МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 1 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{4}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{xy-x-2y+2}, \\ x^2+9y^2-4x-18y=12. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2\geqslant \left|x^2+18x\right|^{\log_{12}13}-18x.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=8$, $BD=17$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $1\leqslant x\leqslant 24$, $1\leqslant y\leqslant 24$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{12x+11}{4x+3}\leqslant ax+b\leqslant -8x^2-30x-17$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[-\frac{11}{4};-\frac{3}{4}\right)$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $ABCD$, вершина A которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра AD. Известно, что $AB=1$, $BD=2$, $CD=3$. Найдите длину ребра BC. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha =$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$2 \cdot -\frac{1}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5}$

$\cos 2\beta = +\frac{4}{5}\cdot\frac{\sqrt5}{2} = \frac{2}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} 1)\ \sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5} \\ 2)\ \sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5} \end{array}\right.$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cos 2\alpha =$

1) $\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha \cdot \frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5}$

$\left[\begin{array}{l} 1)\ 2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1 \\ 2)\ 2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -1 \end{array}\right.$

$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$

~~$2\sin t + \cos t + 1 = 0$~~

$2\sin\alpha\cos\alpha$

1) $2\sin 2\alpha + 2\cos^2\alpha = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha = 0$

$\left[\begin{array}{l} \cos\alpha = 0 \\ 4\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \end{array}\right.$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

№2

$$\begin{cases} x^2-4xy+4y^2 = xy - x - 2y + 2 \\ (x-2)^2+(3y-3)^2=25 \\ x \geq 2y \end{cases}$$

$$\sqrt{y(x-2)-(x-2)} = \sqrt{(y-1)(x-2)}$$

$y-1=a$ $\quad$ $y=a+1$

$x-2=b$ $\quad$ $x=b+2$

$$\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab} \\ b^2+9a^2=25 \end{cases} \qquad \begin{cases} b^2-4ab+4a^2=ab \\ b^2+9a^2=25 \end{cases}$$

$b^2-5ab+4a^2=0$

$$\left[\begin{array}{l} b=a \\ b=4a \end{array}\right.$$

№3

$b \geq 2a$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)} + x^2 \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13} - 18x$$

$$5^{\log_{12}t} + t \geq (t)^{\log_{12}13}$$

$5 \quad t = 12^{\alpha}$

$$5^{\log_{12}t} = 5^{\log_{12}\cancel{\log_5 5}} \quad 5^{\log_5 t} = t^{\log_{12}5}$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$f(12)=0$

$f(13)=3$

$f(14)=1$

$f(15)=1$

$f(16)=0$

$f(24)=$

$f(17)=4$

$f(18)=0$

$f(19)=4$

$f(20)=1$

$f(21)=1$

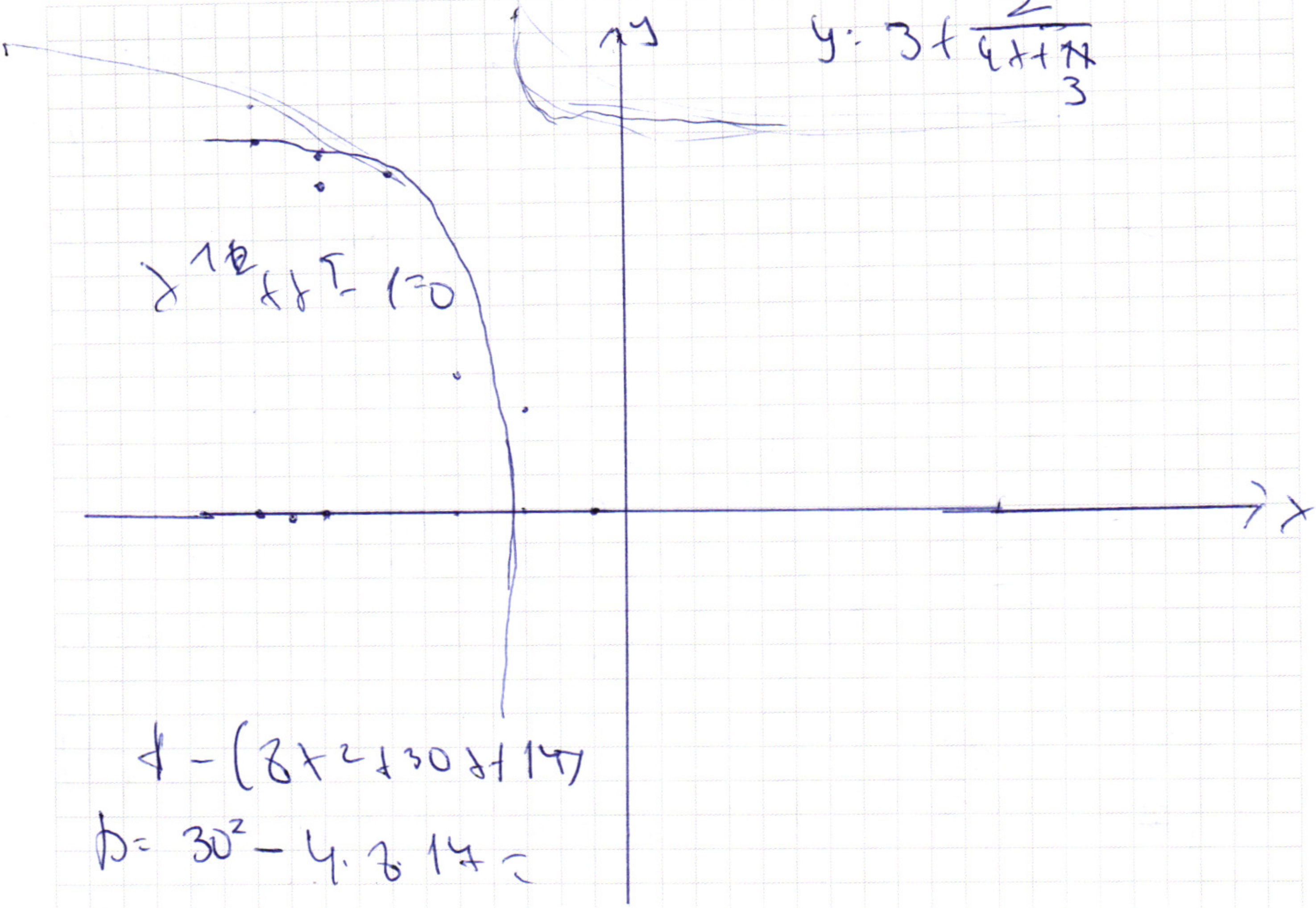
$f(22)=2$

$f(23)=5$

$f\left(\frac{x}{2}\right)=$

$f\left(\frac{x}{3}\right)$

$y = 3 + \frac{2}{4x + \frac{x}{3}}$



$f - (8x^2 + 30x + 17) - f$

$D = 30^2 - 4 \cdot 8 \cdot 17 =$

$x_0 = -\frac{30}{16} = -\frac{15}{8}$

$-\left(8 \cdot \frac{15^2}{8^2} - 30 \cdot \frac{15}{8} + 17\right) =$

$-\left(-\frac{15^2}{8} + 17\right) =$

$\begin{array}{r} 80 \\ 56 \\ \hline 136 \end{array}$ $\quad$ $\begin{array}{r} 225 \\ -136 \\ \hline 89 \end{array}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$AD = 14k$ $\quad \frac{AE}{2R} = \frac{AC}{14k}$

$DE = \frac{3}{k}$

$\frac{BE}{14}:$

$f(4p) = f(4p) = f(p)$

$f(4)+f(p) = f(p)$

$f(4)=0$

$f(1)=0$

$f(2)=0$

$f(3)=0$

$BE^2 = 4R^2 - AE^2 = 14^2 - DE^2$

$AC^2 = 4 \cdot 25^2 - 1$

$AC^2 = 4R^2 - 25^2$

$AD^2 = \frac{AC^2 \cdot \cancel{\sin^2}\alpha}{\sin^2\alpha} = 4r^2 \cdot \sin^2\alpha$

~~BC = 2r~~

$AC = 2r \cdot \sin^2\alpha =$

$\frac{AE^2}{4R}$ $\quad 4r^2 \sin^2\alpha = 4R^2 - 25^2$ $\quad r = 1 - \frac{16}{r^2} =$

$x_1 = 1 + \sqrt{1 - \frac{16}{r^2}}$

$AD = 2r \sin\alpha$

$\frac{AC}{CD} =$ $\quad x^4 - x^2 + \frac{4}{r^2} = 0$

$CD = 2r$

$AC = 2r\sin\alpha$

$2r\, x\sqrt{1-x^2} = 8$ $\quad 1 - x^2 = \frac{4}{r^2x^2}$

$r\, x\sqrt{1-x^2} = 4$ $\quad r^2x^2 - r^2x^4 = 4$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$AC^2 = AD^2 - 64$

$4R^2 = AD^2 - 64 + 25^2$

$\frac{AC}{AD} = \sin\alpha$

$AD^2 = 4r^2 \cdot \sin^2\alpha = 4r^2 \cdot \frac{AC^2}{AD^2}$

$AD^4 = 4r^2 \cdot AC^2$

$AD^2 = 2r \cdot AC$

$4R^2 = \cancel{\ldots}\ AC^2 + 25^2$

$4R^2 - 4R \cdot r = 14^2$

$\sin^2\alpha =$

$BAE \sim ACB$

$\frac{AE}{\cancel{BE}} = \frac{BE}{8} = \frac{2R}{AD}$

AC

$\frac{\cancel{25}}{AC} = \frac{BE}{8} = \frac{2R}{\cancel{8x}}$

$AC = \cancel{2R}$

$AD = 14k$

$\sin\alpha = \frac{AC}{AD} = \frac{AD}{2r}$

$\cancel{AD^2} = AC$ $AC \cdot 2r = AD^2$

$4r^2\sin^2\alpha = 64 + AC^2$

$r = \frac{AD}{2\sin\alpha}$ $4r^2\sin^4\alpha$

$\frac{AC}{2r} =$

$4r^2\sin^2(1-$ $4R^2 = 25^2 + 4r^2\sin^4\alpha$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$t\left(t^{\log_{12}\frac{5}{12}}+1-\lg t^{\log_{12}\frac{13}{12}}\right)$ $\quad 0<\alpha<1<\beta$

$f(t)=$ $\quad \alpha=\log_{12}\frac{5}{12}$, $\beta=\log_{12}13$

$f'(t)=1+\log_{12}5\cdot t^{\log_{12}\frac{5}{12}}-\log_{12}13\, t^{\log_{12}\frac{13}{12}}$

$1+\alpha t^{\alpha-1}=\beta\cdot t^{\beta-1}$

$t^{\log_{12}13}\left(t^{\log_{12}\frac{5}{13}}+t^{\log_{12}\frac{12}{13}}-1\right)=0$

$t^{\log_{12}\frac{5}{13}}+t^{\log_{12}\frac{12}{13}}=1$

$12^{\alpha}=t$

$\alpha^{\frac{5}{13}}+\alpha^{\frac{12}{13}}=1$

$b^5+b^{12}=1$

$x^{12}+x^5-1=0$

$f(5)=$

$0=f(1)$

$f(1)+f(5)+f(x)=f(1)$

$0=f(x+5)$

$x+1$

$y+5$

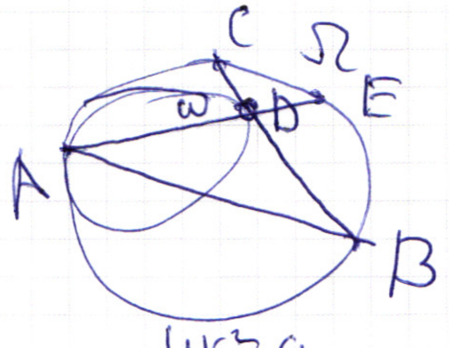
$2=f(4)$ $\quad 0=f(8)$

$1=f(7)$

$0=f(11)$ $\quad 0=f(9)$ $\quad 0=f(8)$

$0=f(5)$ $\quad 1=f(6)$ $\quad 0=f(12)$

$0=f(3)$ $\quad 0=f(11)$



$4r = a$

$\begin{array}{c}156 \\ 36 \\ \hline 212 \\ 19\end{array}$

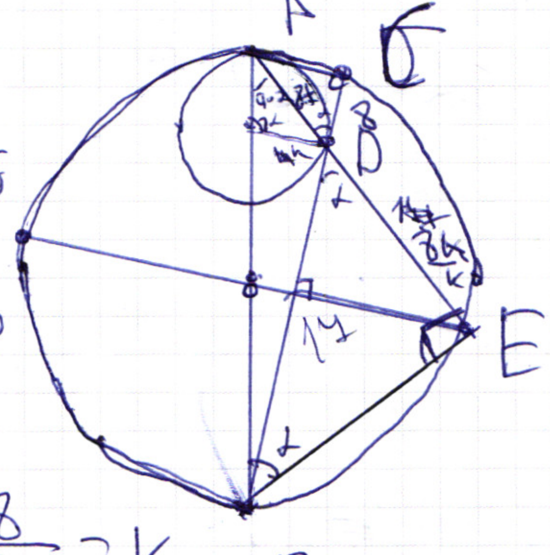
$D = a^2 - 64 \cdot a \cdot 4 =$

$t^2 - a\,at + 64a = 0$

$D = 4$

$t - a + \frac{a}{t} \cdot 64 = t$

$t^2 - at + 64a = 0$



$CD = 8$

$BD = 14$

$AD \cdot ED = 136$

r, R

$\frac{AC}{BE} = \frac{AD}{14} = \frac{8}{ED} = k$

$2R \cdot (R - r) = 14^2$

$2R(2R - 2r) = 14^2$

$4R(R - r) = 14^2$

$AD^2 = 2r^2(1 - \cos 2\alpha)$

$AD = \frac{8}{\cos\alpha}$

$\cos\alpha = \frac{8}{AD}$

$1 - \cos 2\alpha = 1 - (2\cos^2\alpha - 1) =$

$2 - 2\cos^2\alpha$

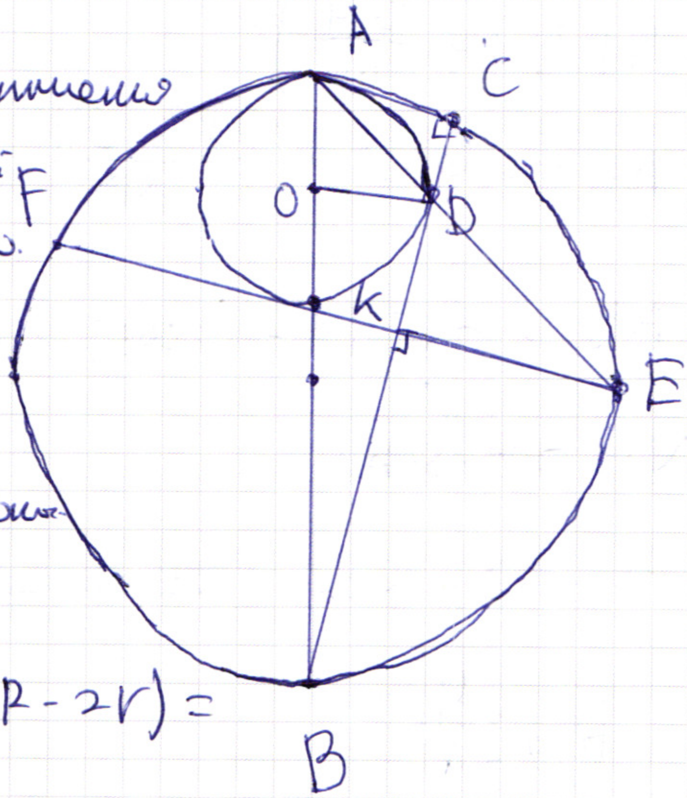
$AD^2 = 4r^2(1 - \cos^2\alpha) = 4r^2 \cdot \sin^2\alpha$

$AD^2 = \left(1 - \frac{64}{AD^2}\right) \cdot 4r^2$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4



1. Пусть r и R – значения радиусов окружностей ω и Ω соответственно.

Пусть AK – диаметр ω и $K \in AB$.

2. По теореме касательной и секущей для ω:

$BD^2 = AB \cdot BK = 2R \cdot (2R - 2r) = 4R(R-r)$

$\angle ACB$ – вписанный и опирается на AB – диаметр $\Rightarrow \angle ACB = 90^\circ$

~~По теореме Пифагора для △ACB:~~

3. Пусть $\angle ADC = \alpha$. $\angle ADC$ – между касательной и ~~секущей~~ хордой $\Rightarrow \alpha = \frac{1}{2} \cup AD$ ч

Пусть O – центр ω. $\angle AOD = \cup AD = 2\alpha$.

По теореме косинусов для $\triangle AOD$:

$AD^2 = 2r^2(1 - \cos 2\alpha)$

~~С другой стороны~~ $\cancel{AD = \frac{CD}{\cos\alpha} = \frac{8}{\cos\alpha}}$

$\cancel{\cos\alpha = \frac{8}{AD}}$

$\cancel{AD^2 = 2r^2(1-(2\cos^2\alpha - 1) = 4r^2(1-\cos^2\alpha) =}$

$\cancel{4r^2(1-\frac{64}{AD^2})}$

$\cancel{AD^2 - 4r^2 + \frac{4r^2 \cdot 64}{AD^2} = 0}$

$AD^2 = 2r^2(1-(2\cos^2\alpha - 1) = 4r^2(1-\cos^2\alpha) = 4r^2 \cdot \sin^2\alpha$

$AD = 2r \cdot \sin\alpha$

$\cancel{CD = AD \cdot \cos\alpha = 2r \cdot tg\alpha = 8 \quad r \cdot \sin 2\alpha = 8}$

$\cancel{tg\alpha = \frac{4}{r}}$

$AC = AD \cdot \sin\alpha = 2r\sin^2\alpha$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№5

$f(4\cdot 1)=f(4)+f(1) \Rightarrow f(1)=0$

$f\left(\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{x}\right)=f(1)=f\left(\frac{x}{y}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right)=0$. Отсюда следует, что кол-во искомых пар равно количеству пар $(x;y)$ таких, что $f(x/y)>0$:

Пусть $y=1$. Найдем кол-во $f(x)>0$:

$f(1)=0$; $f(2)=0$; $f(3)=0$; $f(4)=f(2)+f(2)=0$; $f(5)=1$; $f(6)=f(3)+f(2)=0$; $f(7)=\cancel{2}\ 1$; $f(8)=0=f(2)+f(4)=0$ $f(9)=f(3)+f(3)=0$; $f(10)=1=f(2)+f(5)$; $f(11)=2$; $f(12)=f(4)+f(3)=0$; $f(13)=3$; $f(14)=f(2)+f(7)=1$; $f(15)=f(5)+f(3)=1$; $f(16)=f(4)+f(4)=0$; $f(17)=4$; $f(18)=f(6)+f(3)=0$; $f(19)=4$; $f(20)=f(4)+f(5)=1$; $f(21)=f(3)+f(7)=1$; $f(22)=f(11)=2$; $f(23)=5$; $f(24)=f(4)+f(6)=0$. Т.е существует 13 таких зн. x, что $f(x)>0$

$f(2x)=f(2)+f(x)=f(x)$

Т.е при $y=2$ существует столько же x, что и при $y=1$ таких, что $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Это аналогично для всех y таких что $f(y)=0$. Т.е для $f(y)=0$ пар $(25-13)\cdot 13=156$.

При $f(y)\neq 0$:

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)+f(y^{-1})=f(x)+f\left(\frac{1}{y}\right)=f(x)-f(y)$

При $y=5;\ y=7;\ y=10;\ y=14;\ y=20;\ y=21$

$f\left(\frac{x}{y}\right)=f(x)-1$ и существует $(25-13-6)=6$ таких x, что $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Т.е $6\cdot 6=36$ пар при $f(y)=1$

При $f(y)=2$, т.е при $y=11;\ y=22$ существуют $(25-13-6-2)=4$ таких x, что $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Таких пар $4\cdot 2=8$

При $y=13$ $f(y)=3$ и таких x — 3. пар $3\cdot 1=3$.

При $y=17$ и $y=19$ существует одно зн. x, что $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$ пар $2\cdot 1=2$

И при $y=23$ нет значения x в заданном диапазоне, что $f\left(\frac{x}{y}\right)>0$. Тогда всего пар

$156+36+8+3+2=211$

Ответ: 211

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases} x-2=-\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ y-1=-\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} y=x-2; \\ 1=y-1; \end{cases}\end{array}\right. \quad \left[\begin{array}{l}\begin{cases} x=2-\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ y=1-\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} x=6; \\ y=2; \end{cases}\end{array}\right.$$

Ответ: $\left(2-\sqrt{\frac{5}{2}}; 1-\sqrt{\frac{5}{2}}\right); (6;2)$

№3

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2 \geq |x^2+18x|^{\log_{12}13}-18x$$

ОДЗ: $x^2+18x>0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x>0; \\ x<-18; \end{array}\right.$

Поскольку $x^2+18x>0$, то $|x^2+18x|=x^2+18x$;

$$5^{\log_{12}(x^2+18x)}+x^2+18x \geq (x^2+18x)^{\log_{12}13}$$

Замена $x^2+18x=t$

$$5^{\log_{12}t}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$5^{\log_{12}5^{\log_5 t}}+t \geq t^{\log_{12}13}$$

$$t^{\log_{12}5}+t-t^{\log_{12}13} \geq 0 \;|: t^{\log_{12}13}>0$$

$$t^{\log_{12}\frac{5}{13}} + t^{\log_{12}\frac{12}{13}} - 1 \geq 0$$

Пусть $t = 12^{\alpha}$

$$\left(12^{\alpha}\right)^{\log_{12}\frac{5}{13}} + \left(12^{\alpha}\right)^{\log_{12}\frac{12}{13}} - 1 \geq 0$$

$$\left(\frac{5}{13}\right)^{\alpha} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\alpha} - 1 \geq 0$$

Заметим, что $\left(\frac{5}{13}\right)^{\alpha} + \left(\frac{12}{13}\right)^{\alpha}$ – сумма ~~возр~~ ~~ф-ий~~ убывающих ф-й, поэтому

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

И в первом и во втором уравнении из совокупности $\cos\alpha \neq 0$, т. к. при $\cos\alpha = 0$ равенство не выполнено.

$$\left[\begin{array}{l} \sin\alpha = 0 \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0 \end{array}\right. \begin{array}{l} \mid : \cos\alpha \neq 0 \\ \mid : \cos\alpha \neq 0 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0 \\ 2 + \operatorname{tg}\alpha = 0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0; \\ \operatorname{tg}\alpha = -2; \end{array}\right.$$

Т. е. $\operatorname{tg}\alpha$ может принимать 3 значения: $\left[\begin{array}{l} \operatorname{tg}\alpha = 0; \\ \operatorname{tg}\alpha = -\frac{1}{2}; \\ \operatorname{tg}\alpha = -2; \end{array}\right.$, причём, при не важно какой знак имеет выражение $\sin 2\beta$, поскольку при $|\sin 2\beta| = \frac{1}{\sqrt{5}}$ второе равенство из условия выполнено, а значение $\operatorname{tg}\alpha$ мы получим из первого равенства, значит оно также выполнено.

Ответ: $0; -\frac{1}{2}; -2$

$$\begin{cases} x - 2y = \sqrt{y(x-2) - (x-2)}; \\ (x^2 - 4x + 4) + (9y^2 - 18y + 9) = 12 + 4 + 9; \end{cases}$$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$$\begin{cases} x-2y=\sqrt{(y-1)(x-2)}; \\ (x-2)^2+9(y-1)^2=25; \end{cases}$$

Замена: $\begin{cases} a=x-2 \\ b=y-1 \end{cases}$

$$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab}; \\ a^2+9b^2=25; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4ab+4b^2=ab; \\ a^2+9b^2=25; \\ a-2b\geq 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-5ab+4b^2=0; \\ a^2+9b^2=25; \\ a\geq 2b; \end{cases} \qquad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} a=b; \\ a=4b; \end{array}\right. \\ a^2+9b^2=25; \\ a\geq 2b; \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b; \\ 10a^2=25; \\ a\leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b; \\ 25b^2=25; \\ b\geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b; \\ a=\pm\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ a\leq 0; \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b; \\ b=\pm 1; \\ b\geq 0; \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=b \\ a=-\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=4b; \\ b=1; \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=-\sqrt{\frac{5}{2}}; \\ b=-\sqrt{\frac{5}{2}}; \end{cases} \\ \begin{cases} a=4; \\ b=1; \end{cases} \end{array}\right.$$

Обратная замена

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = 2\sin\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\cos\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}$

$= 2\sin(2\alpha+2\beta)\cos 2\beta = 2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt5}\right)\cdot\cos(2\beta) =$

$-\frac{2}{\sqrt5}\cos 2\beta = -\frac{4}{5} \Rightarrow \cos 2\beta = \frac{2}{\sqrt5}$. Тогда по основному тригонометрическому тождеству $|\sin 2\beta| = \frac{1}{\sqrt5}$. Отсюда возможны 2 случая:

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt5}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt5}$

*) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta =$

$\sin 2\alpha \cdot \frac{2}{\sqrt5} + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha$

1) $\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cdot\frac{2}{\sqrt5} + \cos 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt5} = -\frac{1}{\sqrt5} \,|\cdot\sqrt5$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -1$

$2\sin 2\alpha + \cos 2\alpha + 1 = 0$

$2\cdot 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 + 1 = 0$

$2\cos\alpha(2\sin\alpha + \cancel{1}\cos\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\cos\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha + \cos\alpha = 0\end{array}\right.$$

При $\cos\alpha = 0$ $tg\,\alpha$ не определён, значит $\cos\alpha \neq 0$.

~~Тогда~~ Во втором уравнении из совокупности $\cos\alpha \neq 0$, т.к иначе $|\sin\alpha| = 1$ и равенство не достигалось бы.

Тогда

$2\sin\alpha + \cos\alpha = 0 \,\big|\, : \cos\alpha \neq 0$

$2\,tg\,\alpha + 1 = 0$

$tg\,\alpha = -\frac{1}{2}$.

2) $2\sin 2\alpha - \cos 2\alpha + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha - (1 - 2\sin^2\alpha) + 1 = 0$

$4\sin\alpha\cos\alpha + 2\sin^2\alpha = 0$

$2\sin\alpha(2\cos\alpha + \cancel{1}\sin\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow$

$$\left[\begin{array}{l}\sin\alpha = 0; \\ 2\cos\alpha + \sin\alpha = 0;\end{array}\right.$$