МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

+

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

+

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

+

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

+

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

+

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 2

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3y^2+3x^2-6x-4y=4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(3y-2)(x-1)} \\ 3(x-1)^2+3(y-\frac{2}{3})^2=\frac{25}{3} \end{cases} \quad \left(\begin{matrix} x-1=a \\ 3y-2=b \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} x=a+1 \\ y=\frac{b+2}{3} \end{matrix} \right)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

1) $ab\neq 0$.

$$b-2a=\sqrt{ab} \Rightarrow b^2-4ab+4a^2=ab \quad |:ab \Rightarrow \frac{b}{a}-4+\frac{4a}{b}=1.$$

$$\frac{b}{a}=t \Rightarrow t+\frac{4}{t}=5 \Rightarrow t^2-5t+4=0 \Rightarrow \left[\begin{matrix} t=4 \\ t=1 \end{matrix}\right. \Rightarrow \left[\begin{matrix} b=4a \\ b=a \end{matrix}\right.$$

$$b=4a \Rightarrow \begin{cases} 2a=\sqrt{4a^2} \\ a^2+16a^2=\frac{25}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a>0 \\ a^2=\frac{25}{9\cdot 17} \end{cases} \Rightarrow a=\frac{5}{3\sqrt{17}} \Rightarrow b=\frac{20}{3\sqrt{17}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=\frac{5+3\sqrt{17}}{3\sqrt{17}} \\ y=\frac{20+6\sqrt{17}}{9\sqrt{17}} \end{cases}, \text{ подт. удовл.}$$

$$b=a \Rightarrow \begin{cases} -a=\sqrt{a^2} \Rightarrow a<0 \\ 2a^2=\frac{25}{9} \Rightarrow a^2=\frac{25}{18} \end{cases} \Rightarrow a=-\frac{5}{3\sqrt{2}},\ b=-\frac{5}{3\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x=-\frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}} \\ y=-\frac{5-6\sqrt{2}}{9\sqrt{2}} \end{cases}, \text{ удовл.}$$

2) $ab=0 \Rightarrow b=2a$

$$ab=0 \Rightarrow \begin{cases} \left[\begin{matrix} a=0 \\ b=0 \end{matrix}\right. \\ b=2a \end{cases} \Rightarrow a=0=b \Rightarrow 0=\frac{25}{9} \Rightarrow \text{невозможно}$$

Ответ: $\left(\frac{5+3\sqrt{17}}{3\sqrt{17}}; \frac{20+6\sqrt{17}}{9\sqrt{17}}\right), \left(-\frac{5-3\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}; -\frac{5-6\sqrt{2}}{9\sqrt{2}}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$

$\log_a b \Rightarrow b>0 \Rightarrow x^2+6x>0$ $\quad x^2+6x=a.$, $\quad x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$t^{\log_c b}=b^{\log_c t}$

$\Rightarrow a^{\log_4 3}+a-a^{\log_4 5}\geq 0 \Rightarrow a^{\log_4 3}\left(1+a^{\log_4\frac{4}{3}}-a^{\log_4\frac{5}{3}}\right)\geq 0 \Rightarrow$

~~$a\left(a^{\log_4 3-1}-a^{\log_4 5-1}+1\right)\geq 0$~~

~~Возм. 3 случ. 1) $a>0 \Rightarrow b\leq 0$, 2) $a=0$, $b\in\mathbb{R}$, 3) $a<0$, $b\geq 0$~~

~~1) $a>0$~~

~~$a^{\log_4 3-1}-a^{\log_4 5-1}+1\leq 0$~~

~~$\log_4 3-1=\log_4\frac{3}{4}$ $\quad \Rightarrow a^{\log_4\frac{5}{4}}-a^{\log_4\frac{3}{4}}\geq 1$~~

~~$\log_4 5-1=\log_4\frac{5}{4}$ $\quad \log_4 1$ $\quad 1=a^0=a^{\log_4 1}$~~

$\Rightarrow$ 1)

$a>0 \Rightarrow a^{\log_4\frac{4}{3}}+1\geq a^{\log_4\frac{5}{3}} \Rightarrow \frac{4}{3}^{\log_4 a}+1\geq \frac{5}{3}^{\log_4 a}.$

$\Rightarrow \frac{5}{3}^{\log_4 a}-\frac{4}{3}^{\log_4 a}\leq 1$, 1 конст, а $f(x)=\frac{5}{3}^x-\frac{4}{3}^x$ возраст. функ.

$\Rightarrow f(x)=1$ 1 реш. $x=2 \Rightarrow f(x)=1$, $f(x)\uparrow \Rightarrow x\leq 2$ $f(x)\leq 1$

$\Rightarrow \log_4 a\leq 2 \Rightarrow a\leq 16$, $a>0 \Rightarrow$ $a\in(0;16]$

~~2)~~

$a\leq 0 \Rightarrow x^2+6x\leq 0 \Rightarrow$ невозм. т.к. $x^2+6x>0$.

$\Rightarrow x^2+6x\in(0;16]$

$\Rightarrow 9<(x+3)^2\leq 25 \Rightarrow \left[\begin{array}{l}3<(x+3)\leq 5\\ -5\leq x+3<-3\end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l}0<x\leq 2\\ -8\leq x<-6\end{array}\right. \Rightarrow$ Ответ: $[-8;-6)\cup(0,2]$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5|

$f(ab)=f(a)+f(b) \quad f: Q^+ \to R$

$f(p)=[\frac{p}{4}]$

$f(1\cdot b)=f(1)+f(b) \Rightarrow f(1)=0$

$f(2)=[0{,}5]=0 \Rightarrow f(2)=0.$

~~$f(1)=0, f(1)=0 \Rightarrow f(n)=0 \ \forall n\in N \ ((f(x)=0, f($~~

$\cancel{f(\frac{x}{n})}$ ч $f(k)=f(\frac{k}{n})+f(n) \ \forall k,n\in N$

$f(\frac{k}{n})<0 \Rightarrow f(k)<f(n)$, то есть мы должны найти

все пары (x,y) такие, чтобы $f(x)<f(y)$

$f(3)=[\frac{3}{4}]=0.$

$f(4)=f(2)+f(2)=0$

$f(5)=[\frac{5}{4}]=1.$ ~~[illegible]~~

$f(6)=f(2)+f(3)=0$

$f(7)=[\frac{7}{4}]=1.$

~~f(8)~~: $f(8)=0$, $f(9)=0$, $f(10)=1$, $f(11)=2$, $f(12)=0$, $f(13)=3$, $f(14)=1$,

$f(15)=1$, $f(16)=0$, $f(17)=4$, $f(18)=0$, $f(19)=4$, $f(20)=1$, $f(21)=1$,

$f(22)=2$, $f(23)=5$, $f(24)=0$, $f(25)=2$, $f(26)=3$, $f(27)=0$

$f(t)=0 \Rightarrow \exists\ 10\ t$

$f(t)=1 \Rightarrow \exists\ 7t.$

$f(t)=2 \Rightarrow \exists\ 3t$

$f(t)=3 \Rightarrow \exists\ 2t.$

$f(t)=4 \Rightarrow \exists\ 2t.$

$f(t)=5 \Rightarrow \exists\ 1t.$

$\Rightarrow$ колич. нужных пар будет

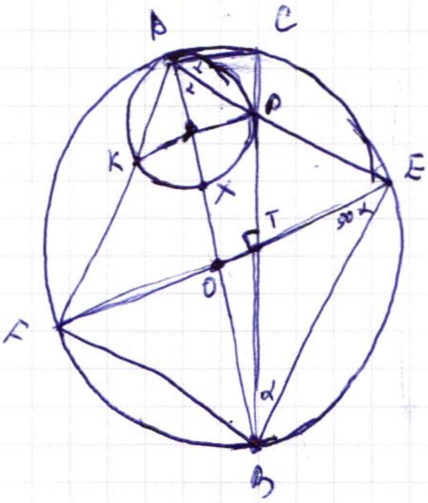
$10\cdot(15)+7(8)+3(5)+2\cdot(3)+2\cdot 1.$

$=150+56+15+6+2=229$

Ответ: 229

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 4)



$CD = \frac{5}{2} \Rightarrow BC = 9$

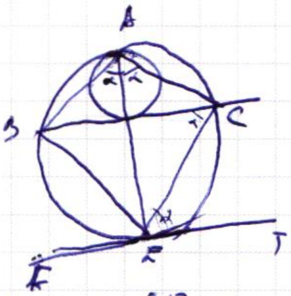
$BD = \frac{13}{2}$

$\angle AFE$ - ?.

2) R - ? ($r \to \omega$, $R \to \Omega$ радиус)

S_{AEF} - ?

Лемма Архимеда.



BC кас. ω

FT кас. Ω

$FT \parallel BC$

$\angle CET = \frac{\smile CE}{2} = \alpha$, $\angle BCE = \angle CET$ ($\parallel \Rightarrow$)

$\Rightarrow \angle BAE = \angle BCE = \angle CET = \angle EAC$

$\Rightarrow$ AE биссек. угла BC)

По лемме Архимеда

$\angle CAE = \angle BAE = \alpha$.

$\angle CBE = \angle CAE = \alpha$: ($\frac{\smile CE}{2}$)

$\angle FEB = 90 - \alpha$ (из ΔTEF)

$\Rightarrow \angle FAB = 90 - \alpha$

$\Rightarrow \angle FAE = 90 \Rightarrow FE$ диаметр

$\Rightarrow FE \cap AB = O$;

$\angle KAD = 90 \Rightarrow KD$ диаметр $\Rightarrow KD \perp CB$; $\Rightarrow KD \parallel FE$: Пусть $KD \cap AB = O_1$.

Т.к. $KD \parallel FE$, $EO = OE \Rightarrow KO_1 = DO_1 \Rightarrow O_1$ центр ω.

$BD^2 = BX \cdot BA$, $BX = 2R - 2r \Rightarrow (2R - 2r) \cdot 2R = \frac{169}{4}$.

AB диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90° \Rightarrow AC \parallel O_1D$: $\Rightarrow \frac{O_1D}{AC} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA}$

$\Rightarrow \frac{13}{18} = \frac{2R - r}{2R} \Rightarrow 26R = 36R - 18r \Rightarrow 18r = 10R \Rightarrow r = \frac{5}{9}R$.

$(2R - \frac{10}{9}R)2R = \frac{169}{4} \Rightarrow \frac{4}{3}R = \frac{13}{2} \Rightarrow R = \frac{39}{8} \Rightarrow r = \frac{195}{72} = \frac{65}{24}$.

$O_1D \parallel OE \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{AD}{AE} = \frac{5}{9}$, $AD \cdot DE = BD \cdot CD = \frac{65}{4}$. $AD = x$, $DE = y$.

$\Rightarrow \frac{x+y}{x} = \frac{9}{5} \Rightarrow \frac{y}{x} = \frac{4}{5}$, $xy = \frac{65}{4} \Rightarrow x \frac{4}{5} \cdot x = \frac{65}{4} \Rightarrow x^2 = \frac{25 \cdot 13}{16} \Rightarrow x = \frac{5}{4}\sqrt{13} \Rightarrow y = \sqrt{13}$

$\Rightarrow AE = x + y = \frac{9}{4}\sqrt{13}$; ~~$\cos\alpha = \frac{AE}{2R} = \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{8}{78} = \frac{18\sqrt{13}}{78}$~~ $\sin\alpha = \frac{O_1D}{AD} = \frac{65}{24} \cdot \frac{4}{5\sqrt{13}} = \frac{\sqrt{13}}{6}$.

$\Rightarrow \angle AEF = \angle EAO$ ($AO = OE$) $= \alpha \Rightarrow \angle AEF = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{13}}{6} + \pi k$.

$S_{AEF} = \frac{AE \cdot FE \cdot \sin\angle AEF}{2} = \frac{9}{4}\sqrt{13} \cdot \frac{78}{8} \cdot \frac{\sqrt{13}}{6 \cdot 2} = \frac{1521}{64}$.

Ответ: $r = \frac{65}{24}$, $\angle AEF = (-1)^k \arcsin\frac{\sqrt{13}}{6} + \pi k$, $R_\Omega = \frac{39}{8}$, $\frac{1521}{64} = S_{AEF}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 1)

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{8}{17}.$

$\Rightarrow \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\beta \Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\alpha+2\beta = 2\beta \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = 0} \\ 2\alpha+2\beta = \pi - 2\beta \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} - 2\beta \end{array}\right.$

$\sin\alpha = \sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\beta\right) = \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \underline{tg\,\alpha = -4}$

$\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\alpha+2\beta) + \sin 2\beta = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos\alpha = 0.$

$\cos\alpha = 0 \Rightarrow tg$ не опред $\Rightarrow \sin(\alpha+2\beta) = 0 \Rightarrow \alpha+2\beta = \pi k.$

$\Rightarrow \alpha = \pi k - 2\beta \Rightarrow \sin\alpha = \sin(\pi k - 2\beta) \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin\alpha = \sin 2\beta \\ \sin\alpha = -\sin 2\beta \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \alpha = 2\beta \\ \alpha = \pi - 2\beta \\ \alpha = -2\beta \\ \alpha = \pi + 2\beta \end{array}\right.$

~~$\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}} = \sin 2\beta,\ \cos\alpha = \cos$~~

1) $\sin\alpha = \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{1}{4}$

2) $\sin\alpha = \sin(\pi - 2\beta) = \frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

3) $\sin\alpha = \sin(-2\beta) = -\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

4) $\sin\alpha = \sin(\pi + 2\beta) = -\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\alpha = \cos(\pi + 2\beta) = -\cos 2\beta = -\frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow tg\,\alpha = -\frac{1}{4}$

Ответ: $\left(0, -4, \frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

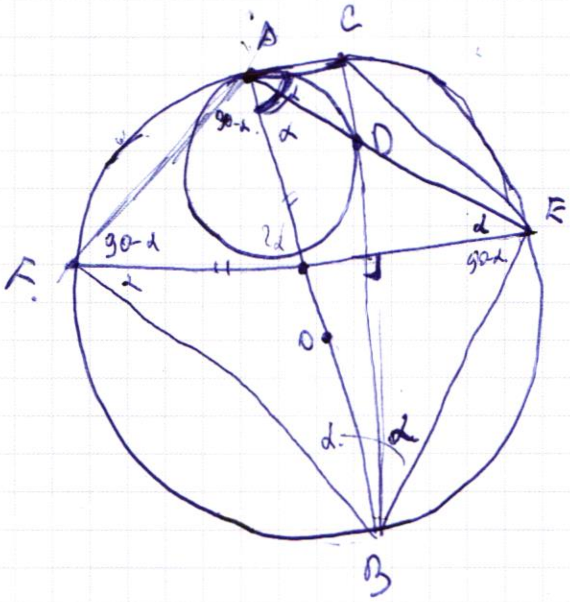
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \sin y \cos x$



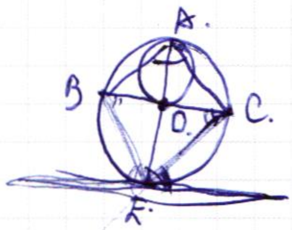
$CD = \frac{5}{2}$ $BD = \frac{13}{2}$

$BC = 9$

$2R - ?$

$\angle FKE - ?$

$S_{AKF} - ?$



$f(1) = 0$

$f(2) = 0$ $f(4) = 0$ $f(n) = 0$

$n \in N$

$f(3) = 0 \Rightarrow f(9) = 0$ $f(27) = 0$

$f(9)$

$f(x) = 0$

$f(5) = 1$

$f(7) = 1$

$(\frac{1}{3}, 9)$

$f(1) = 0$

$\Rightarrow$

$\cancel{f(1) = f(\frac{1}{n})}$

$f(12) =$ $\frac{x}{y}$ $f(\frac{1}{n}$

$f(K) = f(\frac{K}{n}) + f(n)$

$f(3) = f($

$\Rightarrow f(\frac{K}{n}) = 0$ $\forall K, n$

$f(x) = f(\frac{x}{}$

$\frac{x}{y}$ 9

$f(\frac{K}{n}) =$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

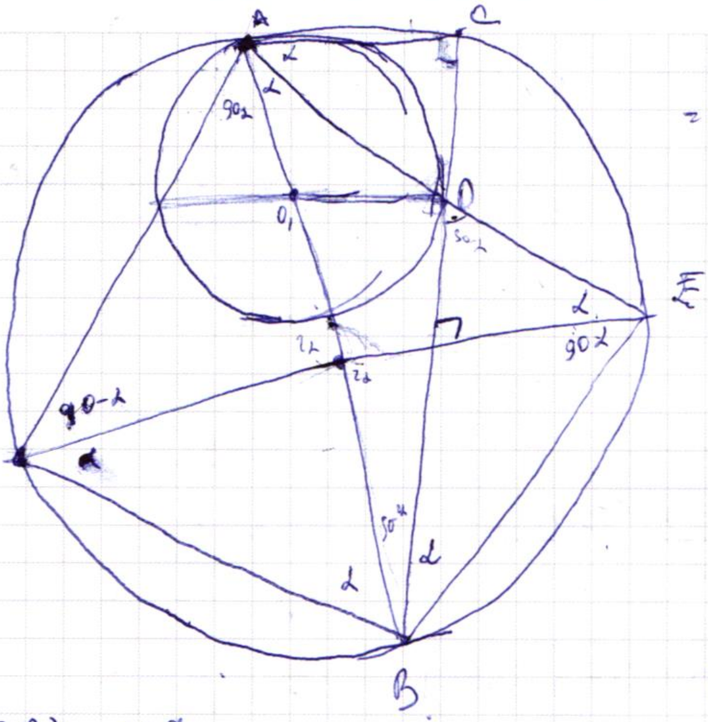
$\angle AFE$

z, R

S_{AFE}

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$



$\Rightarrow FE$?

$BC = 9$

$y = \frac{4}{5}$

$\frac{AD}{\sin 2\alpha} = \frac{z}{\sin\alpha}$

$(2R - 2z)(2R) = \frac{169}{4}$

$\sin\alpha =$

$\cos 2\alpha$

$9 \cdot 168$

$\frac{z}{R} = \frac{AD}{DE}$

$AD \cdot DE = \frac{65}{4}$

$\sin 2\alpha = \frac{9}{2R}$

$R \sin 2\alpha = \frac{9}{2}$

$\frac{65 \cdot 8}{24 \cdot 13} = \frac{5}{3}$

$3\sqrt{13}$

900

$+ 9 \cdot 10 - 9$

1521

$AD = \frac{65}{4DE}$

$\frac{AE}{\sin 2\alpha} = \frac{R}{\sin\alpha}$

$\frac{5}{3}$

$\frac{169}{4} + z^2 = (2R-2)^2$

$AE \sin\alpha = \frac{9}{2}$

$5 \cdot 39$

$\frac{169}{4} = 4R^2 - 4R$

19

$\frac{13}{18} = \frac{z}{AC} = \frac{2R-2}{2R}$

$\frac{x}{y} = \frac{4}{9}$

$\frac{x+y}{x} = \frac{9}{5}$

$1 + \frac{y}{x} =$

$\frac{x}{x+y} = \frac{5}{9}$

$5 \cdot 65$

13

$\frac{18}{9}$

$R6R = 36R - 18z$

$\frac{13}{8} \cdot \frac{5}{3}$

$\frac{65}{24}$

$\frac{8}{9}R$

$xy = \frac{65}{4}$

$\frac{16}{9}R^2 = \left(\frac{13}{2}\right)^2$

$18z = 10R$

$\frac{4}{3}R = \frac{13}{2}$

$1 + \frac{x}{y} = \frac{5}{9}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin(2\alpha+2B) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(x+\alpha) =$

$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha$

$\sin(2\alpha+4B) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$

$\sin(2\alpha+4B) + \sin 2\alpha$

$\sin(x \mp y) = \sin x \cos y \mp \sin y \cos x$

$\sin(x+y) = 2\sin x \cos y$

$\sin 2\alpha \cos 2\alpha + \sin 2B \cos 2B$

$\sin(2\alpha+2B) +$

$x - y = a$

$x + y = b$

$x = \frac{a+b}{2}$

$y = \frac{b-a}{2}$

$\sin a + \sin b = 2\sin\frac{a+b}{2}\cos\frac{b-a}{2}$

$\sin(2\alpha+4B) + \sin 2\alpha = 2\sin(2\alpha+2B)\cos 2B = -\frac{8}{17}$

$\mp\frac{2}{\sqrt{17}} \cdot x = \mp\frac{8}{17}$

$\alpha = \pi - 2B$

$\cos 2B = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$x = \frac{4}{\sqrt{17}}$

$\alpha + B = \pi - B$

$2\alpha + 2B = 2\pi - 2B$

$\Rightarrow \sin 2B = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

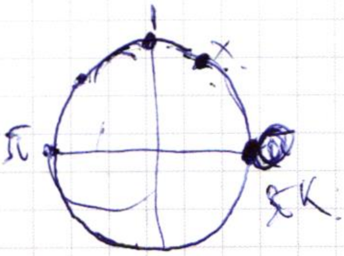
$\sin 2B = -\frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin(2\alpha + 2B) = \sin 2B \Rightarrow 2\alpha + 2B = 2B$

$\sin\alpha = 0$

$\sin 2\alpha \cos 2B + \sin 2B \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin$

$\sin\alpha = \sin$



$\sin\frac{\pi}{2} = 1$

$-\frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \frac{\sqrt{17}}{1}$

$\cos(\frac{\pi}{2} - 2B)$

$2\pi - \pi - 2B$

$\alpha = \frac{\pi}{2} - 2B$

$\sin x = 0$

$\sin(-2B)$

$\alpha + B = \frac{\pi}{2} - B$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

8 $\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b. \geq 8x^2-34x+30.$

$x=3$

$\Rightarrow \frac{9}{4} \geq 3a+b \geq 8\cdot 9-34\cdot 3+30.$ 72 $102-$

$\frac{9}{4}. \geq 3a+b \geq 0$ $2a+b+a \leq \frac{5}{2}+a.$

$x=2 \Rightarrow \frac{5}{2} \geq 2a+b. \geq. -6$

$4x-3$

□ черновик □ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \cancel{\ldots} -\frac{8}{17}$

$\sin x + \sin y =$

$20+6\sqrt{17}$

$-\left(\frac{5}{3\sqrt2}+1\right)$

$= -\frac{5+3\sqrt2}{3\sqrt2}$

$-\frac{5}{3\sqrt2}+1$

$= -\left(\frac{5}{3\sqrt2}-1\right) = \left(\frac{5-3\sqrt2}{3\sqrt2}\right)$

$\frac{425}{9\cdot17} = \frac{25}{9}$

$425 = 25\cdot17$

$16\cdot25>51$

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$3y(x-1) - 2(x-1)$

$-\left(\frac{5}{3\sqrt2}-2\right)$

$-\frac{5-6\sqrt2}{9\sqrt2}$

$-\frac{5}{3\sqrt5}$

$3y-2x = \sqrt{\underbrace{(x-1)}_{a}\underbrace{(3y-2)}_{b}}$

$\frac{b}{a} - 4 + \frac{4a}{b} = 1$

$\frac{b}{a} + \frac{4a}{b} = 5$

$x + \frac{4}{x} = 5$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y+\frac43 = \frac{?}{3}$

$x^2-5x+4=0$

$(x-4)(x-1)=0$

$x=4$

$x=1$

$\Rightarrow \frac{b}{a}=4 \quad (ab\neq0)$

$\frac{b}{a}=1$

$3\left(y^2-\frac43 y+\frac49\right)$

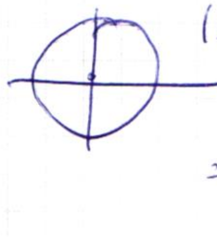
$2\cdot y\cdot\frac{4}{3}$

$\left(y-\frac23\right)^2$

2

$3((x^2-2x+1)+16$

$(x-1)^2+\left(y-\frac23\right)^2 = \frac{25}{9}$



$b>2a$

$3y=b+2$

$b+2$

$x=a+1$

$-2a-2$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ a^2+b^2=\frac{25}{9} \end{cases}$$

$3y=b+2$

$-2x=-2a-2$

$b^2-4ab+4a^2=ab$

$a^2+b^2=\frac{25}{9}$

$b=4a$

$b=a$

$b=$

$17a^2=\frac{25}{9}$

$a^2=\frac{25}{17\cdot9}$

$a=\frac{5}{3\sqrt{17}}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$\sin x + \sin y =$

$4^t = 3$ $4^1 = 4$ $4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$

$4^{-1} = \frac{1}{4}$

$\log_a \frac{x}{y}$

$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$\log_a x - \log_a y$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$(x^2+6x)^{\log_4 3} + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2$

$\log_4 3 - \log_4 5$

$= \log$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - (x^2+6x)^{\log_4 3}$

$\log_4 1 =$

$4^0 = 1$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)\left(\left((x^2+6x)\right.\right.$

$\log_4 x = 0$

$a \geq a\left(\left(a^{\log_4 5 - 1} - a^{\log_4 3 - 1}\right)\right)$

$1^0 = 1$

$\log_2 8 = 3$

$2^3 = 8$

$a^x - a^y - 1 \leq 0$

$0 \geq a\left(\underbrace{a^{\log_4 5 - 1} - a^{\log_4 3 - 1}}_{b<0} - 1\right)$

$a^{\log_4 3 - 1}$

$\Rightarrow a \geq 0 \Rightarrow b \leq 0$

$a = 0 \Rightarrow b \in \mathbb{R}$

$a < 0 \Rightarrow b \geq 0$

$a = 2^4$

$\log_4 4 = 1$

$\log_4 a = 2$

$a^{\log_4 3 - \log_4 4} =$

$4^2 =$

$a = \log_4 \frac{3}{4}$

$\underline{a^{\log_4 \frac{3}{4}}}\left(1 + \underline{a^{\log_4 \frac{4}{3}} - a^{\log_4 \frac{5}{3}}}\right) \geq 0$

$\log \frac{5}{4} - \log_4 \frac{3}{4} =$

$(x+3)^2 > 9$

$\frac{5}{3}^x - \frac{4}{3}^x \leq 1$

$x < -3$

$\log_4 \frac{3}{4}$

$\log_4 \frac{5}{3}$

x^2+6x

$-5 \leq x+3 < -3$

$5 \geq x+3 > 3$

$x+3$

$a^{\log_4 \frac{3}{4}}\Big($

$\left(a^{\log_4 \frac{5}{3}} - 1\right)$ $a \geq 1$

$x = 2 \Rightarrow \frac{16}{9} + 1 \geq \frac{25}{9}$

5

$\frac{5}{3} < 4 \Rightarrow \log_4 \frac{5}{3} < 1$

$\frac{16+9}{9}$ $4^{0,2}$

$\frac{4}{3}^x + 1 \geq \frac{5}{3}^x$

$x^2+6x+9 \in [9, 25]$

$25 \geq (x+3)^2 > 9$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)