

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ  
ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы  $\alpha$  и  $\beta$  удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \quad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения  $\operatorname{tg} \alpha$ , если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности  $\Omega$  и  $\omega$  касаются в точке  $A$  внутренним образом. Отрезок  $AB$  – диаметр большей окружности  $\Omega$ , а хорда  $BC$  окружности  $\Omega$  касается  $\omega$  в точке  $D$ . Луч  $AD$  повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $E$ . Прямая, проходящая через точку  $E$  перпендикулярно  $BC$ , повторно пересекает  $\Omega$  в точке  $F$ . Найдите радиусы окружностей, угол  $AFE$  и площадь треугольника  $AEF$ , если известно, что  $CD = \frac{5}{2}$ ,  $BD = \frac{13}{2}$ .

5. [5 баллов] Функция  $f$  определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел  $a$  и  $b$  из этого множества выполнено равенство  $f(ab) = f(a) + f(b)$ , и при этом  $f(p) = [p/4]$  для любого простого числа  $p$  ( $[x]$  обозначает наибольшее целое число, не превосходящее  $x$ ). Найдите количество пар натуральных чисел  $(x; y)$  таких, что  $3 \leq x \leq 27$ ,  $3 \leq y \leq 27$  и  $f(x/y) < 0$ .

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел  $(a; b)$  такие, что неравенство

$$\frac{4x - 3}{2x - 2} \geq ax + b \geq 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех  $x$  на промежутке  $(1; 3]$ .

7. [6 баллов] Дана пирамида  $PQRS$ , вершина  $P$  которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра  $PQ$ . Известно, что  $QR = 2$ ,  $QS = 1$ ,  $PS = \sqrt{2}$ . Найдите длину ребра  $RS$ . Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{aligned} & \text{3 } \log_4(x^2+6x) + 6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} - x^2 \quad \text{N 3} \\ & \text{3 } \log_4(x^2+6x) + x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5} \end{aligned}$$

Замени:  $x^2+6x = t$   
 $t > 0$

$$\begin{cases} \text{3 } \log_4 t + t \geq t^{\log_4 5} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{3 } \log_4 t + 4^{\log_4 t} \geq 5^{\log_4 t} \\ t > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 t} + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 t} \\ t > 0 \end{cases}$$

$f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\log_4 x} + 1$  - убывающая функция

$g(x) = \left(\frac{5}{4}\right)^{\log_4 x}$  - возрастающая функция. Знаем пересечение

они в одной точке  $t_1$ . Знаем если  $f(t) \geq g(t)$ , то  $\begin{cases} t > 0 \\ t \leq t_1 \end{cases}$

Иными словами  $t_1 = 16$

$t > 0$

$t \leq 16$

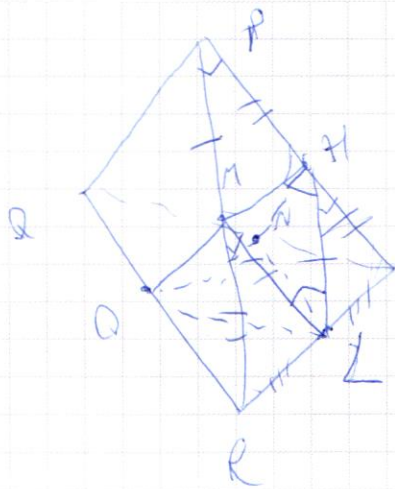
п.о.

$$\begin{cases} x^2+6x > 0 \\ x^2+6x-16 \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x(x+6) > 0 \\ (x+8)(x-2) \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in (-\infty; -6) \cup (0; +\infty) \\ x \in [-8; 2] \end{cases}$$

$\Rightarrow x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

Ответ:  $x \in [-8; -6) \cup (0; 2]$

N 6



Дано:  
 $QR \perp L$   
 $QS \perp L$   
 $PS \perp L$   
 Найти:  $RS$

Решение

т.к.  $MH, HL, ML$  - средние линии то  $\triangle MHL = \triangle MPH$  и  $MPL$  - параллелограмм (по св-ву средних линий)

т.к.  $M, P, H, L$  принадлежат одной сфере, то и лежат в одной плоскости, то  $MPL$  - вписанный четырехугольник.

т.к.  $MPL$  <sup>вписанный</sup> параллелограмм, то  $MPL$  - прямоугольник.

Доказано по св-ву

$MH \parallel RS$ (средняя линия)	$\Rightarrow$	$MH \parallel RN$	$\Rightarrow$	$MHN$ - параллелограмм.	
$QN \parallel RS$ (средняя линия)					
$MQ \parallel RP$ (средняя линия)		$\Rightarrow$			$MQ \parallel NH$
$MN \parallel PQ$ (средняя линия)					

$MHN$  принадлежит сфере,  $MHN$  параллелограмм  $\Rightarrow$

$MHN$  - прямоугольник

$MPL$  - прямоугольник  $\Rightarrow \angle RPS = 90^\circ$

### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$n \in \mathbb{N}$

$f(2) = \left[ \frac{2}{2} \right] = 0$   $3 \leq x, y \leq 27$   
 $2, 4 \in \mathbb{N}$

$f(2) = f(1) + f(2) \Leftrightarrow 0 = f(1) + 0 \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = 0 \Leftrightarrow f(0) + f\left(\frac{1}{0}\right) = 0 \Rightarrow f(0) = -f\left(\frac{1}{0}\right)$

$f\left(\frac{k}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) \Leftrightarrow f(x) - f(y) < 0 \Leftrightarrow f(y) > f(x)$

$f(2^a) = n \cdot f(2) + f(0) = f(0)$   
 $f(3^a) = n \cdot f(3) + f(0) = f(0)$

$f(n) = k_1 \left[ \frac{p_1}{q_1} \right] + k_2 \left[ \frac{p_2}{q_2} \right] + \dots$

~~Значения не вычисляются по формуле [3; 27]~~

Итого: ~~число делителей~~ ~~наименьшее значение x;~~ ~~числа 5, 7, 10, 11, 15, 14, 15, 17, 19;~~

$$\begin{aligned} f(5^a) &= n \cdot f(5) + f(0) = n + f(0) \\ f(7^a) &= n \cdot f(7) + f(0) = n + f(0) \\ f(11^a) &= 2n + f(0) & f(19^a) &= 4n + f(0) \\ f(17^a) &= 3n + f(0) & f(23^a) &= 5n + f(0) \\ f(177^a) &= 4n + f(0) \end{aligned}$$

$a:$	<del>2</del>	<del>4</del>	5	6	7	8	9											
$f(a)$	0	5	7	10	11	13	14	15	17	19	20	21	22	23	25	26		
$f(a)$ :		1	1	1	2	3	1	1	4	4	1	1	2	5	2	3		

Остальные значения  $f(a)$  при  $a \in [3; 27]$  равны 0.

$\Gamma$  - количество пар  $x, y$

$\Gamma = 7 \cdot 10 + 2 \cdot 17 + 2 \cdot 20 + 2 \cdot 22 + 24 \cdot 1 = 70 + 57 + 40 + 44 + 24 = 170 + 60 + 57 = 227$

Итого:  $f(a) < 1$   $f(a) > 3$   $f(a) < 5$

Ответ: 229.



## ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \geq 8x^2-34x+30$

$8x^2-34x+30$  - парабола

$ax+b$  - прямая

$2x-2 = 2(x-1)$

$4x-3 = 4(x-1) + 1$

$ax+b = a(x-1) + (a+b)$

прямая функция выше  
выше параболы, значит

$f(1) \geq g(1) \Rightarrow \begin{cases} a+b \geq 4 \\ 3a+b \geq 0 \end{cases}$

$f(3) \geq g(3) \Rightarrow \begin{cases} 3a+b \geq 0 \end{cases}$

$g'(x) = \frac{4x-3}{2x-2}$

$g'(x) = 2 + \frac{1}{2(x-1)}$  - монотонно убывает

$g'(1) = \frac{1}{0} = \infty$

$g'(3) = 2 + \frac{1}{2(3-1)} = 2 + \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$

$f'(x) = a$

$f(x) = a(x-x_0) + f(x_0) + f(x_0) - f(x_0)$

$f(x) = a(x-1) + a+b$

$f(x) = ax+b$

$\frac{4x-3}{2x-2} \geq ax+b \Leftrightarrow 4x-3 \geq (ax+b)(2x-2) \Leftrightarrow 4x-3 \geq 2ax^2 + 2ab - 2ax - 2b \Leftrightarrow$

$2ax^2 + (2b-4)x + 2b-4x-3 \leq 0$

$g'(x) = \frac{1}{2(x-1)} \cdot 2 \cdot 2 = -\frac{1}{2(x-1)^2}$

$g(x) = \frac{4(x-x_0)}{2(x_0-1)^2} + 2 + \frac{1}{2(x_0-1)} = \frac{4}{2(x_0-1)^2}x + \frac{2x_0}{2(x_0-1)^2} + \frac{1}{2(x_0-1)} + 2 =$

$= \frac{1}{2(x_0-1)^2}x + \frac{2x_0-1}{2(x_0-1)^2} + 2$   $\frac{2x_0-1}{2(x_0-1)^2} + 2 = 6$

Множество прямых делят плоскость на три области

$$f(x) = y(x) \begin{cases} f(3) = g'(3) \\ g'(3) < f'(3) \\ f(3) < g'(3) \\ f(x) \neq g'(x) \end{cases} \begin{cases} f(3) = g'(3) \text{ (Т)} \\ g'(3) < f'(3) \\ f(3) < g'(3) \\ f(x) = g'(x) - \text{длина касательной} \end{cases}$$

$$\begin{cases} a + b = \frac{9}{4} \\ a > -\frac{1}{3} \\ 3a + b = \frac{9}{4} \\ ax + b = 2 + \frac{1}{2(x-7)} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (1) \quad ax + b &= 2 + \frac{1}{2(x-7)} \Rightarrow 4x - 5 = 2ax + (2b - 2a)x - 2(7-a) \\ &\Rightarrow 2ax + (2b - 2a - 4)x - 2(6 - 2a) - 2 = 0 \\ &\Rightarrow (b - a - 2)^2 + (2b + 3)2a = 0 \\ &\Rightarrow (7 - a)^2 + 4 = 2a(6 + 4a - 4b + 4a) + 4b + ca = 0 \\ &a^2 + b^2 + 4ab + 4a - 4b + 6a + 4b = 0 \end{aligned}$$

и.о.  $\begin{cases} a > -\frac{1}{3} \\ b < \frac{1}{3} - 3a \\ a^2 + b^2 + 4ab + 4a - 4b + 6a + 4b = 0 \end{cases}$

$$\begin{cases} 34 - 2x = \sqrt{34(x-7) - 2(x-7)} \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 34 - 2x = \sqrt{34(x-7) - 2(x-7)} \\ x^2 - 2x + 4^2 - \frac{4}{3}y = 4 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 34 - 2x = \sqrt{34 - 2(x-7)} \\ (x-7)^2 + (4 - \frac{2}{3})^2 = \frac{49}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (34 - 2x)^2 = 3(4 - \frac{2}{3})(x-7) \\ (x-7)^2 + (4 - \frac{2}{3})^2 = \frac{49}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2(4 - \frac{2}{3})(x-7) = 26(4 - \frac{2}{3})^2 \\ (x-7)^2 + (4 - \frac{2}{3})^2 = \frac{49}{9} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x + 4 - \frac{5}{3})^2 = \frac{49}{9} + 8(4 - \frac{2}{3})^2 \\ (x-7)^2 + (4 - \frac{2}{3})^2 = \frac{49}{9} \end{cases}$$

$$\Rightarrow (x + 4 - \frac{5}{3})^2 = \frac{x^2 + 4^2 + \frac{25}{9} + 2x4 - \frac{10}{3}x - \frac{20}{3}x}{9} = \frac{x^2 + 16x + \frac{25}{9} - \frac{10}{3}x - \frac{20}{3}x}{9} = \frac{x^2 + 16x + \frac{25}{9} - \frac{30}{3}x}{9} = \frac{x^2 + 16x + \frac{25}{9} - 10x}{9} = \frac{x^2 + 6x + \frac{25}{9}}{9}$$

$$\Rightarrow 5x^2 - \frac{8}{3}x + \frac{24}{9} + \frac{10}{3}(x+4)$$

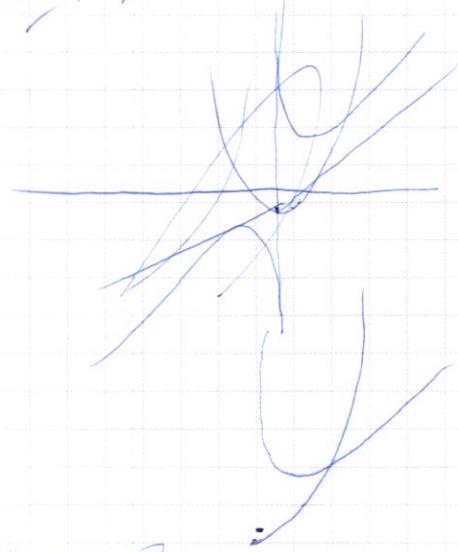
### ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Handwritten mathematical work on grid paper. The work includes:

- Number sequences:  $9, 10, 15, 20, 25, 30, 34, 37$  and  $7, 11, 13, 17, 19, 23$ .
- Equations:  $f(x) = f$ ,  $f(7) = f(0) + f(\frac{1}{8}) = 0$ ,  $f(0) + f(\frac{7}{8}) = 0$ ,  $2 + \frac{1}{2x-2} \geq ax + b \geq px - 3m + y$ .
- Algebraic manipulations:  $\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 2$ ,  $\frac{1}{9} \leq \frac{x}{4} \leq 9$ ,  $2 + \frac{1}{2(x-1)}$ .
- Graphs: A coordinate system with a curve and lines, and a 3D diagram of a tetrahedron.
- Geometric diagrams: A triangle with internal lines and a 3D diagram of a tetrahedron.
- Equations for a quadratic:  $ax + b \geq \frac{4x-3}{2x-2} \Leftrightarrow px - 3m + y$ ,  $ax + b \geq \frac{4x-3}{2x-2}$ ,  $ax + b \geq \frac{4x-3}{2x-2} \Leftrightarrow px - 3m + y$ .
- Discriminant calculation:  $(34+a)^2 - 32(30-b) \geq 0$ .
- Final equation:  $f(a, b, c) = f(0) + f(b) + f(c) + f(d)$ .



logarithms, separable



$$2 \sin 2\alpha \cos \frac{2\beta}{\sqrt{7}} + 2 \sin 2\alpha \cos 2\beta - \sin 2\alpha + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 4\beta \cos 2\alpha + \sin 4\beta \cos 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha + 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\sin 2\alpha + 2\beta$$

$$\sin 2\alpha$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$$

$$\frac{\cos 2\beta}{\sqrt{7}} - \cos 2\alpha + \sin 4\beta \sin 2\alpha$$

$$\log_4 x + \log_4 y \geq \log_4 z$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^k$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^k$$

$$\left(\frac{3}{4}\right)^k + 1 \geq \left(\frac{5}{4}\right)^k$$

$$\sin 2\alpha + \cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$\frac{9}{75} + \frac{16}{75} \geq \frac{25}{75}$$

$$x^2 + 4x - 26 \leq 0$$

$$k \leq 2$$

$$x \leq 1$$

$$x \geq 0$$

g.2

$$x^2 + 4x - 26 \leq 0$$

$$x \in (-6; 2)$$

$$x \in (-6; 2)$$

$$x \in (-6; 2)$$

$$\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\alpha \cos 2\beta$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}}$$

$$9y^2 - 12xy + x^2 = (3y-2)^2 = (3y-1)(y-1)$$

$$\sin 2\alpha = \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{\cos 2\beta}{\sqrt{7}} - \sin 2\alpha \cos 2\beta$$

$$x = 3y - 3$$

$$9y^2 - 12xy + x^2 = 9y^2 - 24y + 2x - 34y + 2x - 16$$

$$9y(3y+1) + 2x(2y+1) - 150y^2$$

$$= 9y^2 - 150y + 40x + 2x + 34y + 2$$



