МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6}, \\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 6

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3$$

$y = -32x^2+36x-3$ - парабола, ветви вниз

$\left(\frac{9}{16};\ 7\frac{1}{8}\right)$ - вершина

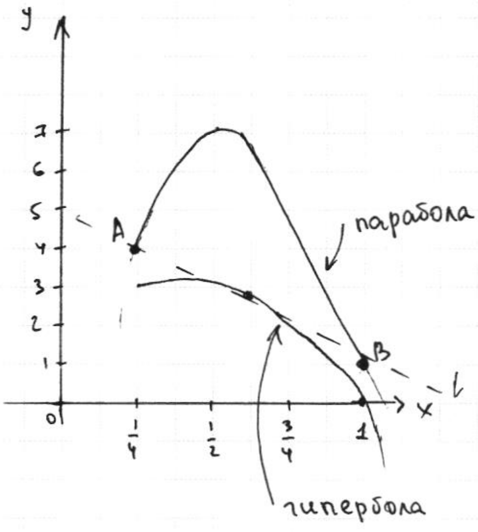
$y\left(\frac{1}{4}\right) = 4$; $y(1)=1$

$-32x^2+36x-3 > 0$ на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

$y = \dfrac{16x-16}{4x-5}$ - гипербола

$y(1)=0$
$y\left(\frac{1}{4}\right)=3$

$\dfrac{16x-16}{4x-5} \geq 0$ на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.



Рассмотрим прямую

$l:\ y = cx+d$

проходящую через точки

$A\left(\frac{1}{4};4\right)$ и $B(1;1)$

$$\begin{cases} \frac{1}{4}c+d=4 \\ c+d=1 \end{cases}$$

$-\frac{3}{4}c = 3 \Rightarrow c=-4 \Rightarrow d=5$

$l:\ y = -4x+5$

Рассмотрим взаимное расположение l и гиперболы:

$\dfrac{16x-16}{4x-5} = -4x+5$

одна точка касания

$16x-16 = -16x^2-25+40x$

$16x^2-24x+9=0$

$D=0$

$x = \dfrac{24}{2\cdot 16} = \dfrac{3}{4}$; $y=2$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№6. продолжение

Прямая l удовлетворяет условию, потому что на промежутке $x \in [\frac{1}{4}; 1]$ точки прямой ниже точек параболы и выше точек гиперболы. Если изменять c или d, не все точки прямой будут удовлетворять условию $\Rightarrow y = -4x + 5 \Rightarrow ax + b = y$

Ответ: $a = -4$; $b = 5$

$(a; b) = (-4; 5)$

№1

$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha) \cdot \cos(2\beta) + \cos(2\alpha) \cdot \sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = \sin(2\alpha) \cdot \cos(4\beta) + \cos(2\alpha) \cdot \sin(4\beta) + \sin(2\alpha) =$$

$$= \sin(2\alpha)\left(2\cos^2(2\beta) - 1\right) + \cos(2\alpha) \cdot 2\sin(2\beta) \cdot \cos(2\beta) + \sin(2\alpha) =$$

$$= 2 \cdot \cos(2\beta)\left(\sin(2\alpha) \cdot \cos(2\beta) + \cos(2\alpha) \cdot \sin(2\beta)\right) = -\frac{2}{5}$$

$$2 \cdot \cos(2\beta) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{2}{5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \sin^2(2\beta) = \frac{4}{5}$$

1) $\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin(2\alpha) \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \cos(2\alpha) \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\sin(2\alpha) + \cos(2\alpha) \cdot 2 = -1$$

$$\sin(2\alpha) = 2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha = 2\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \cdot \cos^2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

потому что $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

Обозначим $\operatorname{tg}\alpha = t$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}{1 + \operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\frac{2t}{t^2 + 1} + \frac{2(1 - t^2)}{1 + t^2} + 1 = 0 \Rightarrow \begin{cases} -t^2 + 2t + 3 = 0 \\ t^2 + 1 \neq 0 \end{cases}$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0 \Rightarrow D = 16 \Rightarrow t = 3 \text{ и } t = -1$$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1 продолжение

2) $\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{2}{\sqrt{5}}\cdot\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2t}{t^2+1} - 2\,\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0 \qquad \begin{cases} 3t^2+2t-1=0 \\ t^2+1 \neq 0 \end{cases}$$

$t = \frac{1}{3}$ и $t = -1$.

Ответ: $tg\,\alpha = -1; \frac{1}{3}; 3.$

№ 2. $\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$

$$(x^2 - 12x + 36) + 36\left(y^2 - y + \frac{1}{4}\right) = 90$$

$$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$$

Пусть $x - 6 = a$; $6y - 3 = b$

$$a\cdot b = (x-6)(6y-3) = 6xy - 36y - 3x + 18 = 3(2xy - 12y - x + 6)$$

$$a - 2b = x - 6 - 2(6y-3) = x - 12y$$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a - 2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \end{cases} \Rightarrow a^2 - 4ab + 4b^2 - \frac{ab}{3} = 0$

$$a^2 - \frac{13}{3}ab + 4b^2 = 0$$

Решим квадратное уравнение относительно a:

$$D = \frac{169}{9}b^2 - 16b^2 = \frac{25}{9}b^2$$

$a = 3b$ или $a = \frac{4b}{3}$

I. $\begin{cases} a = 3b \\ a^2 + b^2 = 90 \end{cases}$ $\quad 10b^2 = 90 \quad b^2 = 9$ $\to b = 3 \Rightarrow a = 9$; $\to b = -3 \Rightarrow a = -9$

№2 продолжение

Подставляем, что $a = x-6$ и $b = 6y-3$

$\begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = -3 \\ y = 0. \end{cases}$

II. $\begin{cases} a = \frac{4}{3} b \\ a^2+b^2=90 \end{cases}$ $\quad \frac{16}{9} b^2 + b^2 = 90$

$b^2 = \frac{810}{25}$

$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b = \frac{9\sqrt{10}}{5} \\ a = \frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \\ \begin{cases} b = \frac{-9\sqrt{10}}{5} \\ a = -\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \end{array}\right.$ $\quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = \frac{30+12\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{3\sqrt{10}+5}{10} \end{cases} \\ \begin{cases} x = \frac{30-12\sqrt{10}}{5} \\ y = \frac{5-3\sqrt{10}}{10} \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $(15; 1); (-3; 0); \left(\frac{30+12\sqrt{10}}{5}; \frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right);$
$\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

№7.

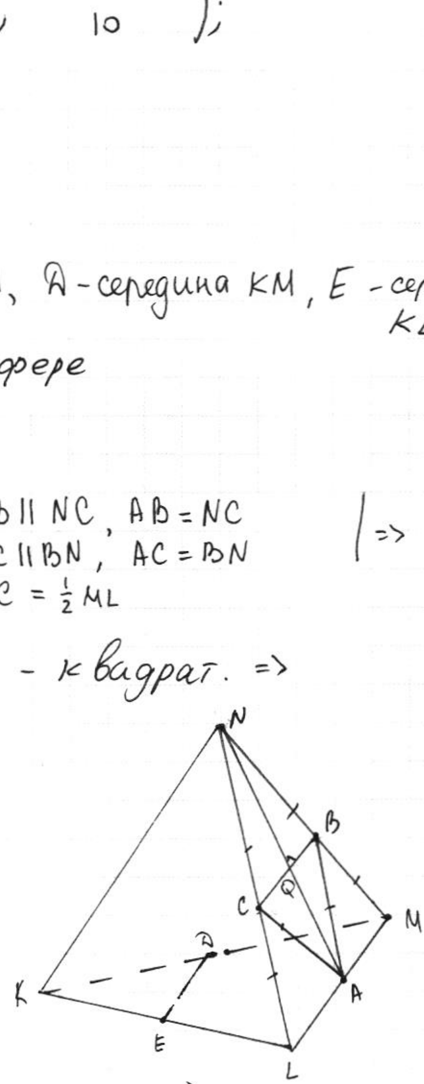
A - середина ML, C - середина NL, B - середина NM, D - середина KM, E - середина KL

N, A, C, B, D, E лежат на одной сфере

NCAB - вписанный четырёхугольник

CB, AB и CA - средние линии $\triangle MLN$ => $AB \parallel NC$, $AB = NC$; $AC \parallel BN$, $AC = BN$; $BC = \frac{1}{2} ML$ =>

=> NBAC - параллелограм (по призн.)
NBAC - вписанный
=> NBAC - квадрат. =>



=> $BN = AB = AC = CN = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$ML = 2x$; $AN \cap CB = Q$

$BQ = \frac{x}{2} = NQ$; из $\triangle NQB$: $\left(\frac{x}{2}\right)^2 \cdot 2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$

$x = 1$ => $ML = 2$

BCED тоже вписанный четырехугольник

$DE = BC = \frac{1}{2} ML$ и $DE \parallel LM = BC$ (т.к. DE - ср. линия $\triangle KML$)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№7. продолжение.

$\Rightarrow DECB$ – пар-м (по признаку)
$DECB$ – вписанный
$\Rightarrow DECB$ – квадрат $\Rightarrow$

$\Rightarrow DE = EC = CB = BD = x = 1$ $\Rightarrow NK = 2DB = 2$, т.к. DB – ср. линия $\triangle NMK$

$KN = ML = 2$ не может быть т.к. $KL < KM + ML$

№3. $10x + |x^2 - 10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3 (10x - x^2)}$

ОДЗ: $10x - x^2 > 0$

$$10x - x^2 + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geqslant 5^{\log_5 (10x - x^2) \cdot \frac{1}{\log_5 3}}$$

$$(10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4} \geqslant (10x - x^2)^{\log_3 5}$$

$$3^{\left((10x - x^2) + (10x - x^2)^{\log_3 4}\right)} \geqslant 3^{\left((10x - x^2)^{\log_3 5}\right)}$$

$$3^{(10x - x^2)} \cdot \cancel{3}\, 4^{(10x - x^2)} \geqslant 5^{(10x - x^2)}$$

$$12^{(10x - x^2)} \geqslant 5^{(10x - x^2)}$$

верно при любом $(10x - x^2) > 0$

$x(10 - x) > 0$

Ответ: $x \in (0; 10)$

№5.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

~~1) $a, b > 0$~~

$$\begin{cases} \frac{12\sqrt{10}}{5} = x-6 \Rightarrow x = \frac{30+12\sqrt{10}}{5} \\ \frac{9\sqrt{10}}{5} = 6y-3 \Rightarrow 6y = \frac{9\sqrt{10}+15}{5} \Rightarrow y = \frac{9\sqrt{10}+15}{5\cdot 3\cdot 2} = \frac{3\sqrt{10}+5}{10} \end{cases}$$

~~2) $a, b < 0$~~

1) $a, b > 0$

$9b^2 + b^2 = 90$

$10b^2 = 90$

$b^2 = 9$

$b = 3 \Rightarrow a = 9$

$b = -3 \Rightarrow a = -9$

$$\begin{cases} 9 = x-6 \\ 3 = 6y-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 15 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -9 = x-6 \\ -3 = 6y-3 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -3 \\ y = 0 \end{cases}$$

~~2) $a, b < 0$~~

$a^2 + 4b^2 - 4ab - \frac{1}{3}ab = 0$

$a^2 - \frac{13}{3}ab + 4b^2 = 0$

$D = \frac{169}{9}b^2 - 16b^2 = \frac{169-90-54}{9}b^2 = \frac{79-54}{9}b^2 = \frac{25}{9}b^2$

$a = \frac{\frac{13}{3}b + \frac{5}{3}b}{2} = \frac{6b}{2} = 3b$

$a = \frac{\frac{13}{3} - \frac{5}{3}b}{2} = \frac{8b}{6} = \frac{4b}{3}$

$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 90$

$b = \frac{9\sqrt{10}}{5}$ $\qquad b = -\frac{9\sqrt{10}}{5}$

$a = \frac{12\sqrt{10}}{5}$ $\qquad a = \frac{-12\sqrt{10}}{5}$

$x = \frac{30+12\sqrt{10}}{5}$ $\qquad x = 6 - \frac{12\sqrt{10}}{5} = \frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

$y = \frac{3\sqrt{10}+5}{10}$ $\qquad y = \frac{3 - \frac{9\sqrt{10}}{5}}{6} = \frac{15-9\sqrt{10}}{5\cdot 6} = \frac{5-3\sqrt{10}}{10}$

Ответ: $(15; 1)$; $(-3; 0)$; $\left(\frac{30+12\sqrt{10}}{5}; \frac{3\sqrt{10}+5}{10}\right)$ $\left(\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \frac{5-3\sqrt{10}}{10}\right)$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

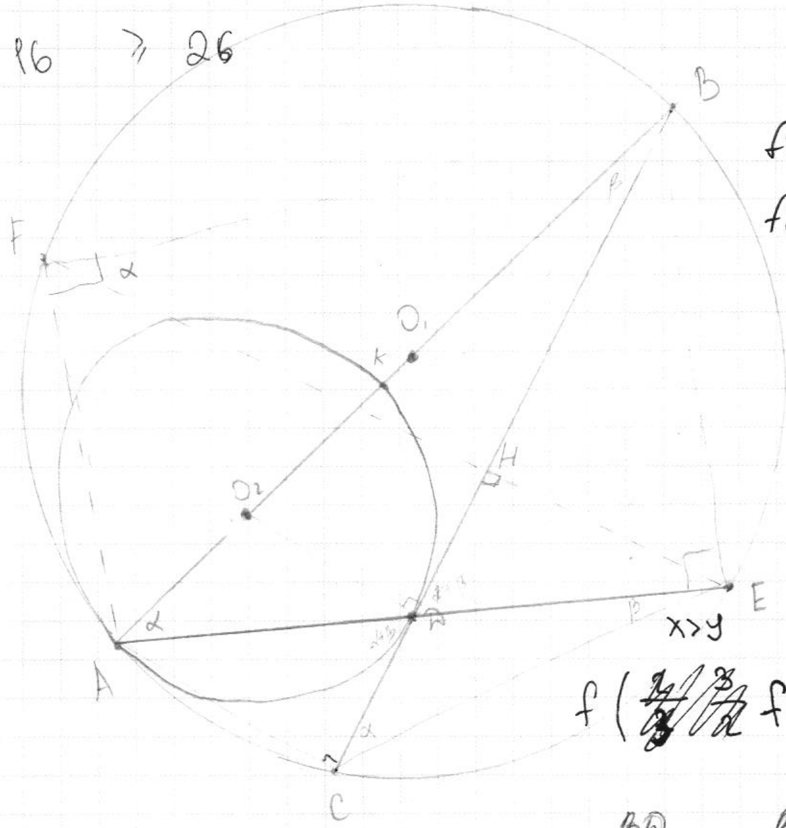
(Нумеровать только чистовики)

$10 + 9^{\log_3 4} \geq 1 + 5^{\log_3 9}$

$10 + 16 \geq 26$

$CD = \frac{15}{2}$

$BD = \frac{17}{2}$ $\quad \frac{x}{y} = p$



$f(\frac{x}{y}) < 0 \Rightarrow$

$f(xy) = f(x) + f($

$f(\frac{x}{y}) = f(p_1) + f(p_2) + \dots f(p_3) \dots < 0$

$\left[\frac{p}{4}\right] = 0$

$\frac{p}{4} < 1$

$p < 4$

$x = y$

$x = 2y$ $\quad x = k \cdot y$

$x = 3y$

$x > y$

$f(k) = f(p_1) + f(p_2) \dots$

$p_i = 1, 2$ или 3

$x = 25$

$y \neq 5$ $y =$

$x = 24$

$y = 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24$

$BD^2 = BK \cdot BA$

$\frac{BD}{BD + CD} = \frac{BO_2}{AB}$

$\frac{AD}{DE} = \frac{CD}{BD} = \frac{15}{17}$

$\frac{\frac{17}{2}}{\frac{32}{2}} = \frac{R - r}{2R} = \frac{17}{32}$

$\frac{AD}{BD} = \frac{CD}{DE}$

$AD \cdot DE = \frac{15 \cdot 17}{4}$

$3^{(10x - x^2)} \cdot 3^{(10x - x^2) \cdot \log_3 4} \geq 3^{(10x - x^2)\log_3 5} = 5^{10x - x^2}$

$4^{(10x - x^2)}$

$0{,}5 + 0{,}6 \geq 1$

$3^{0{,}5} \cdot 3^{0{,}6} \geq 3$

$3^2 \cdot 4^2 = 12^2$

$3^t \cdot 4^t \geq 5^t$

$3^2 \cdot 4^2 \geq 5^2$

$12^t \geq 5^t$

$3^2 \cdot 4^2 + 3^2 \cdot 4^{2 \cdot \log_3 4} \geq 3^2 \cdot 4^2$

$12 \cdot 12 + 16 \cdot \dots \geq 25 \cdot 16$

~~$120 + (144 - 110)$~~

$25 + 25^{\log_3 4} \geq 25^{\log_3 5}$

$50 + 25^{\log_3 4} \geq 25 + 5^{\log_3 25}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$x=1 \quad -32+36-3=1$ $\qquad x=\frac{1}{4} \quad -2+9-3=4$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \le ax+b \le -32x^2+36x-3 \quad \text{пар-ла}$$

$$\frac{-36}{-2\cdot 32}=\frac{9}{16}$$

$$\frac{16x-16}{4x-5} \text{ на пром-ке } x\ [\tfrac{1}{4};1] \quad \geq 0$$

$32 \cdot 12 = 384$

$-32x^2+36x-3=0$

$32x^2-36+3=0 \quad D=36^2-12\cdot 32=1296-384=3\cdot 16\cdot 19$

$36\cdot 36=1296$; $1296-384=912$; $912=3\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 2\cdot 19$

$$x_1=\frac{36+4\sqrt{3\cdot 19}}{2\cdot 32}=\frac{18+2\sqrt{57}}{32}=\frac{9+\sqrt{57}}{16}>1.$$

$$x_2=\frac{9-\sqrt{57}}{16}>\frac{1}{16}$$

$\frac{9-\sqrt{57}}{16} \quad \frac{1}{4} \quad 1 \quad \frac{9+\sqrt{57}}{16}$

$-32x^2+36x-3$ на пром-ке $[\frac{1}{4};1]$ >0

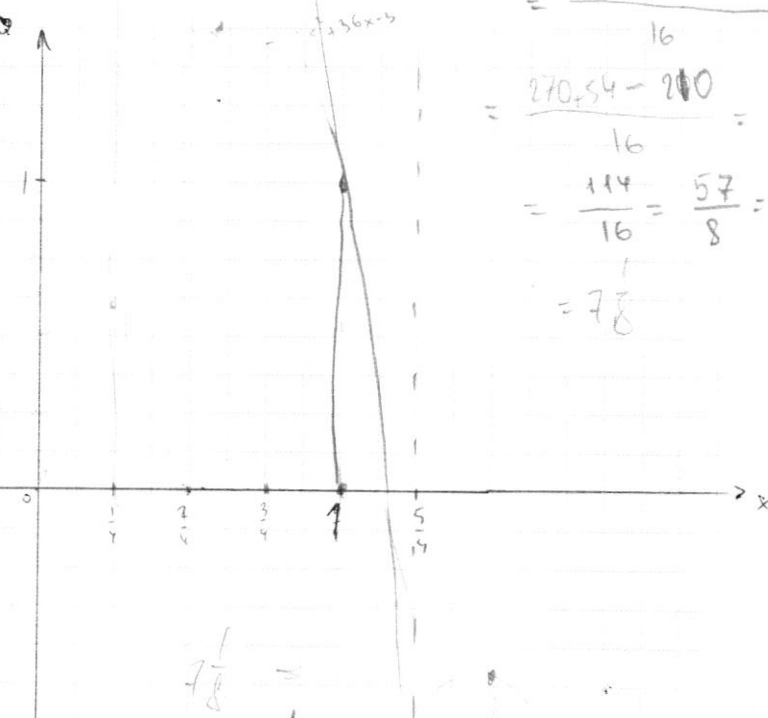
$$-32\cdot\frac{81}{16^2}+\frac{36\cdot 9}{16}-3=\frac{-2\cdot 81+36\cdot 9-3\cdot 16}{16}=\frac{270+54-162-48}{16}=\frac{270+54-210}{16}=\frac{114}{16}=\frac{57}{8}=7\frac{1}{8}$$

$90+9^{\log_3 4}\geq 81+5^{\log_3 9}$ $\quad 106 \geq 106$

$70+28^{\log_3 4}\geq 49+5^{\log_3 27}$

$21+7^{\log_3 4}\cdot 4\geq 5^{\log_3(7\cdot 3)}$

$16+4\cdot 7^{\log_3 4}\geq 5^{1+\log_3 7}$



$$\frac{16\cdot\frac{9}{16}-16}{4\cdot\frac{9}{16}-5}=\frac{-7}{\frac{9-20}{4}}=\frac{28}{11}=2\frac{6}{11}$$

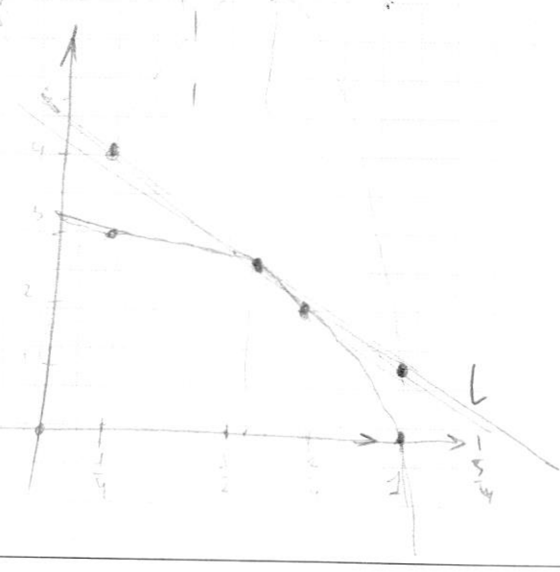
$L: (\frac{1}{4};4)$ и $(1;1)$ $\qquad L: y=-4x+5$

$y=cx+d$

$\begin{cases}4=c\cdot\frac{1}{4}+d\\1=c+d\end{cases}$

$3=-\frac{3}{4}c$

$c=-4 \quad d=5$



$$\frac{16x-16}{4x-5}=-4x+5$$

$16x-16=-(4x-5)^2=-(16x^2+25-40x)$

$16x^2-24x+9=0.$

$D=24^2-36\cdot 16=9(64-16\cdot 4)=0$ - кас

☐ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$10x + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geqslant x^2 + 5^{\log_3(\underbrace{10x-x^2}_{>0})}$$

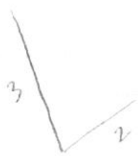
1) $x^2-10x \leq 0$ $\qquad x(x-10)\leq 0$ $\qquad x \in \overset{(0;\,10)}{\cancel{(-\infty;0)\cup(10;+\infty)}}$.

$$\cancel{10x} + (-x^2+10x)^{\log_3 4} \geqslant (x^2-10x) + 5^{\log_3(10x-x^2)}.$$

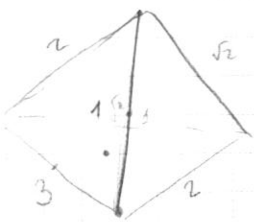
$$5^{\log_3(10x-x^2)} = 5^{\frac{\log_5(10x-x^2)}{\log_5 3}} = 5^{\log_5(10x-x^2)\cdot\frac{1}{\log_5 3}} =$$

$$= (10-x^2)^{\log_3 5}$$

$$(10x-x^2)^{\log_3 4} + (10x-x^2) \geqslant (10-x^2)^{\log_3 5}.$$



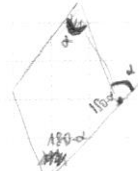
$$\underbrace{(10x-x^2)}_{>0}\underbrace{\left((10x-x^2)^{(\log_3 4)-1} + 1 - (10-x^2)^{(\log_3 5)-1}\right)}_{\geqslant 0} \geqslant 0.$$

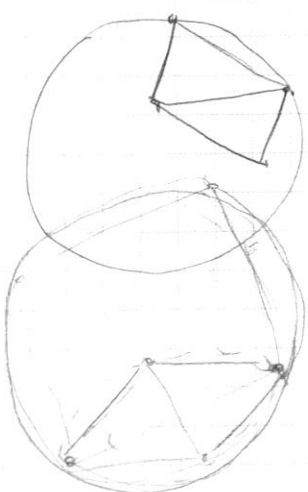


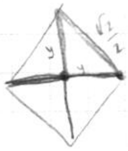
$\frac{1}{2}$ $\cancel{t^{\log_3 4}} + t^1 \geqslant t^{\log_3 5}$ $-t^{\log_3 4}$

$\cancel{\log_t}$ $t^{\log_3 5} - t^{\log_3 4} \leq t$

$(t-1)(\log_3 5 - \log_3 4) \leq t$





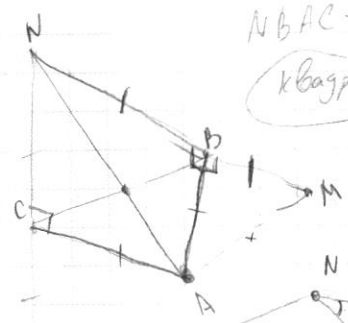


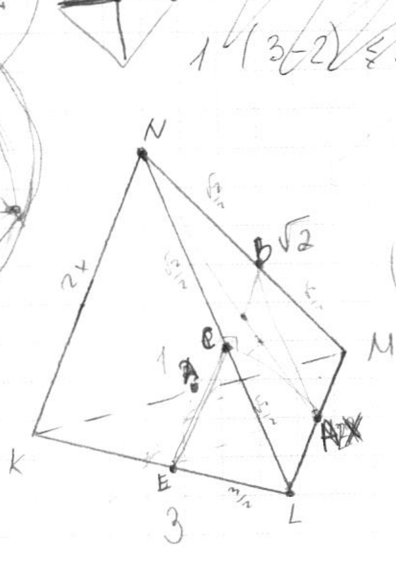
$2^3 - 2^2 \leq 2$

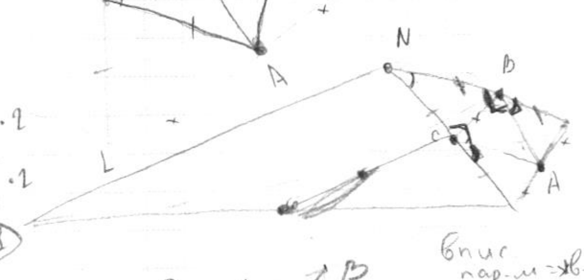
$1(3-2) \leq 2$

NBAC - впис

квадрат







$\left(\frac{\sqrt2}{2}\right)^2 = \left(\frac{x}{2}\right)^2\cdot 2$

$\frac{2}{4} = \frac{x^2}{4}\cdot 2$

$x=1$

впис пар-м $\Rightarrow$ кв-т

$KN = ML = 2.$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} \sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5} \\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5} \end{cases}$$

$\cos =$

$$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)\cdot\cos(4\beta)+\cos(2\alpha)\cdot\sin(4\beta)+\sin(2\alpha) =$$

$$= \sin(2\alpha)\cdot(2\cos^2(2\beta)-1) + \cos(2\alpha)\cdot 2\cdot\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta)+\sin(2\alpha) =$$

$$= \sin(2\alpha)\cdot 2\cos^2(2\beta) + \cos(2\alpha)\cdot \cancel{2\sin(4\beta)}\ 2\sin(2\beta)\cdot\cos(2\beta) =$$

$$= 2\cos(2\beta)\underbrace{(\sin 2\alpha\cdot\cos(2\beta)+\cos 2\alpha\cdot\sin 2\beta)}_{-\frac{1}{\sqrt5}} = \frac{-2}{5}$$

$\cancel{\sin(2\alpha+2\beta+2\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{5}}$ пусть

$\cancel{-\frac{1}{\sqrt5}\cdot\cos(2\beta)+}$

$$2\cos(2\beta) = \frac{-2}{5}\cdot -\sqrt5 = \frac{2}{\sqrt5}$$

$$\cos(2\beta) = \frac{1}{\sqrt5} = 2\cos^2\beta - 1 \Rightarrow \cos^2\beta = \frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}$$

~~$\sin(2\beta) = \sqrt{1-\frac{1}{5}} = \frac{2}{\sqrt5}$~~ ~~$\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$~~

$$\cos\beta = \sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}} \qquad \cos\beta = -\sqrt{\frac{1+\sqrt5}{2\sqrt5}}$$

$\sin^2\beta =$

1) $\cancel{\sin\beta =}$ $\sin(2\beta) = \frac{2}{\sqrt5}$

$$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt5}+\cos(2\alpha)\cdot\frac{2}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$$

$$\sin(2\alpha) + 2\cos(2\alpha) = -1.$$

$\cancel{tg\alpha}$

$\cancel{1-\sin^2\alpha} =$

$$tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = \frac{2\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\cos^2\alpha = \frac{2\,tg\alpha}{tg^2\alpha+1}.$$

$$\cos(2\alpha) = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{2 - tg^2\alpha - 1}{tg^2\alpha+1} = \frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha}$$

$$\frac{2\,tg\alpha}{1+tg^2\alpha} + 2\,\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} = -1 \qquad \frac{2t+2-2t^2+1+t^2}{1+t^2} = 0.$$

$$-t^2+2t+3=0 \qquad t^2-2t-3=0 \qquad D = 4+12=16;\ t_1 = \frac{2+4}{2} = 3;\ t_2 = -1$$

② $\sin(2\beta) = -\frac{2}{\sqrt5}$

$\sin(2\alpha)\cdot\frac{1}{\sqrt5} + \cos(2\alpha)\cdot\left(-\frac{2}{\sqrt5}\right) = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\frac{2t}{t^2+1} - 2\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2} + 1 = 0.$

$\frac{2t - 2 + 2t^2 + 1 + t^2}{1+t^2} = 0$

$3t^2 + 2t - 1 = 0.$

$D = 4 + 4\cdot 3 = 16$

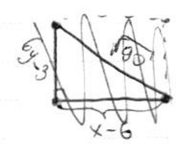
$t_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$

$t_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$

Ответ: $\frac{1}{3}; -1; 3$

$\begin{cases} x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6} \\ x^2 + 36y^2 - 12x - 36y = 45 \end{cases}$ $\quad x \geq 12y$

$\underbrace{(x^2 - 12x + 36)}_{(x-6)^2} + 36\underbrace{\left(y^2 - y + \frac14\right)}_{(y-\frac12)^2} - 36 - 9 = 45$



$(x-6)^2 + \left(6\left(y-\frac12\right)\right)^2 = 90$

$(x-6)^2 + (6y-3)^2 = 90$

$(x-6)(6y-3) = 6xy - 36y - 3x + 18 = 3(2xy - 12y - x + 6)$

~~$x - 6 + 6y - 3$~~

$x - 6 = a;\ 6y - 3 = b.$

$x - 12y = x - 6 - 2(6y-3) =$
$= x - 6 - 12y + 6 = x - 12y$

$\begin{cases} a^2 + b^2 = 90 \\ a - 2b = \sqrt{\frac{ab}{3}} \end{cases}$

~~$a^2 + 4b^2 - 4ab = \frac{ab}{3}$~~

① $b \geq 0$

$a - \sqrt{\frac{b}{3}}\cdot\sqrt{a} - 2b = 0$

$D = \frac{b}{3} + 8b = \frac{25}{3}b$

$\sqrt a = \frac{\sqrt{\frac b3} + 5\sqrt{\frac b3}}{2} = 3\sqrt{\frac b3}$

$\sqrt a = \frac{\sqrt{\frac b3} - 5\sqrt{\frac b3}}{2} = -2\sqrt{\frac b3}$ – п.к.

$a = 3b$

~~$\frac{16}{9}b^2 + b^2 = 90$~~

~~$\frac{25}{9}b^2 = 90$~~

~~$b^2 = \frac{90\cdot 9}{25} \Rightarrow b = \frac{9}{5}\sqrt{10}$~~

~~$a = \frac43\cdot\frac{9\sqrt{10}}{5} = \frac{12\sqrt{10}}{5}$~~