МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2}, \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

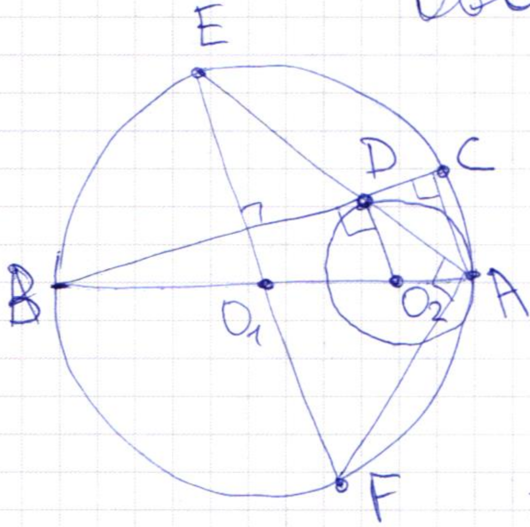
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4

Ответ: радиус ω равен $\frac{65}{24}$, радиус Ω равен $\frac{69}{8}$, $\angle AFE = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$, $S_{\triangle AFE} = \frac{351}{16}$

Решение:



Обозначим центры и радиусы ω и Ω за O_2, O_1 и r, R, соотв. Тогда по лемме Архимеда AD проходит в E – середину BC $\Rightarrow$ EF проходит через O_1, т.к. $EF \perp BC$. Тогда заметим $\angle BDO_2 = \angle BCA = \angle EAF = 90°$. Тогда $DO_2 \parallel CA \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{13}{18} = \frac{BD}{BC} = \frac{BO_2}{BA} = \frac{2R-r}{2R} \Rightarrow 26R = 36R - 18r \Rightarrow$

$\Rightarrow 9r = 5R$ (1). Кроме того, $\frac{169}{4} = BD^2 =$

$= BO_2^2 - O_2D^2 = (2R-r)^2 - r^2 = 4R^2 - 4Rr = 4R^2 -$

$- \frac{20R^2}{9}$ (по (1)) $| \cdot (9 \cdot 4)$, $144R^2 - 80R^2 = 13^2 \cdot 3^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow R^2 = \frac{13^2 \cdot 3^2}{8^2} \Rightarrow R = \frac{13 \cdot 3}{8} = \frac{69}{8}$. Также заме-

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 4 (продолжение)

тим, $AD\cdot ED = BD\cdot DC = \frac{65}{4}$, $\frac{AD}{ED} =$
$= \frac{AO_2}{O_2D_1} = \frac{r}{R-r} = \frac{r}{\frac{9}{5}r - r} = \frac{5}{4}$. Перемножая,

(т.к. $EO_1 \parallel DO_2$)

получаем $AD^2 = \frac{13\cdot 5^2}{4^2} \Rightarrow AD = \frac{5\sqrt{13}}{4}$,
$ED = \sqrt{13}$. Тогда по т. Пифагора
$AF = \sqrt{EF^2 - EA^2} = \sqrt{4R^2 - (AD+ED)^2} = \frac{6\sqrt{13}}{4}$.
Тогда $\operatorname{tg}\angle AFE = \frac{AE}{AF} = \frac{3}{2} \Rightarrow \angle AFE =$
$= \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$. Тогда $S_{AFE} = \frac{AF\cdot EA}{2} =$
$= \frac{6\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{9\sqrt{13}}{4}\cdot\frac{1}{2} = \frac{27\cdot 13}{16} = \frac{351}{16}$ и $r = \frac{5R}{9} =$
$= \frac{65}{24}$

Задача 5

Ответ: 229

Решение: заметим, $f(a\cdot 1) = f(a) + f(1)$ при $b=1 \Rightarrow f(1) = 0$. Также $0 = f(a\cdot\frac{1}{a}) = f(a) + f(\frac{1}{a})$, при $b = \frac{1}{a}$ (1). Также заметим, $f(a^2) = 2f(a)$, при $b=a$, аналогично получаем $f(a^n) = nf(a)$, а также $f(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k}) =$

☐ черновик ☑ чистовик Страница № 2
(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 5 (продолжение)

~~Заметим, что~~ $= f(p_1^{\alpha_1}) + f(p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}) = \ldots =$
$= \alpha_1 f(p_1) + \ldots + \alpha_k f(p_k)$ по условию (где p_i – простые числа). Теперь мы можем находить f от $\mathbb{N}$ чисел. Найдём их:

n	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
$f(n)$	0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3

n	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
$f(n)$	1	1	0	4	0	4	1	1	2	5

n	24	25	26	27
$f(n)$	0	2	3	0

Заметим, что если $f\left(\frac{x}{y}\right) < 0$, то $f\left(\frac{y}{x}\right) > 0$ по (1). Если $f\left(\frac{x}{y}\right) = f\left(x \cdot \frac{1}{y}\right) = f(x) + f\left(\frac{1}{y}\right) = f(x) - f(y) = 0$, то $f(x) = f(y)$ и $f\left(\frac{y}{x}\right)$. Т.к. от 3 до 27:

$f(n)$	0	1	2	3	4	5
кол-во таких n	10	7	3	2	2	1

Из $(27-3+1)^2 = 25^2$ возможных пар

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

Задача 5 (продолжение)

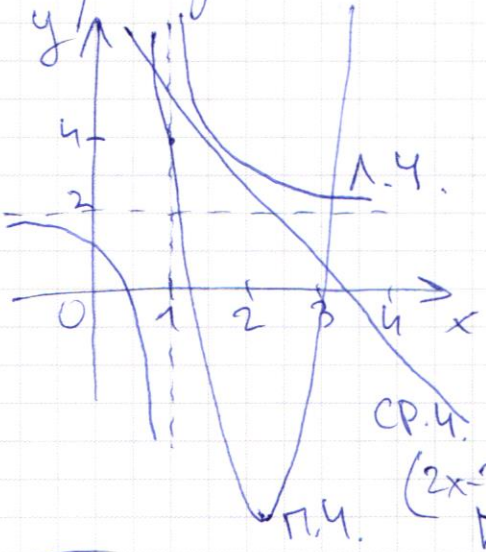
мы тогда должны вычесть кол-во пар $(x;y)$, что $f\left(\frac{x}{y}\right)=0$ и поделить оставшееся число на 2. $\frac{25^2-(10^2+7^2+3^2+2^2+2^2+1^2)}{2}=\frac{625-167}{2}=$

$=229$

Задача 6

Ответ: $(-2;6)$

Решение: построим примерный график системы неравенств:



Заметим, что $a=-2$, $b=6$ подходит, т.к. ур. $\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$ $(x\neq 1)$, $4x-3=-4x^2+12x+4x-12$, $(2x-3)^2=4x^2-12x+9=0$ имеет только одно решение $x=\frac{3}{2}$. То есть $y=-2x+6$ — касательная к Л.Ч. и нер-во $-2x+6\geq 8x^2-34x+30$, $8x^2-32x+24\leq 0$ как раз верно $8(x-1)(x-3)$ при $x\in[1;3]$. Осталось заметить, если $ax+b$ пересекает $x=3$ в точке выше $(3;0)$, ~~то в~~ то угл. коэф будет не меньше

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 6(продолжение)

угл. коэф.-а касательной к П.Ч., то есть ~~не меньше~~ больше угл. коэф.-а в случае $a=-2$, $b=6$, то есть больше -2. Но тогда $y=ax+b$ будет пересекать $x=1$ в точке ниже $(1;4)$ $\Rightarrow$ нер-во Л.Ч $\geq$ П.Ч не будет выполняться (т.к. в условии полуинтервал, можно рассматривать прямую $x=1+\varepsilon$, где ε - бесконечно мало)

Задача 3

Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$

Решение: Заметим, что должно быть $x^2+6x>0$, т.к. в нер.-ве есть $\log_4(x^2+6x)$ $\Rightarrow$ мы можем считать $\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$ и не рассматривать знак модуля. Обозначим $t=\log_4(x^2+6x)$. Тогда нер-во превратиться в $3^t+4^t\geq 4^{t\cdot\log_4 5}=5^t$. Заметим, что данное нер-во верно при $t\leq 2$. Значит $\log_4(x^2+6x)\leq 2$, то есть

Задача 3 (продолжение)

$x^2+6x\le 16$, $x^2+6x-16\le 0$, $(x+8)(x-2)\le 0$, значит решение нер-ва это

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right. \\ \begin{cases} x\ge -8 \\ x\le 2 \end{cases} \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-8;-6)\cup(0;2]$$

Задача 3

Ответ: ± 1 или $-4, -\frac{1}{4}$

Решение: $\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{8}{17} =$

$= \sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha =$

$= 2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

$= 2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) =$

$= 2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)$, $\cos 2\beta =$

$= \frac{4\sqrt{17}}{17}$, $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$, тогда

$\left[\begin{array}{l} 2\alpha = 2\pi k \\ 2\alpha+4\beta = \pi+2\pi k \end{array}\right.$ или $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$,

то есть $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin(-2\beta)$,

тогда $\left[\begin{array}{l} 2\alpha+4\beta = 2\pi k \\ 2\alpha = \pi+2\pi k \end{array}\right.$ Тогда $\alpha = \pi k$

или $\alpha = \frac{\pi}{2}+\pi k$. При 2 знач. он неопределен $\Rightarrow \alpha = \pi k \Rightarrow$ он ± 1

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

или $8\alpha + 4\beta = 2\pi k$ т.к.

Тогда $\sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cdot \cos\alpha = \frac{2\sin\alpha \cos\alpha}{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha} =$

$= \frac{2tg\alpha}{tg^2\alpha + 1}$ $\quad -\frac{8}{17} = \frac{2x}{x^2+1}$

$-8x^2 - 8 = 34x$, $8x^2 + 34x + 8 = 0$,

$4x^2 + 17x + 4 = 0$

$x = \frac{-17 \pm \sqrt{17^2 - 4\cdot 4\cdot 4}}{8} = \frac{-17 \pm 15}{8} =$

$= -4$ или $-\frac{1}{4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f(a^2)=2f(a)=-2f(\frac{1}{a})$ $\quad f(a)=-f(\frac{1}{a})$

$f(1)=f(a)+f(\frac{1}{a}) \Rightarrow$

0

$f(c)=0$ $\quad f(3)=\lfloor\frac{3}{4}\rfloor=0$

$f(a^n)=nf(a)$ $\quad f(\frac{x}{y})\overset{?}{=}0$ $\quad f(\frac{1}{3})=0$

$f(p_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot p_k^{\alpha_k})=\alpha_1 f(p_1)+\ldots+\alpha_k f(p_k)$

$f(\frac{x}{y})=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
0	0	0	1	0	1	0	0	1	2	0	3	1	1	0	4

18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	4	1	1	2	5	0	2	3	0

$\frac{27\cdot 26}{2}$ $\quad \frac{25\cdot 24}{2}$

0	1	2	3	4	5
10	7	3	2	2	1

25^2

$$\frac{4x-3}{2x-2}=2+\frac{1}{2x-2}$$

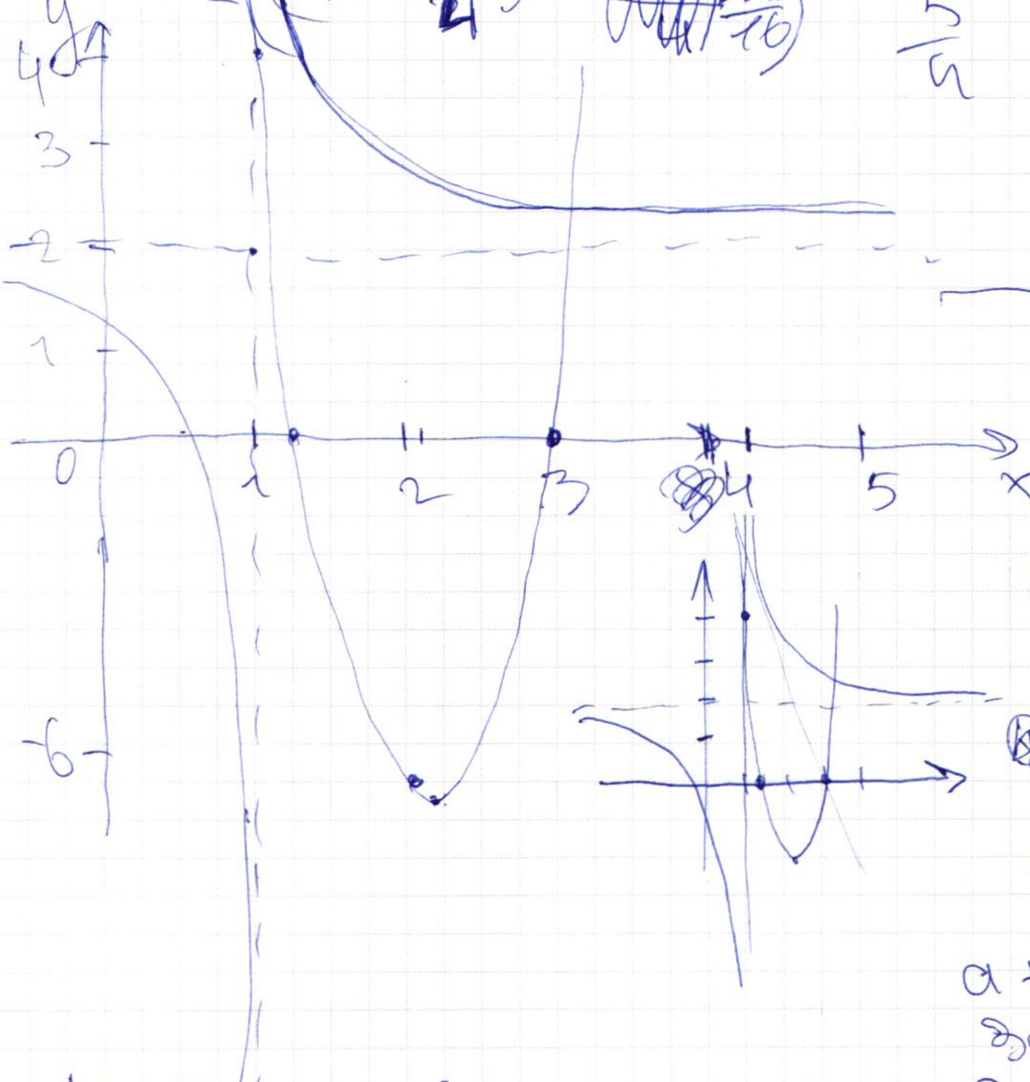
$+\frac{289}{4}=+72\frac{1}{4}$

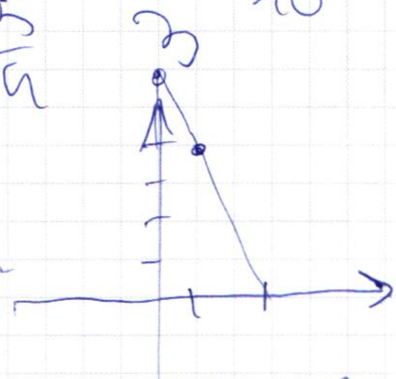
$8x^2-34x+30=2(4x^2-17x+15)=$

$=2\left(\left(2x-\frac{17}{4}\right)^2-\frac{49}{16}\right)$

$\frac{289}{16}$ $\frac{240}{16}$

$\frac{5}{4}$





$-2x+6$

$$\frac{4x-3}{2x-2}=-2x+6$$

$4x-3=-4x^2+12x+$

$+4x-12$

$4x^2-12x+9=0$

$2x-3=0$

$a+b\geq 4$

$2a+b\geq 0$

$\frac{4x-3}{2x-2}-(ax+b)\geq 0$, $4x-3-2ax^2-2bx+2ax+2b=$

$=-2ax^2-(2b-2a-4)x+2b-3$

$(b-a-2)^2+(2b-3)\cdot 2a\leq 0$

$b^2+a^2+4-2ab-4b+4a+4ab-6a\leq 0$

$a^2+b^2+2ab+4-4b-2a\leq 0$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

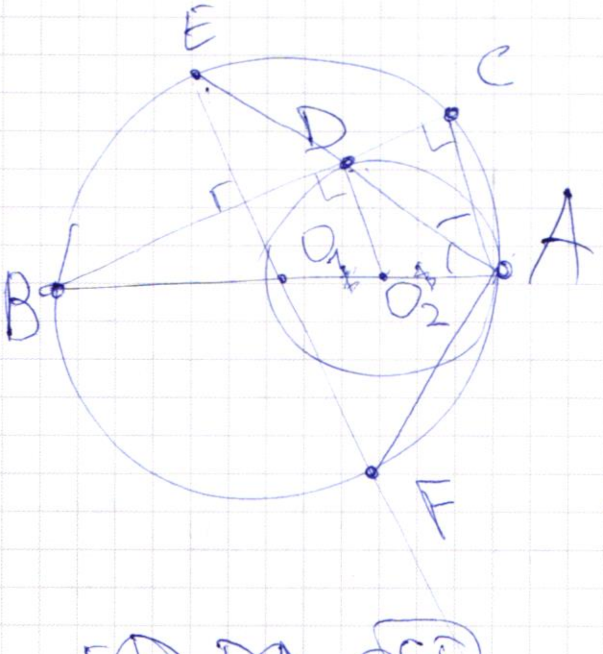
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



$BD^2=(2R-2r)\cdot 2R=$

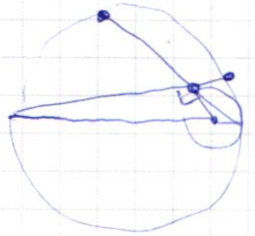
$=4(R-r)\cdot R$

$16R^2-16Rr-169=0$

$8+\sqrt{64r^2+169\cdot 16}=$

$=8+4\sqrt{4r^2+169}=R$

$EA=DA=\frac{\sqrt{65}}{2}$



$\frac{r}{R}=\frac{AD}{EA}$

$R^2-2Rr+r^2+r^2=BD^2$

$=4R^2-4Rr$

$3R^2-2Rr-2r^2=0$

$3\left(\frac{R}{r}\right)^2-2\frac{R}{r}-2=0$

$BD^2=4R^2-4Rr$

$4R^2-4Rr+r^2+r^2$

$\frac{2R-r}{2R}=\frac{13}{18}$

$36R-18r=26R$

$5R=9r$, $r=\frac{5}{9}R$

$(2R-r)^2-r^2=$

$=4R^2-4Rr=$

$=4R^2-\frac{20}{9}R^2=\frac{169}{4}$

$144R^2-80R^2=13^2\cdot 3^2$

$r=\frac{13\cdot 5}{8\cdot 3}$

$R=\frac{13\cdot 3}{8}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{AD}{ED} = \frac{AO_2}{O_2O_1} = \frac{r}{R-r} = \frac{1}{\frac{9}{5}-1} = \frac{5}{4}$$

$$\cancel{\frac{r}{R} = \frac{5}{9}}$$

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$$AD \cdot ED = \frac{65}{4}$$

$$\cancel{AD^2 = \frac{13 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 3^2}}$$

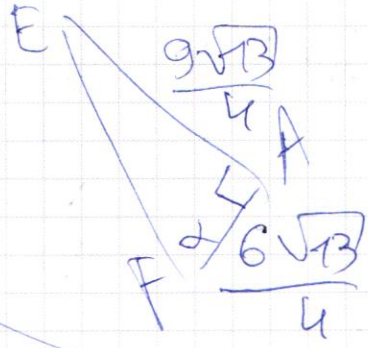
$$\cancel{AD = \frac{5\sqrt{13}}{6}}$$

$$5R = 9r$$

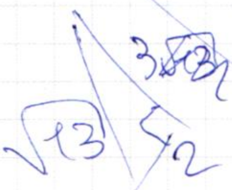
$$AD = \frac{5\sqrt{13}}{4} \qquad AE = \frac{9\sqrt{13}}{4}$$

$$ED = \sqrt{13} \qquad EF = 2R = \frac{39}{4}$$

$$\sin\alpha = \frac{9\sqrt{13}}{39} = \frac{3\sqrt{13}}{13}$$

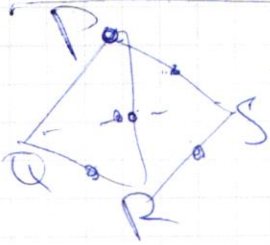


$$\alpha = \operatorname{arctg}\frac{3}{2}$$



$$\frac{9 \cdot 6 \cdot 13}{4 \cdot 4 \cdot 2} = S$$

$$\frac{69}{8} \cdot \frac{5}{9} = \frac{13 \cdot 5}{8 \cdot 3} = \frac{65}{24} \qquad \frac{27 \cdot 13}{16}$$



$$0 \overset{?}{\geq} 8x^2 - 32x + 24$$

$$0 \overset{?}{\geq} x^2 - 4x + 3$$

$$(x-1)(x-3)$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$3^{\log_4 t} + t \geq |t|^{\log_4 5}$ | $3^t + 4^t \geq 4^{t\cdot\log_4 5} = 5^t$

$x^2+6x>0$

$\left[\begin{array}{l} x<-6 \\ x>0 \end{array}\right.$

$(3^t)' = 3^t\cdot\ln 3 + 4^t\cdot\ln 4 \geq 5^t\cdot\ln 5$

$(a^x)' = a^x\cdot\ln a$

$(a^x)' = (e^{\ln a\cdot x})' = ((e^x)^{\ln a})' = \ln a\cdot(e^x)^{\ln a-1}\cdot e^x =$

$=$

$3^x+4^x\geq 5^x$

$\times\begin{array}{r}144\\12\\\hline 288\\+144\;\\\hline 1728\end{array}$

$\frac{91}{1728} \overset{?}{\geq} \frac{1}{125}$

$\frac{3^3+4^3}{(3\cdot4)^3} \overset{?}{\geq} \frac{1}{5^3}$

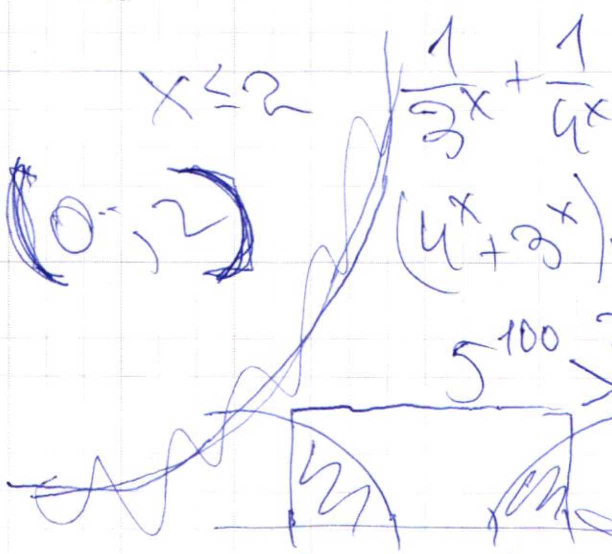
$x\leq 2$

$\frac{1}{3^x}+\frac{1}{4^x}=\frac{1}{5^x}$

$(0;2)$

$(4^x+3^x)\cdot 5^x = 3^x\cdot 4^x$

$5^{100} \overset{?}{>} 4^{100}+3^{100}$



-8 -6 0 2

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$4x^2+9y^2-15xy+2x+3y=2$

$8x^2+18y^2-30xy+4x+6y=4$

$5x^2+15y^2-30xy+10x+10y=0$

$x^2+3y^2-6xy+2x+2y=0$

$(x-y)^2+2y^2-4xy+2x+2y=0$

$3(x-1)^2-3+y^2+2(y-1)^2-2=9$

$(3x-5y)^2-x^2-7y^2+4x+6y=4$

$-(x-2)^2-4-3(y-2)^2+12-4y^2=4$

$(3y-2)(x-1)$

$9y^2-12y+4+x^2-2x+1$

$2x^2+6xy-8x-6y=4$

$6y^2-18xy+12x+10y=-12$

$3(x-y)^2+6xy-6x-4y=4$

$3(x-y)^2+x^2+3y^2-4x-2y=4$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$+\sin 2\alpha$

$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta$

$1+\cos 4\beta=2\cos^2 2\beta$

$\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot$

$\cdot\cos(2\alpha+2\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

$-\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\beta+\frac{4}{\sqrt{17}}\cdot\sin 2\beta+$

$+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)