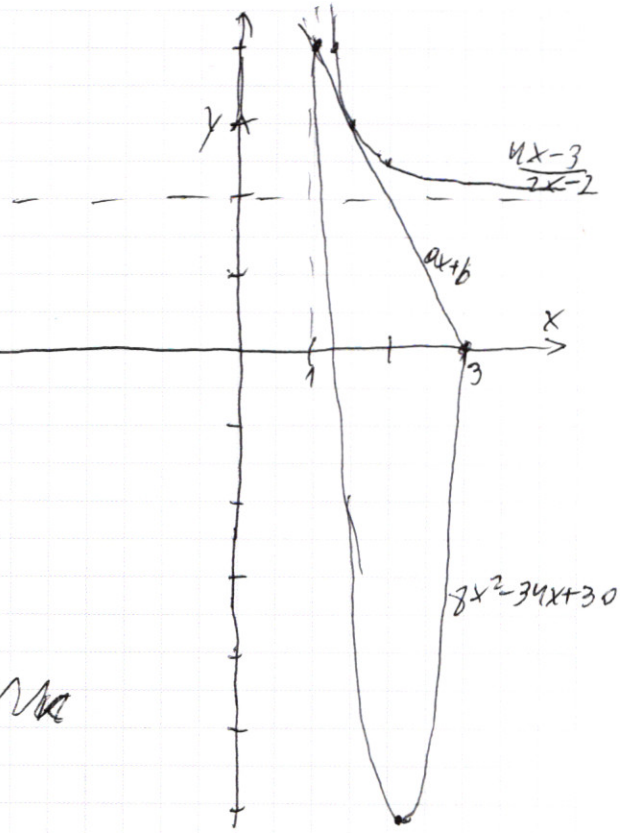
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$



$$2+\frac{1}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

~~Пусть гоахы~~

$$\frac{d}{dx}\left(2+\frac{1}{2x-2}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2-2x+1}\right)$$

~~Тогда уравнение касательной к гиперболе примет вид~~

Рассмотрим прямую $ax+b$, проходящую через точки ~~на~~ параболы на концах заданного промежутка

$$\begin{cases} 3a+b=0 \\ a+b=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a=-2 \\ b=6 \end{matrix}$$

Прямая принимает вид $-2x+6$

Найдем уравнение касательной к гиперболе, параллельной $-2x+6$. => Производная гиперболы принимает в ~~этой~~ точке касания значение -2

$$\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{x^2-2x+1}\right)=-2$$

$$4x^2-8x+3=0$$

$$\left[\begin{array}{l} x=\frac{3}{2} \\ x=-\frac{3}{2} \notin [1;3] \end{array}\right.$$

Тогда уравнение касательной в точке $\frac{3}{2}$ примет вид

$$\frac{\left(\frac{3}{2}-x\right)}{2\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{2}\cdot 2+1} + 2 + \frac{1}{2\left(\frac{3}{2}-1\right)} = -2x+6$$

Касательная к гиперболе, параллельная прямой совпала с прямой $\Rightarrow$ $a=-2$, $b=6$ удовлетворяют условию.

Любая другая прямая, удовлетворяющая условию должна удовлетворять системе неравенств.

$$\begin{cases} 3a+b \geq 0 \\ a+b \geq 4 \\ \frac{3}{2}a+b \leq 3 \end{cases}$$

Из 1 и 2:

$3(a+b)-3a-b \geq 12$

$b \geq 6$

Но из 1 и 3:

$$\left.\begin{array}{l} a \geq -\frac{b}{3} \\ a \leq \frac{-b}{3}\cdot 2+2 \end{array}\right| \Rightarrow \frac{-b}{3}\cdot 2+2 \geq \frac{-b}{3}$$

$\frac{-b}{3} \geq -2$

$b \leq 6$

Значит прямая, удовлетворяющая условию обязательно имеет коэффициент $b=6$, а тогда из 1 и 3 неравенств $3a+6 \geq 0 \wedge \frac{3}{2}a+6 \leq 3$ $a \geq -2 \wedge a \leq -2$

Значит $a=-2$ $\Rightarrow$ прямая только одна: $-2x+6$

Ответ: $(-2; 6)$

№ 5

$$f(x)=f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n} f(p_k)-\sum_{k=1}^{n} f(q_k)=\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_k}{4}\right]-\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{q_k}{4}\right]$$

где p_k - простой множитель x, а q_k - простой множитель y.

$$f\left(\frac{x}{y}\right)<0 \Rightarrow \sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_k}{4}\right]<\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{q_k}{4}\right]$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

x	$\prod p_k$	$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{p_k}{4}\right]=f(x)$
3	3	0
4	2^2	0
5	5	1
6	$2\cdot3$	0
7	7	1
8	2^3	0
9	3^2	0
10	$2\cdot5$	1
11	11	2
12	$2^2\cdot3$	0
13	13	3
14	$2\cdot7$	1
15	$5\cdot3$	1
16	2^4	0
17	17	4
18	$3^2\cdot2$	0
19	19	4
20	$5\cdot2^2$	1
21	$3\cdot7$	1
22	$11\cdot2$	2
23	23	5
24	$2^3\cdot3$	0
25	5^2	2
26	$13\cdot2$	3
27	3^3	0

Для чисел x, дающих после функции $f(x)=n$ подходят все y, для которых $f(y)>n$

x, для которых $f(x)=0$ на $[3;27]$ 10, для каждого из них подходят y, для которого $f(y)=n$, $n\in\{1;2;3;4;5\}$, то есть $7+3+2+2+1=15$ (сумма кол-в чисел, дающих 1, 2, 3, 4, 5 после выполнения функции).

Аналогично для x, $f(x)=1$ (7 штук) подходят $3+2+2+1=8$ числу y, для x, $f(x)=2$ (3 штуки), подходят $2+2+1=5$ чисел y, для x, $f(x)=3$ (2 штуки), подходят $2+1=3$ числу y, для x, $f(x)=4$ (2 штуки) подходит 1 числу.

Если $f(x)=5$, то на $[3;27]$ нет подходящего ему числа y. Для нахождения кол-ва комбинаций $(x;y)$ нужно в каждом случае кол-во подходящих x умножить на кол-во подходящих y, итого $10\cdot15+7\cdot8+3\cdot5+2\cdot3+2\cdot1=150+56+15+6+2=$

$=\underline{\underline{229}}$

№1

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta+2\beta) = \sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\cos(2\alpha+2\beta)\cdot\sin 2\beta}$

$\cancel{+\sin 2\alpha}$

$\sin(2\alpha+4\beta) = -\frac{1}{[illegible]}\,\cancel{\cos 2\beta}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha + 2\cos^2 2\alpha + 1) = -\frac{8}{17}$

$2\cos 2\alpha + 2 = \frac{8}{\sqrt{17}} \Rightarrow \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} + 1 = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\alpha = \frac{4-\sqrt{17}}{\sqrt{17}}$

$1-tg^2\alpha + (1-\frac{4}{\sqrt{17}})(1+tg^2\alpha) = 0$

$\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta + 2\beta) = \sin(2\alpha + 2\beta)\cdot\cos 2\beta + \cos(2\alpha+2\beta)\sin 2\beta +$
$+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\beta \pm \left(\frac{4}{\sqrt{17}}+1\right)\sin 2\beta = \frac{-8}{\sqrt{17}}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \pm \left(\frac{4}{\sqrt{17}}+1\right)\cdot\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} = -\frac{8}{\sqrt{17}}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

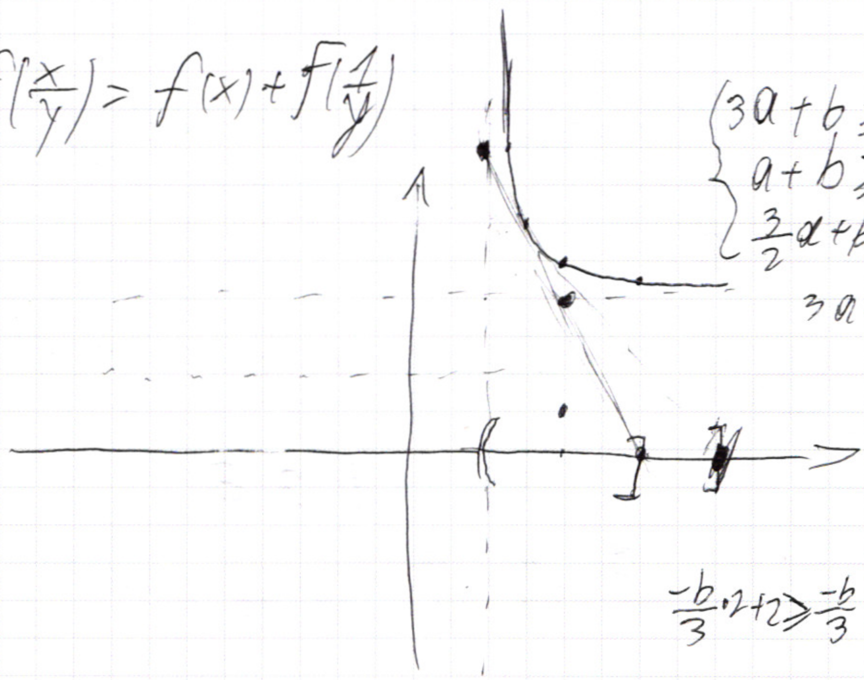
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right)$



$$\begin{cases} 3a+b \geq 0 \\ a+b \geq 4 \\ \frac{3}{2}a+b \leq 3 \end{cases}$$

$3a+2b \leq 6$

$a \geq \frac{-b}{3}$

$a \geq 4-b$

$a \leq \frac{-b}{3}\cdot 2+2$

$\frac{-b}{3}\cdot 2+2 \geq \frac{-b}{3}$

$\frac{-b}{3} \geq -2$

$\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2(x-1)}\right) = \frac{d}{dx}\frac{1}{2}(x-1)^{-1} =$

$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2-2x+1}\right)$

$3a+b=0 \quad a=-2$

$a+b=4 \quad b=6$

$-2x+6$

$\frac{1}{x^2-2x+1} = 4$

$4x^2-8x+3=0$

$x = \frac{8 \pm \sqrt{64-48}}{8} \quad 1 \pm \frac{1}{2}$

$\frac{1}{2\left(\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{3}{2}\cdot 2+1\right)}\left(\frac{3}{2}-x\right) + 2 + \frac{1}{2\left(\frac{1}{2}\right)} = 2\left(\frac{3}{2}-x\right)+3$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

p_k – простой множитель x

$f\left(\frac{x}{y}\cdot y\right)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f(y) \Rightarrow f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-f(y)=$

$=\sum f(p_k)-\sum f(q_k)$

$\sum\left[\frac{p_k}{4}\right]<\sum\left[\frac{q_k}{4}\right]$

2	3	5	7	11	13	17	19	23
0	0	1	1	2	3	4	4	5

$x=3$

$x=5$

3	3	0
4	$2\cdot2$	0
5	5	1
6	$2\cdot3$	0
7	7	1
8	2^3	0
9	3^2	0
10	$2\cdot5$	1
11	11	2
12	$2^2\cdot3$	0
13	13	3
14	$2\cdot7$	1
15	$3\cdot5$	1
16	2^4	0
17	17	4
18	$3^2\cdot2$	0
19	19	4
20	$5\cdot2^2$	1
21	$3\cdot7$	1
22	$2\cdot11$	2
23	23	5
24	$2^3\cdot3$	0
25	5^2	2
26	$2\cdot13$	3
27	3^3	0

7, 3, 2, 2, 1

☑ черновик ☐ чистовик Страница №___

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha)\cos(2\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin 4\beta+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha=\sqrt{1-\cos^2 2\alpha}$

$\sin^2 2\alpha+\cos^2 2\alpha=1$

$\frac{\sin^2 2\alpha}{\cos^2 2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2 2\alpha}$

$tg 2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$9y^2+3y+4x^2+2x=9xy+2$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$9y^2-6xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2+3y+\frac{1}{4}$

$+4x^2+2x+\frac{1}{4}$

$-9xy-2$

$y(3y-4)$

$x(3x-6)$

$x=\frac{6\pm\sqrt{-3y^2-4y-36}}{6}=\frac{3\pm\sqrt{9-3y^2+4y+4}}{3}$

$3y-2x$

$3y+2x$

$\sqrt{3}y+\frac{2}{\sqrt{3}}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3}+6x+x^2-(6x+x^2)^{\log_4 3}\cdot\sqrt{x^2+6x}\geq 0$

$a^{\log_4 3}+a-a^{\log_4 5}\geq 0$

$\frac{a^{\log_4 3}}{a^{\log_4 5}}+\frac{a}{a^{\log_4 5}}-1\geq 0$ $\quad a^{\log_4 3-\log_4 5}+a^{\log_4 4-\log_4 5}-1\geq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$a^{\log_4 \frac{3}{5}} + a^{\log_4 \frac{4}{5}} - 1 \geq 0$

$3^{\log_4 a} + 4^{\log_4 a} - 5^{\log_4 a}$

$\alpha = 30^\circ$

$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$

$-\frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha} + 1$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$

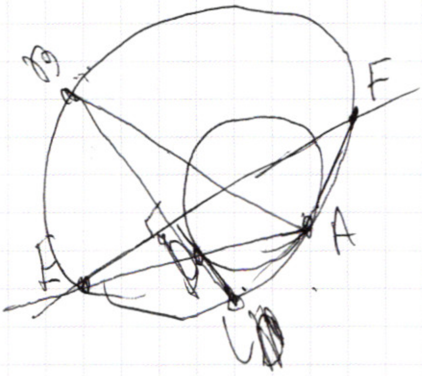
$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

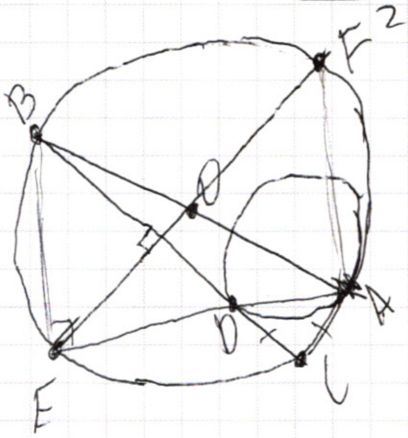
$(x-y)(x+y)$

$1 - tg^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha}{\cos^2\alpha}$

$\cos^2\alpha = \frac{\cos 2\alpha + 1}{2}$

$\frac{1 - tg^2\alpha}{2} = \frac{\cos 2\alpha}{\cos 2\alpha + 1}$





$\frac{2}{1 - tg^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}$

$\frac{1}{\cos 2\alpha} = \frac{1 + tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha}$

$\cos 2\alpha = \frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

$-\cos 2\alpha + \cos^2\alpha =$

$tg^2\alpha = \frac{1 - \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = 1 - \frac{\cos 2\alpha \cdot 2}{\cos 2\alpha + 1}$

$\frac{2}{1 - tg^2\alpha} = 1 + \frac{1}{\cos 2\alpha}$

$x = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 12(3y^2 - 4y - 4)}}{6} = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 9y^2 + 12y + 12}}{3}$

$\frac{1 + tg^2\alpha}{1 - tg^2\alpha} = \frac{1}{\cos 2\alpha}$

$y = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12(3x^2 - 6x - 4)}}{6} =$

$= \frac{2 \pm \sqrt{4 - 9x^2 + 18x + 12}}{3}$

$\frac{1 - tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha} = \cos 2\alpha$

$\alpha = 30$

$\cos 2\alpha = \frac{1}{2}$

$\sin 2\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$tg\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}}$

$\sin 2\alpha = \frac{2 tg^2\alpha}{1 + tg^2\alpha}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)