Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата		

МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6},\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1) $\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$; $\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad tg\,\alpha - ?$

$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha \cos 4\beta + \cos 2\alpha \sin 4\beta + \sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta - 1 + 1) + 2\cos 2\alpha \sin 2\beta \cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha \cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta \cdot \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\alpha = \sin(2\alpha + 2\beta - 2\beta) \underset{+2\pi l}{=} \sin\left(-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}_{+2\pi z} - \arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) =$

$= -\left(\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right) + \sin\left(\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cos\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\right) =$

$= -\left(\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \frac{1}{\sqrt{17}} \pm \left(\sqrt{1-\frac{1}{17}}\right)^2\right) = -\frac{1}{17} \pm \left(1 - \frac{1}{17}\right) = -1 \Rightarrow 2\alpha = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$

$\alpha = -\frac{\pi}{4} + \pi n, k \in Z$

$\boxed{tg\,\alpha = -1}$

или $\sin 2\alpha = -\frac{15}{17}$

$\cos 2\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2 2\alpha} = \pm\sqrt{\frac{289-225}{289}} = \pm\frac{8}{17}$

При $\cos 2\alpha = \frac{8}{17}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{17-8}{2\cdot 17}} = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \pm\sqrt{\frac{17+8}{2\cdot 17}} = \pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

$tg\,\alpha = \frac{\pm\frac{3}{\sqrt{34}}}{\pm\frac{5}{\sqrt{34}}} = \pm 0.6$

При $\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{5}{\sqrt{34}}$

$\cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{1+\cos 2\alpha}{2}} = \pm\frac{3}{\sqrt{34}}$

$tg\,\alpha = \frac{\pm\frac{5}{\sqrt{34}}}{\pm\frac{3}{\sqrt{34}}} = \pm\frac{5}{3}$

Ответ: -1; ± 0.6; $\pm\frac{5}{3}$

☐ черновик ☑ чистовик

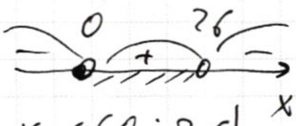
(Поставьте галочку в нужном поле)

(Нумеровать только чистовики)

~3) $|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

Решаем методом интервалов:



$x\in(0;26)$

т.к. $26x-x^2>0$, то $|x^2-26x|=26x-x^2$

$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26-x^2 \geq (26-x^2)^{\log_5 13}$

Замена: $26x-x^2=t$, $t>0$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$t^{\log_5 12}+t-t^{\log_5 13}\geq 0$

Разделим на t т.к. $t>0$

$t^{\log_5 2.4}+1-t^{\log_5 2.6}\geq 0$

Пусть $f(t)=t^{\log_5 2.4}+1-t^{\log_5 2.6}$, $t>0$

$f'(t)=\log_5 2.4\cdot t^{\log_5\frac{12}{25}}-\log_5 2.6\cdot t^{\log_5\frac{13}{25}}$, $t>0$

Найдем крит. точки решив ур-ние

$\log_5 2.4\cdot t^{\log_5\frac{12}{25}}-\log_5 2.6\cdot t^{\log_5\frac{13}{25}}=0$

Разделим на $t^{\log_5\frac{13}{25}}$ т.к. $t>0$

$\log_5 2.4\cdot t^{\log_5\frac{12}{13}}-\log_5 2.6=0$

$t^{\log_5\frac{12}{13}}=\frac{\log_5 2.6}{\log_5 2.4}$

Прологарифмируем по осн 5

$\left.\begin{matrix}2.6>2.4\\ 2.4>1\end{matrix}\right| \Rightarrow \log_{2.4}2.6>1$

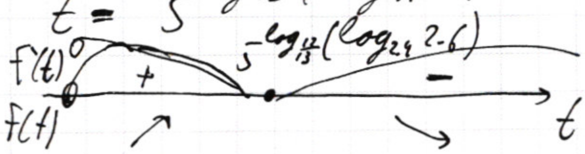
$\log_5 t\cdot\log_5\frac{12}{13}=\log_5(\log_{2.4}2.6)$

$\log_5 t=\log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)$

$\left.\begin{matrix}\frac{12}{13}<1\\ \log_{2.4}2.6>1\end{matrix}\right| \Rightarrow \log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)<1$

$t=5^{\log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)}$

т.е $5^{\log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)}\in(0;1)$



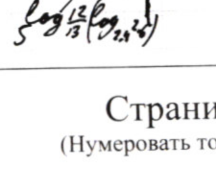
знач при $t\in(0;5^{\log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)})$

$\lim\limits_{t\to0}f(t)=\lim\limits_{t\to0}\left(t^{\log_5 2.4}+1-t^{\log_5 2.6}\right)=0+1-0=1$, ~~значит~~ $f(x)>1>0$

заметим, что при $t=25>5^{\log_{\frac{12}{13}}(\log_{2.4}2.6)}$ $t^{\log_5 2.4}+1-t^{\log_5 2.6}=$

$=2.4^2-2.6^2+1=-0.2\cdot5+1=0$, значит $f(t)\geq0$, при $t\in[0;25]$

$\begin{cases}26x-x^2\leq 25\\ 26x-x^2>0\end{cases}$



$x^2-26x+25\geq0$

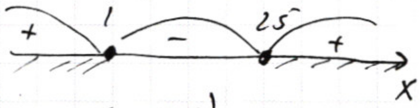
ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3) Решаем методом интервалов

$x^2-26x+25=0$

$D = 26^2 - 4\cdot 25 = (26-10)(26+10) = 4^2\cdot 6^2 = 24^2$

$x_1 = \frac{26-24}{2} = 1;\quad x_2 = \frac{26+24}{2} = 25$



$x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty)$

$\begin{cases} x \in (0, 26) \\ x \in (-\infty; 1] \cup [25; +\infty) \end{cases} \Rightarrow x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

Ответ: $x \in (0; 1] \cup [25; 26)$

№5) $f(1) = f(1) + f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(1) = f(a) + f\left(\frac{1}{a}\right) \Rightarrow f(a) = -f\left(\frac{1}{a}\right)$

Среди пар $(x; y)$, где $x \neq y$ найдется симметричная ей пара $(y; x)$, которая будет иметь противоположный знак, тогда всего количество нужных пар будет равно половине от количества пар различных чисел

т.е $\frac{25\cdot 24}{2!} : 2 = 25\cdot 6 = 150$

Ответ: 150

№6) $\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28 \qquad x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

Пусть $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4+4-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2,\ x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$\lim\limits_{x \to \frac{2}{3}+0} f(x) = \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}+0} \frac{4}{3x-2} - 2 = +\infty \Rightarrow x = \frac{2}{3}$ — вертикальная асимптота

$f'(x) = \frac{-12}{(3x-2)^2} < 0$ при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right] \Rightarrow f(x)$ - убывает при $x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

Пусть $g(x) = 18x^2 - 51x + 28,\ x \in \left(\frac{2}{3}; 2\right]$

$g'(x) = 36x - 51,\ x \in (\frac{2}{3}; 2] \Rightarrow g(x)$ - убыв при $x \in (\frac{2}{3}; \frac{17}{12}]$

$g(x)$ - возр при $x \in [\frac{17}{12}; 2]$

т.к. $g''(x) = 36 > 0$, то $g(x)$ - выпукла вниз, значит чтобы $ax + b \geq g(x)$ $x \in (\frac{2}{3}; \frac{17}{12}]$

нужно чтобы $\frac{2a}{3} + b \geq \lim\limits_{x \to \frac{2}{3}} g(x)$ и $2a + b \geq g(2)$

$\frac{2}{3}a + b \geq 8 - 34 + 28 = 2$; $2a + b \geq 4 \cdot 18 - 2 \cdot 51 + 28 = -2$

тогда все пары a и b должны быть такими, что при $x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$ax + b > a_0x + b_0$, где $\begin{cases} \frac{2}{3}a_0 + b_0 = 2 \\ 2a_0 + b_0 = -2 \end{cases} \Rightarrow a_0 = -3;\ b_0 = 4$

Найдем ~~наименьшее~~ такое b, что $ax + b$ касается $f(x)$ и $a = -3$

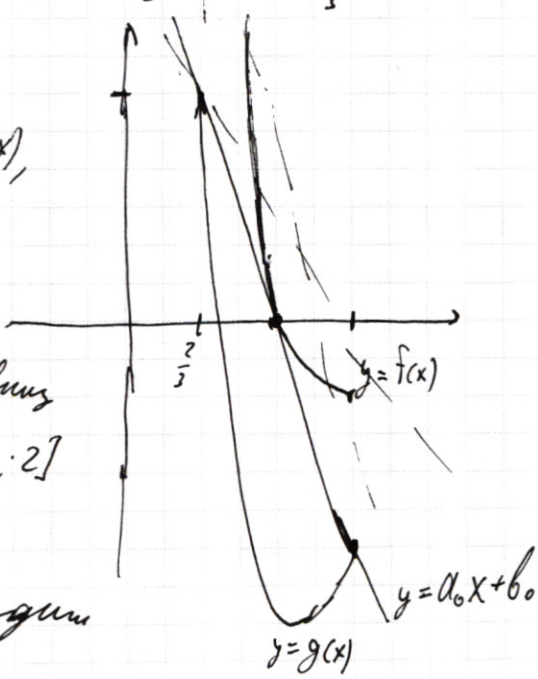
$f'(x) = -3$

$y = (3x-2)^2$

$3x - 2 = 2 \qquad 3x - 2 = -2$

$x = \frac{4}{3} \qquad x = 0 \notin (\frac{2}{3}; 2]$

$f(\frac{4}{3}) = \frac{4}{3 \cdot \frac{4}{3} - 2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0 \Rightarrow b = 0 - a \cdot \frac{4}{3} = 0 + 3 \cdot \frac{4}{3} = 4 = b_0$



значит т.к. при ~~минимальных~~ a_0 и b_0 прямая $y = a_0x + b_0$ касается $y = f(x)$, то любая другая прямая $y = ax + b$ такая что $a > a_0$ или $b > b_0$ будет пересекать $y = f(x)$ т.к. $f(x)$ - выпуклая вниз а значит не при всех значениях $x \in (\frac{2}{3}; 2]$ будет выполнятся нер-во $f(x) \geq ax + b \geq g(x)$, значит подходит только 1 пара: $a = -3$; $b = 4$

Ответ: $(-3; 4)$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4) Дано: окр Ω кас окр ω в т. A; O_1-центр ω

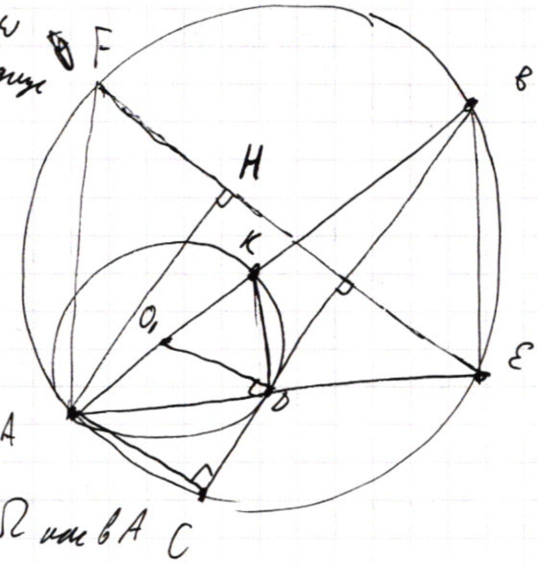
AB-диаметр Ω; O-центр Ω; R-радиус Ω; r-радиус ω

BC-хорда Ω; BC-кас ω в т D

$AD \cap \Omega = E$; EF-хорда Ω

$EF \perp BC$; $CD=12$; $BD=13$

Найти: R; r; $\angle AFE$; S_{AEF}



Решение:

1) Пусть $AB \cap \omega = K$, тогда т.к. ω и Ω кас в A и AB-диаметр Ω, то AK-диаметр ω, а значит $O_1 \in AK$, $O \in AB$

2) AB-диаметр, тогда $\angle ACB = 90^\circ$

$\angle ACB = 90^\circ = \angle O_1DB$; $\angle ABC$-общий $\Rightarrow \triangle ACB \sim \triangle O_1DB$

$\frac{13}{25} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_1}{BA} = \frac{BA-O_1A}{BA} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 26R = 50R - 25r \Rightarrow r = \frac{24}{25}R$

3) BD-кас к ω; AB-секущая к $\omega \Rightarrow AK \cdot AB = BD^2$

$2R \cdot (2R-2r) = 169 \Rightarrow 2R \cdot \frac{50-48}{25} R = 169 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{169 \cdot 25}{4}} = \frac{13 \cdot 5}{2} = \frac{65}{2}$

$r = \frac{24}{25}R = \frac{24 \cdot 65}{25 \cdot 2} = \frac{156}{5}$

4) $\cos \angle BO_1D = \frac{O_1D}{BO_1} = \frac{r}{2R-r} = \frac{\frac{156}{5}}{2 \cdot \frac{65}{2} - \frac{156}{5}} = \frac{156}{5 \cdot 65 - 156} = \frac{156}{325-156} = \frac{156}{169} = \frac{12}{13}$

Рассм $\triangle O_1KD$: $KD^2 = O_1K^2 + O_1D^2 - 2O_1K \cdot O_1D \cos \angle KO_1D = 2r^2 - 2r^2 \cos \angle BO_1D =$

$= 2r^2(1-\cos\angle BO_1D) = 2 \cdot \frac{12^2 \cdot 13^2}{25} \cdot \frac{1}{13} = \frac{2 \cdot 12^2 \cdot 13}{5^2} \Rightarrow KD = \frac{12}{5}\sqrt{26}$

5) AK-диаметр $\omega \Rightarrow \angle ADK = 90^\circ$ и $\sin \angle KAD = \frac{KD}{2r} = \frac{\frac{12}{5}\sqrt{26}}{\frac{12 \cdot 13}{5}} = \sqrt{\frac{2}{13}}$

6) $\angle AFE = \frac{1}{2} \smile AE = \frac{1}{2}(180^\circ - \smile BE) = 90^\circ - \angle BAE = 90^\circ - \arcsin\sqrt{\frac{2}{13}} = \arccos\sqrt{\frac{2}{13}}$

7) Рассм $\triangle ABC$-прямоуг: $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4R^2 - BC^2} = \sqrt{5^2 \cdot 13^2 - 5^4} =$

$= 5\sqrt{8 \cdot 18} = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$; $\cos \angle ABC = \frac{CB}{AB} = \frac{25}{65} = \frac{5}{13}$; $\sin \angle ABC = \frac{AC}{AB} = \frac{60}{65} = \frac{12}{13}$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

8) Рассм. $\triangle ABE$ — прямоуг. т.к. AB — диаметр:

$BE = AB \cdot \sin \widehat{BAE} = 2R \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} = 65 \cdot \sqrt{\frac{2}{13}} = 5\sqrt{26}$

9) $\sin \widehat{AFE} =$ $\cos \widehat{AFE} = \sqrt{\frac{2}{13}}$; $\sin \widehat{AFE} = \sqrt{1 - \cos^2 \widehat{AFE}} = \sqrt{\frac{13-2}{13}} = \sqrt{\frac{11}{13}}$

$\widehat{CBE} = \frac{1}{2} \overset{\smile}{CE} = \frac{1}{2}(\overset{\smile}{AE} - \overset{\smile}{AC}) = \widehat{AFE} - \widehat{ABC}$

$\cos \widehat{CBE} = \cos \widehat{AFE} \cos \widehat{ABC} + \sin \widehat{AFE} \sin \widehat{ABC} = \sqrt{\frac{2}{13}} \cdot \frac{5}{13} + \sqrt{\frac{11}{13}} \cdot \frac{12}{13} =$

$= \frac{5\sqrt{2} + 12\sqrt{11}}{13\sqrt{13}}$

10) Рассм. $\triangle CBE$:

$CE^2 = BC^2 + BE^2 - 2BC \cdot BE \cos \widehat{CBE} = 25^2 + 5^2 \cdot 26 - 2 \cdot 25 \cdot 5\sqrt{26} \cdot \left(\frac{5\sqrt{2} + 12\sqrt{11}}{13\sqrt{13}}\right) =$

$= 5^2\left(25 + 26 - 10\sqrt{2} \cdot \frac{5\sqrt{2}}{13} - 10\sqrt{2} \cdot \frac{12\sqrt{11}}{13}\right) = 5^2\left(51 - \frac{100}{13} - \frac{120\sqrt{22}}{13}\right) =$

$= 5^2\left(\frac{663 - 100 - 120\sqrt{22}}{13}\right) = 5^2\left(\frac{553 - 120\sqrt{22}}{13}\right) \Rightarrow CE = 5\sqrt{\frac{553 - 120\sqrt{22}}{13}}$

11) $FE \perp BC$; $AC \perp BC \Rightarrow FECA$ — вписанная трапеция, а значит

$AF = CE$ ~~и $FE = CA$~~ ~~$\frac{5}{13}\sqrt{1108 - 240\sqrt{22}}$~~

12) Построим AH — высоту в $FECA$, тогда $AH = AF \cdot \sin \widehat{AFE} =$ ~~$\frac{5}{13}\sqrt{553\sqrt{11} - 120\sqrt{11}\sqrt{2}}$~~ $\frac{5}{13}\sqrt{11(553 - 120\sqrt{22})}$

и $FE = 2FH + AC = 2AF \cos \widehat{AFE} + AC =$

$= 60 + \frac{10}{13}\sqrt{2(553 - 120\sqrt{22})}$

13) $S_{AEF} = \frac{1}{2} \cdot AH \cdot EF = \frac{1}{2}\left(60 + \frac{10}{13}\sqrt{2(553 - 120\sqrt{22})}\right) \cdot \frac{5}{13}\sqrt{11(553 - 120\sqrt{22})}$

Ответ: $\frac{65}{2}$; $\frac{156}{5}$; $\arccos\sqrt{\frac{2}{13}}$; $\left(30 + \frac{5}{13}\sqrt{2(553 - 120\sqrt{22})}\right) \cdot \frac{5}{13}\sqrt{11(553 - 120\sqrt{22})}$

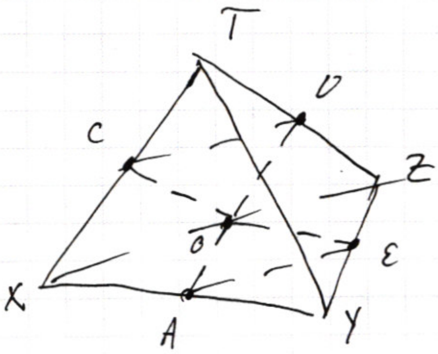
№ 7) Дано: пирамида $TXYZ$

A, C, B, D, E — серед. XY, XT, XZ, TZ, ZY

A, B, C, D, E, Y — лежат на одной сфере

$XY = \sqrt{3}$; $TX = \sqrt{2}$; $TZ = 2$

Найти: XZ; R_{min}



Решение:

1) ~~AB BE — серед. линии~~ AE, BE, AB — серед. линии $\triangle XYZ \Rightarrow AB \parallel YZ$; $BE \parallel XY$; $AE \parallel XZ$

2) $AB \parallel YZ$, $BE \parallel XY$; $ABEY$ — лежат на одной окр., значит $ABEY$ — прямоуг.

и ~~$\angle AYE = 90°$~~ CD — серед. линия $\triangle XTZ \Rightarrow CD \parallel XZ \parallel AE$; $CD = \frac{1}{2}XZ = AE$; $CDAE$ — вписан в окружность, значит $ACDE$ — прямоугольник

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2 $\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6} & (1) \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45 & (2) \end{cases}$

1) $y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}$

$y-6-6(x-1)=\sqrt{x(y-6)-(y-6)}$

$(y-6)-6(x-1)=\sqrt{(x-1)(y-6)}$

2) $9x^2+y^2-18x-12y=45$

$9(x^2-2x+1)-9+(y^2-12y+36)-36=45$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=90$

Замена: $x-1=a$, $y-6=b$

$\begin{cases} b-6a=\sqrt{ab} \\ 9a^2+b^2=90 \end{cases}$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$b^2+36a^2-12ab=ab$, $ab\geq 0$

$b^2+36a^2-13ab=0 \quad | -(9a^2+b^2)$

$27a^2-13ab=-90$

$b=\frac{90}{13a}-\frac{27a}{13}$ при $a\neq 0$, при $a=0$; $-90=0 \Rightarrow$ нет решений

$9a^2+\left(\frac{90}{13}\right)^2\cdot\frac{1}{a^2}-\frac{90\cdot 27}{13^2}+\left(\frac{27}{13}\right)^2a^2=-90$ Замена: $a^2=t$, $t>0$

$\left(9+\left(\frac{27}{13}\right)^2\right)t^2+90\left(1-\frac{27}{13^2}\right)t+\left(\frac{90^2}{13^2}\right)=0$

~~$D=90^2\left(1-\frac{27}{13^2}\right)^2-4\cdot(9+\frac{27}{}$~~

$\left(\frac{1521+729}{169}\right)t^2+90\left(\frac{169-27}{169}\right)t+\frac{90^2}{169}=0$

$\frac{25}{169}t^2+\frac{142}{169}t+\frac{90}{169}=0$

$25t^2+142t+90=0$

$D=142^2-4\cdot 90\cdot 25=4(71^2-2250)=4(5041-2250)=4\cdot 2791$

$t_{12}=\frac{-142\pm 2\sqrt{2791}}{50}=\frac{\pm\sqrt{2791}-71}{25}$ т.к $t>0$, то решений нет

Ответ: нет решений

$f(ab) = f(a) + f(b)$ $\quad f(p) = [\frac{p}{4}]$, p - простое

$f(\frac{x}{y}) < 0$ $\quad f(1) = 2f(1) \Rightarrow f(1) = 0$

$f(5) = 1 \quad f(7) = 1$

$f(11) = 2 \quad f(13) = 3 \quad f(17) = 4 \quad f(19) = 4 \quad f(23) = 5$

$f(\frac{x}{y}) = f(x) + f(\frac{1}{y})$

$f(y) + f(\frac{1}{y}) = f(1) = 0 \Rightarrow f(\frac{1}{y}) = -f(y)$

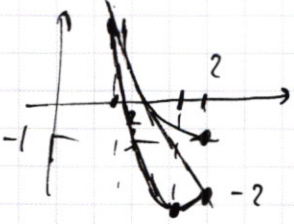
$\frac{25 \cdot 24}{2} = 25 \cdot 12 = 300$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq ax + b \geq 18x^2 - 51x + 28, \; x \in (\frac{2}{3}; 2]$

$\frac{8-6x}{3x-2} = \frac{4+4-6x}{3x-2} = \frac{4}{3x-2} - 2$

$12 \cdot 13 = 26$, 130, $+28$, 156

$18x^2 - 51x + 28 = 3(6x^2 - 17x) + 28$



$\frac{51}{2 \cdot 18}$

$\frac{51^2}{4 \cdot 18} - \frac{51^2}{2 \cdot 18} + 28 = 28 - \frac{51^2}{4 \cdot 18} = 28 - \frac{17^2}{8} =$

$\frac{4}{\frac{4}{3} \cdot 3 - 2} - 2 = \frac{4}{2} - 2 = 0$

$g'(x) = 36x - 51 \quad \frac{51}{36} = \frac{17}{12}$

$-2 = 2a + b$

$2 = \frac{2}{3}a + b \quad \frac{-4 \cdot 3}{3x-2}$

$12 \quad 28 \cdot 8$

$\frac{224 - 289}{8} = -\frac{65}{8}$

$18 \cdot 4 - 51 \cdot 2 + 28 = 72 - 102 + 28 = -2$

$(2; -2) \quad y = -\frac{4}{3}a$

$2 \cdot 2^2 - 17 \cdot 2 + 28 =$

$(\frac{2}{3}; 2) \quad a = -3$

$= 36 - 34 = 2 \quad 2 \; 7$

$b = 4$

$2 = 3x - 2 \quad 2 \; 1$

$\left(\frac{4}{3x-2} - 2\right)' = \frac{-4 \cdot 3}{(3x-2)^2} = -3$

$\frac{8-6x}{3x-2} \geq \quad -2 = 3x - 2 \quad x = 0 \quad 2 \; 3 \quad 2 \; 4$

$4 = (3x-2)^2 \quad x = \frac{4}{3} \quad 25$

$(\frac{4}{3}; 0) \quad 0 = -3 \cdot \frac{4}{3} + b \Rightarrow b = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha=-\frac{\pi}{2}+2\pi k\ \frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha(2\cos^2 2\beta-1+1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos^2 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\beta\cos 2\alpha$ $\quad r=\frac{24}{25}\cdot\frac{65}{2}=$ $\quad R=32.5=\frac{65}{2}$

$\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{17}$ $\quad 169=\frac{4}{25}R^2$

$\cos 2\beta=\frac{1}{\sqrt{17}}\Rightarrow\sin 2\beta=$ $\quad \cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1$ $\quad 13=\frac{2}{5}R$ $\quad 31.2$

$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha$

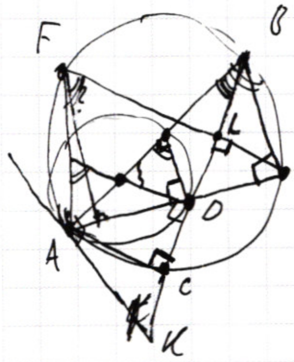
$2\alpha=-\arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}-\arccos\frac{1}{\sqrt{17}}+\quad -\arcsin\left(\frac{2}{17}-1\right)=-\arcsin\frac{15}{17}$

$\arcsin t\quad \arccos t\quad \sin\alpha=\sqrt{\frac{1-\cos 2\alpha}{2}}$ $\quad \sin 2\alpha=\frac{15}{17}$ $\quad \sqrt{\frac{289-225}{289}}=\pm\frac{8}{17}$

$BD=13$ $\quad \sin\alpha=t\quad\cos\beta=t$ $\quad \cos 2\alpha=\pm$

$S\,AEF$ $\quad CD=12$ $\quad \sin(\alpha+\beta)=t^2+(1-t^2)=2t^2-1$ $\quad tg$

$r-?\ R-?$ $\quad 169=4R^2-\frac{4\cdot 24}{25}R^2$



$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}\\ 9x^2+y^2-18x-12y=45\end{cases}$$

18, 36, 45, 99

$9(x-1)^2-18+(y-6)^2-36=45$ $\quad \frac{2R}{2R-7}=\frac{25}{13}$

$9(x-1)^2+(y-6)^2=99$ $\quad -\cos 4\beta-1=$

$y^2-12xy+36x^2$

$xy-6x-y+6=x(y-6)-(y-6)=(x-1)(y-6)$

$50R-257=26R$

$2R\cdot(2R-27)=13^2$ $\quad 13^2=(2R-7)^2-7^2$ $\quad 7=\frac{24}{25}R$

$(3x-3-y+6)^2=99-6(y-6x)^2$ $\quad 169=4R^2-4R7$

$(3x-3-y)^2=99-1(y-6x)^2$ $\quad 169=4R^2-4R7$

$5\cdot 13=65$, 163

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

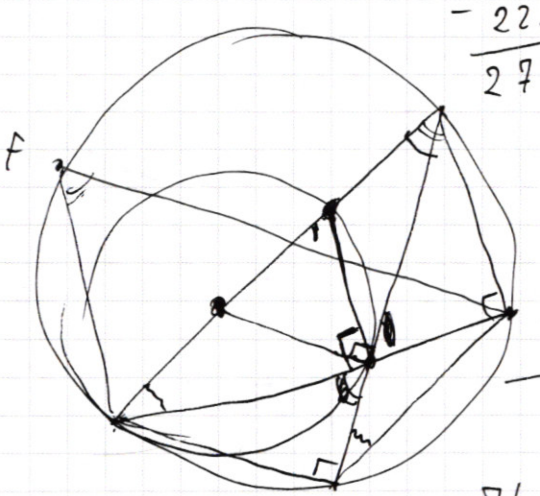
$$5041 - 2250 = 2791$$

$$29 \times 29 = 261\ 8$$

2250

5 · 65

$$325 - 1\ldots = 125 \cdot 13$$



$$31 \times 31 = 31\ 3$$

$$27a^2 - 13ab = -90$$

$$b = \frac{90}{a} - 27a$$

$$b^2 + 36a^2 - 13ab = 0$$

$$b^2 + 36a^2 - 12ab = ab$$

156

169

$9a^2$

a^2

$$71 \times 71 = 71\ 497\ 5041$$

$$a - \frac{99}{a} + 2a = \sqrt{a\left(\frac{99}{a} - 2a\right)}$$

$$3a - \frac{99}{a} = \sqrt{99 - 2a^2}$$

$$b = \frac{99}{a} - 2a$$

$$\cancel{a = \frac{99}{}}$$

$$y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6}$$

$$9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45$$

$$2250 : 90 = 25, \quad -18,\ 45$$

$$(3x - 3 - y)^2 + (\sqrt{6}y - 6\sqrt{6}x)^2 = 99$$

142 | 2

$$2a^2 - ab = 99$$

$$a(2a - b) = 99$$

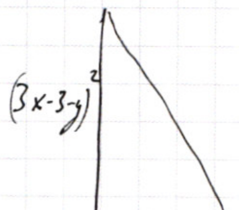
$$\frac{3x - 3 - y}{\sqrt{99}} = \sin\alpha \qquad \frac{\sqrt{6}y - 6\sqrt{6}x}{\sqrt{99}} = \cos\alpha$$

$$a^2 - 2ab - b^2 = ab$$

71

45

$$a^2 - ab - b^2 = 0$$



$$a - b = \sqrt{ab}$$

$$(y-6)^2 = 99 - (x-1)^2$$

$$\left(\frac{y}{3} - 2\right)^2 = 11 - (x-1)^2$$

$$a^2 + b^2 = 99$$

$$169 \times 9 = 81\ 27$$

$$(x-1)(y-6) = (y - 6x)^2$$

~~sin x cos x~~

$$\sin\alpha \cos\alpha$$

$$1521 + 729 = 2250$$

$$169 \times 9 = 1521$$

$$27^2 = 81 \cdot 9 = 729$$

$$y - 6x = y - 6 + 6 - 6(x-1) =$$

$$=$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

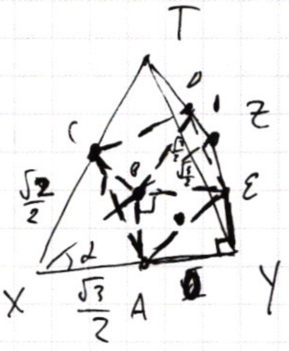
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$XY=\sqrt3 \quad TX=\sqrt2$

$TZ=2$

$XZ-?$

$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$

$12^{-2}+\frac{1}{25}=\log_{13^{-2}}^{5} 2.4 \quad t^{\log_5\frac{12}{25}}-\log_5 2.6$

3

$\log_5 2.6\cdot t$

$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$ ОДЗ: $26x-x^2>0$

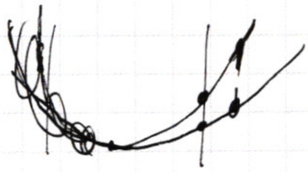
$t^{\log_5 12}+t \geq t^{\log_5 13}$ $\quad \log_5 12 \cdot t^{\log_5 2.4}=\log_5$

$\cancel{t^{\log_5\frac{12}{13}}+t^{\log_5\frac{1}{13}}\geq 1}$ $\quad 2.4^2-1=$

$\cancel{t(t^{\log_5 2.4}+1)}\geq t \quad t^{\log_5 2.4}+1\geq t^{\log_5 2.6}$

$\cancel{\log_5 t \log}$ $\quad 2.4^{\log_5 t}+1\geq 2.6^{\log_5 t}$ $\quad (2.4-1)(3.4=$ $=1.4\cdot 3.4=$

$2.4^{\log_5 t}-2.6^{\log_5 t}\geq -1$ $\quad t\geq 25$



$5^{n\log_5 t}=t^n$ $\quad \cancel{2.6\cdot 2}$ $\quad \cancel{2.6}\cdot 2.6=$

$\log_{2.6} 2.4\cdot t^{\log_5 12-13}$ $\quad 2.6^l-2.4^l\geq 1$ $\quad \log_5 t=2$

$\frac{13^l-12^l}{5^l}\geq 1$ $\quad t=25$

$26x-x^2\geq 25$ $\quad l=2$

$x^2-26x-25\geq 0$ $\quad \frac{169-144}{25}=25$

$\cancel{D=x(x-25)-(x-}$

$D=26^2+4\cdot 25=4\cdot(169+25)=4\cdot 194=(2\sqrt{194})^2$

$\frac{1}{144}\cdot\frac{1}{25}=$

☑ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__
(Нумеровать только чистовики)