МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax+b \geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \end{cases}$$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \underline{\sin 4\beta} \cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot (2\cos^2 2\beta - 1) + \underline{\sin 2\beta} \cdot \cos 2\alpha \cdot \underline{2 \cdot \cos 2\beta} + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha \cdot \cancel{2} \cdot \cos^2 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha \cdot \cancel{2} \cdot \cos 2\beta = -\frac{\cancel{8}\,4}{17}$

$\cos 2\beta \, (\sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha) = -\frac{4}{17}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

① $\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cos 2\beta \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{4}{17} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}}$

О.Т.Т.:

$\cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta = 1 \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\cos^2 2\beta}$

$\sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$

~~т.к.~~

К $\sin 2\beta > 0$!

из ① $\sin 2\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad \Big| \cdot \sqrt{17}$ ~~$\cos 2\alpha$~~

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$\cos 2\alpha = 0$ – не решение $\Rightarrow \cos 2\alpha \neq 0$

$4\,tg\, 2\alpha + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

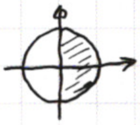
$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{1}{\cos\alpha} = \pm\sqrt{1+tg^2\alpha}$; ~~т.к. $\sin 2\alpha > 0$~~.

тогда: $\frac{1}{\cos 2\alpha} = \pm\sqrt{1+tg^2\alpha}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\ast\ \cos 2\alpha > 0$



$4\,tg 2\alpha + 1 = -\sqrt{1+tg^2 2\alpha}$ Огр$_1$: $-(4\,tg 2\alpha + 1) \geqslant 0$

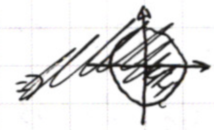
$16\,tg^2 2\alpha + 8\,tg 2\alpha + 1 = 1 + tg^2 2\alpha$

$15\,tg^2 2\alpha + 8\,tg 2\alpha = 0$

$tg 2\alpha\,(15\,tg 2\alpha + 8) = 0$

1) $tg 2\alpha = 0$ (не подх. под Огр$_1$)

2) $15\,tg 2\alpha + 8 = 0 \Rightarrow tg 2\alpha = -\frac{8}{15}$ (подходит под Огр$_1$) $\Rightarrow$



$\ast\ \cos 2\alpha < 0$

$4\,tg 2\alpha + 1 = \sqrt{1+tg^2 2\alpha}$ Огр$_2$: $4\,tg 2\alpha + 1 \geq 0$

$15\,tg^2 2\alpha + 8\,tg 2\alpha = 0$

1) $tg 2\alpha = 0$ (подх. под Огр$_2$) $\Rightarrow$

2) $tg 2\alpha = -\frac{8}{15}$ (не подх. под Огр$_2$)

Итого: $tg 2\alpha = 0$; $tg 2\alpha = -\frac{8}{15}$

$\ast\ \sin 2\beta < 0$:

$4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1$

$\ast\ \cos 2\alpha > 0$

$4\,tg 2\alpha - 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha} = -\sqrt{1+tg^2 2\alpha}$ Огр$_3$: $4\,tg 2\alpha - 1 < 0$

$16\,tg^2 2\alpha - 8\,tg 2\alpha + 1 = 1 + tg^2 2\alpha$

$tg 2\alpha\,(15\,tg 2\alpha - 8) = 0$

1) $tg 2\alpha = 0$ — подходит под Огр$_3$

2) $tg 2\alpha = \frac{8}{15}$ — не подходит под Огр$_3$

$\ast\ \cos 2\alpha < 0$

$4\,tg 2\alpha - 1 = \sqrt{1+tg^2 2\alpha}$ Огр$_4$: $4\,tg 2\alpha - 1 > 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$15\,tg^2 2\alpha - 8\,tg 2\alpha = 0$

1) $tg 2\alpha = 0$ ← не подх. под огр 4

2) $tg 2\alpha = \frac{8}{15}$ ← подходит под огр 4

тогда $tg 2\alpha \in \{-\frac{8}{15}; 0; \frac{8}{15}\}$

$tg 2\alpha = \frac{2 tg \alpha}{1 - tg^2 \alpha} \Rightarrow tg 2\alpha - tg 2\alpha\, tg^2\alpha = 2 tg \alpha$

$tg^2\alpha + \frac{2 tg \alpha}{tg 2\alpha} - 1 = 0$

$\ast$ $tg 2\alpha = \frac{8}{15}$

$tg^2\alpha + \frac{15}{4} tg\alpha - 1 = 0$

$D: \frac{225}{16} + 4 = \frac{225+16}{16} = \frac{241}{16}$

$tg\alpha_1 = \frac{-15 + \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha_2 = \frac{-15 - \sqrt{241}}{8}$

$\ast$ $tg 2\alpha = 0$

$tg^2\alpha = 1 \Rightarrow tg\alpha_3 = \pm 1$

$\ast$ $tg 2\alpha = -\frac{8}{15}$

$tg^2\alpha - \frac{15}{4} tg\alpha - 1 = 0$

$D = \frac{241}{16}$

$tg\alpha_4 = \frac{15 + \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha_5 = \frac{15 - \sqrt{241}}{8}$

Ответ:

$tg\alpha = \frac{15 + \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha = \frac{15 - \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha = \frac{-15 + \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha = \frac{-15 - \sqrt{241}}{8}$

$tg\alpha = 1$ $tg\alpha = -1$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$ Огр: $x^2+6x>0$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$ $x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$x^2+6x=t$; $t>0$

$3^{\log_4 t}+t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t \geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t^{\log_4 4}-t^{\log_4 5} \geq 0$

, где $t>0$ всегда больше нуля, а значит:

$t-\forall$

с уч. огр: $t>0$

$x^2+6x>0$

$x(x+6)>0$

$x_1=0$

$x_2=-6$

$+ \quad - \quad +$

$-6 \quad 0$

$x\in(-\infty;-6)\cup(0;+\infty)$

$3^{\log_4 t}+4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t}$

$f(t)=3^{\log_4 t}$ $g(t)=4^{\log_4 t}$ $k(t)=5^{\log_4 t}$

$f;g;k$ - монотон. возраст. ф-ии

при чем скорость роста $f(t)<g(t)$; $g(t)<k(t)$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$l(t) = g(t) + f(t)$, то $\tilde{l}'(t) = \tilde{g}(t) + \tilde{f}'(t)$

найдём при каких $\log_4 t$

$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} = 5^{\log_4 t}$ – данное равенство выполняется только при $\log_4 t = 2$

при $t = 3$:

$g(3) + f(3) = 27 + 64 = 91$

$k(3) = 125$

$\Rightarrow$ при $\log_4 t > 2$

$g(t) + f(t) < k(t)$

при $\log_4 t < 2$

$g(t) + f(t) > k(t)$

т.е.: $\log_4 t \le 2$

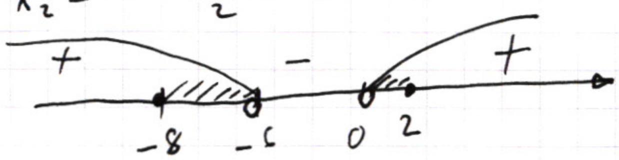
$t \le 4^2$

$x^2 + 6x - 16 \le 0$

$D: 4 \cdot 3^2 + 4 \cdot 16 = 4 \cdot 25$

$x_1 = \frac{-6 + 2 \cdot 5}{2} = 2$

$x_2 = \frac{-6 - 2 \cdot 5}{2} = -8$



$x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ: $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$$

$* \quad \begin{array}{r|l} 4x-3 & 2x-2 \\ -\ 4x-4 & 2 \\ \hline 1 & \end{array} \Rightarrow \frac{4x-3}{2x-2} = 2 + \frac{1}{2x-2} = y = g(x) \Rightarrow$ асимптоты: $x=1$; $y=2$

$* \quad 8x^2-34x+30 = y = f(x)$

$x_0 = -\frac{b}{2a} = \frac{34}{2\cdot 8} = \frac{17}{8} = 2{,}125$

$y_0 = \frac{17^2}{8} - \frac{2\cdot 17^2}{8} + 30 = 30 - \frac{17^2}{8} \approx -6$

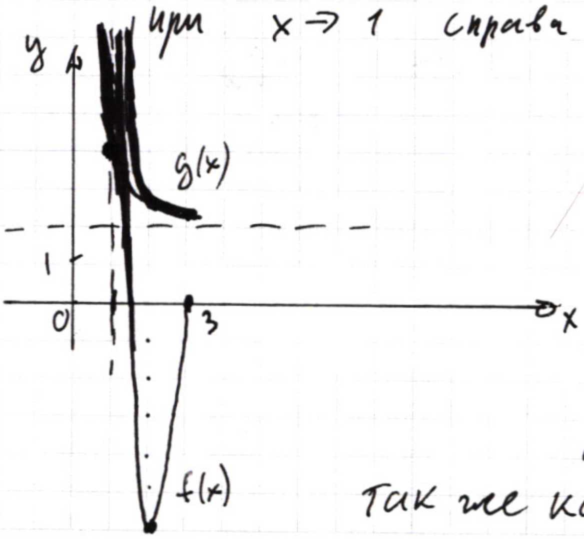
$f(-1) = 8+34+30 = 72$

$f(3) = 8\cdot 9 - 34\cdot 3 + 30 = 72 + 30 - 102 = 0$

т.к. мы рассматриваем x на промежутке $[-1;3]$ и асимптота гиперболы $x=1$, можно рассматривать только правую ветвь гиперболы.

$g(3) = 2 + \frac{1}{4} = 2{,}25$

при $x \to 1$ справа $y(x) \to \infty$



Надо найти такие прямые, углы наклона которых больше, чем у прямой, проходящей через точку $(1;72)$ и меньше, чем у прямой, проходящей через $(3;0)$ и так же касающейся гиперболы

I $y = ax + b$

$0 = 3a + b$

$2 + \frac{1}{2x-2} = ax + b$

$4x - 4 + 1 = (ax+b)(2x-2) \Rightarrow 4x - 3 = 2ax^2 - 2ax + 2bx - 2b$

$2ax^2 + (2b - 2a - 4)x + 3 - 2b = 0$

$2ax^2 - (8a+4)x + 3 + 6a = 0$

$D = (8a+4)^2 - 8a(3+6a) = 0$

$(8a+4)^2 = 8a(3+6a)$

$64a^2 + 64a + 16 = 24a + 48a^2$

$16a^2 + \cancel{64}\,40a + 16 = 0$

$\cancel{a^2 + 4a + 1 = 0}$

$D: 16 - 4 = 12$

$a_1 = \frac{-4+2\sqrt{3}}{2}$ ← не подходит, т.к. ~~...~~ прямая касается гиперб. правой ветви $\Rightarrow$ a − ~~min~~ минимален

$a_2 = \frac{-4-2\sqrt{3}}{2}$

$a = -2 - \sqrt{3}$

$2a^2 + 5 + 2 = 0$

$D: 25 - 4 \cdot 4 = 9$

$a_1 = \frac{-5+3}{4} = -\frac{1}{2}$ ← касание левой ветви

$a_2 = \frac{-5-3}{4} = -2$ ← касание правой ветви $\Rightarrow a_{max} = -2$

$b = 6$

II $72 = a + b \Rightarrow b = 72 - a$

$2 + \frac{1}{2x-2} = ax + b$

$2ax^2 + (2b - 2a - 4)x + 3 - 2b = 0$

$2ax^2 + (140 - 4a)x + 3 - 144 + 2a = 0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(x) = y = -2x + 6$

$* \; f(x_0) = f(1) = 4 \Rightarrow$ существует всего одна прямая, удовлетворяющая условию из задания

$a = -2$; $b = 6$

Ответ: $a = -2$; $b = 6$

№2

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases}$$

Огр: $3y - 2x \geq 0$

$3y - 2x = \sqrt{x(3y-2) - (3y-2)}$

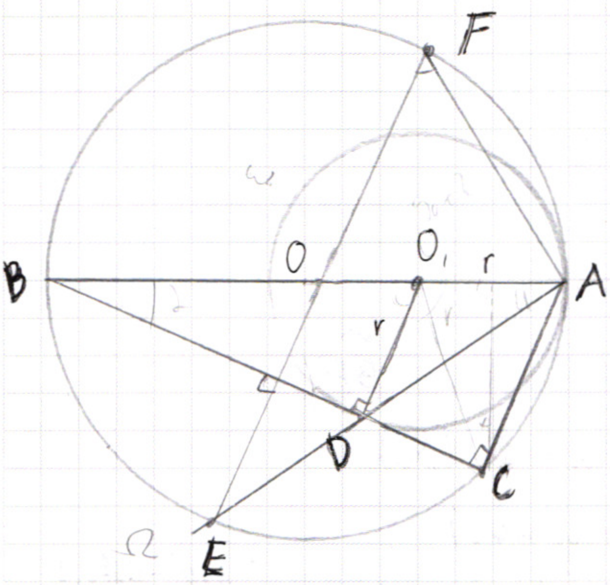
$(3y - 2x)^2 = (3y-2)(x-1)$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 4



$CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$ | BD - кас $\Rightarrow O_1D \perp BD$

по т. Пифа. в $\triangle\, BO_1D$:

$BO_1=\sqrt{BD^2+r^2}$

$BO_1 = 2R-r \qquad R>r \Rightarrow BO_1>0$

$\sqrt{BD^2+r^2}=2R-r$

$BD^2+r^2=4R^2-4Rr+r^2$

$\underbrace{r=R-\frac{DB^2}{4R}}$

-) BA - диаметр, $C\in\Omega$ $\Rightarrow \angle BCA=90^\circ$

-) К $\triangle\, BO_1D$ и BAC:

$\angle BDO_1=\angle BCA=90^\circ$

$\angle B$ - общ

$\Rightarrow \triangle BO_1D$ подобен $\triangle\, BAC$ $\Rightarrow \frac{BO_1}{BA}=\frac{BD}{BC}=\frac{13}{18}$

$BA=2R \qquad BO_1=2R-r$

$1-\frac{r}{2R}=\frac{13}{18}$

$r=2R\cdot\frac{18-13}{18}=R\cdot\frac{5}{18}$

$\frac{5}{18}R=R-\frac{DB^2}{4R}$

$$\frac{20}{18}R^2 = 4R^2 - \frac{169}{4}$$

$$\frac{169}{4} = \left(4 - \frac{20}{18}\right)R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{169 \cdot 18}{4 \cdot 52} = \frac{13^2 \cdot 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 26} = \frac{13 \cdot 3^2}{2 \cdot 2 \cdot 2}$$

$$\boxed{R = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{2}}}$$

$$\boxed{r = \frac{3}{2}\sqrt{\frac{13}{2}} \cdot \frac{5}{18} = \frac{5}{12}\sqrt{\frac{13}{2}}}$$

$\angle EFA = 180° - \angle ACE$

$\angle ACE = \angle ACB + \angle BCE$

$\angle ACB = 90°$ (т.к. опир. на диаметр)

$\angle BCE = \angle BAE$ (т.к. оба угла опир. на $\overset{\frown}{BE}$)

$\measuredangle\ \triangle ABC$: $\angle BO_1D = 90° - \alpha$ (где $\alpha = \angle ABC$)

$\angle AO_1D = 180° - \angle BO_1D$ (как смежные углы)

$\triangle DOA$ - ~~равност~~ равнобедр. (т.к. $DO = OA = r$) $\Rightarrow \angle O_1AD = \frac{180° - \angle AO_1D}{2}$

$$\angle BAE = \angle O_1AD = 90° - \frac{\angle AO_1D}{2} = 90° - 90° + \frac{\angle BO_1D}{2} = \frac{90° - \alpha}{2}$$

$\measuredangle\ \triangle BDO_1$: $\sin\alpha = \frac{r}{2R - r} = \frac{\frac{5}{12}k}{3k - \frac{5}{12}k} = \frac{5 \cdot 12}{12(36 - 5)} = \frac{5}{31}$

$\sqrt{\frac{13}{2}} = k$

$$\sin\alpha = \frac{5}{31}$$

$$\angle BAE = 45° - \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{31}$$

$$\angle AFE = 180° - 90° - \angle BAE = 90° - \angle BAE = 45° + \frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{31}$$

☐ черновик ☒ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

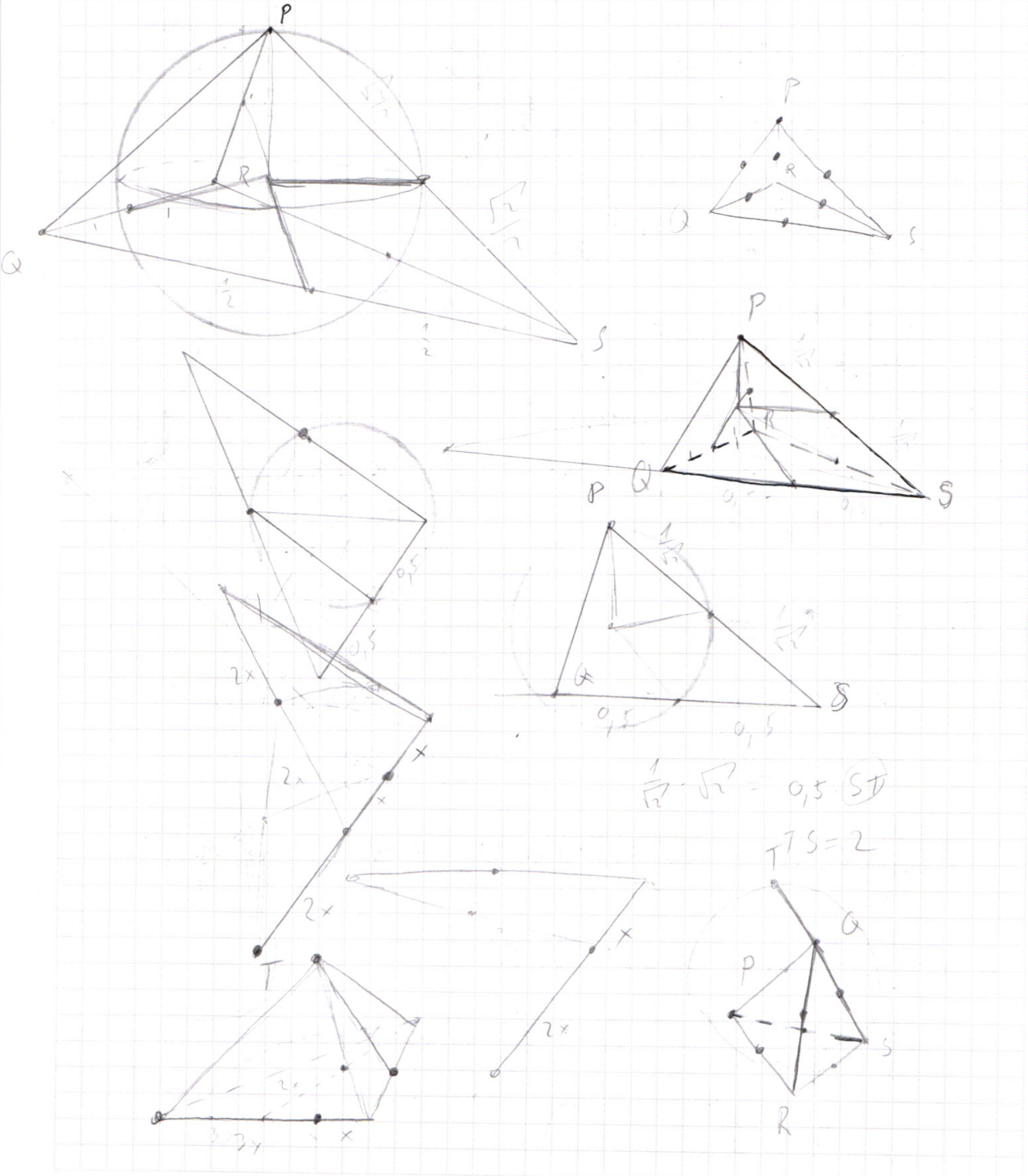
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$y = -2x + 6$

$y = 4$

$\log_4 3$ $\quad\log_4 4$

$\log_4 3 - 1$ $\quad \log_4 3 + \log \frac{4}{3}$

$\log_4 3 + \log \frac{5}{3}$

$t^{\log_4 4} - t^{\log_4 \frac{5}{3}} \geq 0$

$t^{\log_4 3} + \underbrace{t^{\log_4 4}} - t^{\log_4 3}\, t^{\log_4 \frac{5}{3}}$

$1 + t^{\log_4 \frac{4}{3}} - t^{\log_4 \frac{5}{3}} \geq 0$

$t + t^{\log_4 3} = t \cdot t^{\log_4 \frac{5}{4}}$

$t^{\log_4 3} + t^1 = t^{\log_4 5}$

$t = t^{\log_4 5} - t^{\log_4 3}$

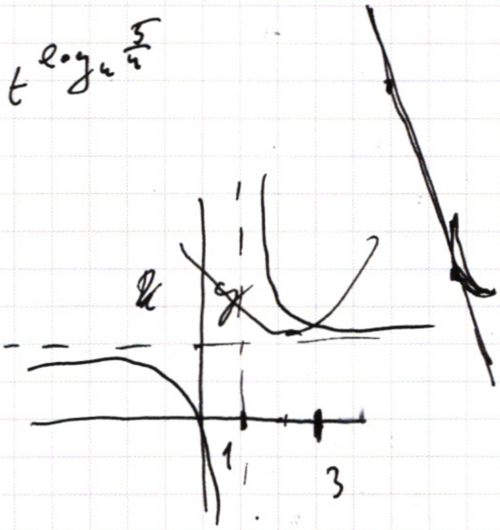
$3^{\log_4 t} + 4^{\log_4 t} = 5^{\log_4 t}$

$3^y + 4^y \geq 5^y$

$\begin{array}{r} \times 27 \\ 8 \\ \hline 216 \\ +\ 11 \\ \hline 376 \end{array}$

$\begin{array}{r} 17 \\ \times 17 \\ \hline 119 \\ +17 \\ \hline 289 \\ -24 \\ \hline 49 \\ -48 \\ \hline 1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 8 \\ \hline 36 \end{array}$

36



$(a^x)' = \frac{x'}{\cancel{x} \ln a}$

$f(a \cdot b) = f(a) + f(b)$ $\quad 3 \leq x; y \leq 27$

$f(p) = \left[\frac{p}{4}\right]$ $\quad f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30 = y$

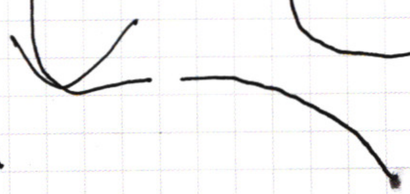
$\begin{array}{r} 4x-3 \\ -4x-4 \\ \hline 1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} 2x-2 \\ \hline 2 \end{array}$

$2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax + 1 \geq 8x^2 - 34x + 30$

$\frac{17^2}{8} - \frac{2 \cdot 17^2}{8} + 30$

$30 - \frac{17^2}{8}$

$\frac{34}{16} = \frac{17}{8}$



ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$2ax^2+(140-4a)x-141+2a=0$

$D: (140-4a)^2-8a(2a-141)=0$

$(140-4a)^2=8a(2a-141)$

$(70-2a)^2=2a(2a-141)$ $\quad 2a=k$

$70^2-140k+\cancel{k^2}=\cancel{k^2}-141k$

$k=-70^2$

$a=-\frac{70^2}{2} \Rightarrow a_{min}=-35\cdot 70=-2450 \Rightarrow$

$\Rightarrow b=+2522$

$y=-2450(x_0)+2522$ <3

$x_0=3$

$y=-2x+6=4<72$

$x=1$

это говорит о том, что не существует

$9y^2+4x^2+9xy+2x+3y+2$

$9y^2+12xy+4x^2=(3y-2)(x-1)$

$6y^2+12xy+x^2+6x+4y=-4+(3y-2)(x-1)$

$(3y+1)(3x+2)$

$9xy+6y^2+x^2+6x+4y+2x+3y+2=0$

$\underbrace{9xy}_{5x}+6y^2+x^2+8x+7y+2=0$

$3x(3y+1)+y+2(3y+1)$

$7y^2+x^2+5x$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$3x(x-2) + 3y(y-2) + 2y - 4 = 0$

$3x(x-2) + 3y(y-2) + 2(y-2) = 0$

$3x(x-2) + (y-2)(3y+2) = 0$

$9y^2 + 12x^2 + 4x^2$

$(3y-2x)^2 - 6y^2 - x^2 - 12xy - 6x - 4y - 4 = 0$

$(3y-2)(x-1) - (6y^2 + x^2 + 12xy + 6x + 4y + 4) = 0$

$\cancel{6y^2 + x(x-1) + 7x + 4y + 4 + 12xy}$

$\cancel{7x + 4y + 4 + 12xy - 12y + 12y}$

$\cancel{6y^2 + x(x-1)\ 7x + 4y + 4\ 12y(x-1) + 12y}$

$6y^2 + x^2 + 3xy + 9xy - 2x + 8x - 3y + 7y + 2 + 2$

$6y^2 + x^2 + 9xy + 8x + 7y + 2 + (3y-2)(x-1) = 6$

$x^2 + 8x + 9xy + 7y + 6y^2 + 2 = 0$

$3x(x-1) + 3x + 3y^2 - 4y = 4$

$3x(x-1) - 3x + y(3y-2) - 2y = 4$

$3x(x-1) + y(3y-2) - 3x - 2y = 4$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$$\begin{cases}\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}\end{cases}$$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta+1)+\sin 2\beta\cos 2\alpha\cdot 2\cdot\cos 2\beta=-\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot 2\cos^2 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha\cos 2\beta\cdot 2=-\frac{8}{17}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha)=-\frac{4}{17}$

$\cos 2\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\beta\in[-90;+90]$ $+2\pi$ $\quad \boxed{\cos\alpha\neq 0}$

$tg\,\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=$

$\sin 2\beta=\pm\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\ast$ $\sin 2\beta>0$:

$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin 2\alpha+\cos 2\alpha=-1$ $\quad |:\cos 2\alpha$

$4\,tg(2\alpha)+1=-\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$tg 2\alpha=\frac{2\,tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$

$tg 2\alpha-tg 2\alpha\, tg^2\alpha=2\,tg\alpha$

$tg^2\alpha+\frac{2}{tg 2\alpha}tg\alpha-1=0$

$\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta-1=\frac{2\cdot 16-17}{17}=\frac{15}{17}$

$\sin 4\beta=\pm\sqrt{\frac{17^2-15^2}{17^2}}=\pm\frac{\sqrt{2\cdot 32}}{17}=\pm\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha\cdot\frac{32}{17}\pm\cos 2\alpha\,\frac{8}{17}=-\frac{8}{17}$

$4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$ $\quad 4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha-1$

$\sin 2\alpha\cdot 4\pm\cos 2\alpha=-1$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$4\,tg\,2\alpha + 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$ $\qquad 1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$4\,\underbrace{tg\,2\alpha}_{k} + 1 = -\sqrt{1+tg^2\alpha}$ $\qquad \cancel{tg^2 = \frac{\sin^2}{\cos^2}} = \frac{1-\cos^2}{\cos^2}$

$16 k^2 + 8k + 1 = 1 + k^2$ $\qquad 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$15k^2 + 8k = 0$ $\qquad 4\,tg\,2\alpha - 1 = -\frac{1}{\cos 2\alpha}$

$k_1 = 0 \qquad k_2 = -\frac{8}{15}$

$-(4k+1) \geq 0 \Rightarrow k_1$ - не подх. k_2 - подх.

$18 \times 4 = 72$ $\qquad \frac{r}{BD} =$ $\qquad 16 \times 16$: $96 + 16 = 256$

241

$\times 13$ $\qquad 19 \times 8$ $\qquad 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 3 + 4 \cdot 4$

$0{,}5\ 32$ $\qquad 241 - 17 = 71$ $\qquad 4\sqrt{\left(\frac{5 \cdot 3}{4}\right)^2 + 1}$ $\qquad 13 \mid 7$

6

$180° - (90 - \alpha)$

$(90 + \alpha)$

$3y - 2x = \sqrt{x(3y-2) - (3y-2)}$

$3y - 2x = \sqrt{(3y-2)(x-1)}$ $\qquad 3y - 2x \geq 0$

~~...~~

$(3y-2x)^2 = (3y-2)(x-1)$ $\qquad 4 - 81$

$3x(x-1) - 3x + y(3y-2) - 2y = 4$ $\qquad 28 - 81$

$3x\frac{(3y-2x)^2}{(3y-2)} + y(3y-2) - 2y - 3x = 4$

$\angle EFA = 180° - \angle ACE$

$\angle ACE = 90° + \angle BCE = 90° + \angle BAE$

$\frac{r}{2R} = 1 - \frac{13}{28}$

$BO = \sqrt{BD^2 + r^2} = 2R - r$ $\qquad 1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{28}$

$BD^2 + r^2 = 4R^2 - 4Rr + r^2$

$\frac{26}{9}$ $\frac{62}{18}$ $R^2 - DB^2$ $\qquad r = \frac{4R^2 - DB^2}{4R} = R - \frac{DB^2}{4R}$ $\qquad 1 - \frac{13}{28} = \frac{r}{2R}$

$R = \frac{13}{2} \cdot \sqrt{\frac{9}{26}}$ $\qquad 13^2$ $\qquad \frac{15}{28} = \frac{r}{2R}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)