МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам
$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$
Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений
$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство
$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство
$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$
выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \quad (1)$$

$$\sin(2\alpha+4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17} \quad (2)$$

$$\cancel{2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{8}{17}}$$

$$\cancel{2\left((\sin\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos 2\beta - \sin\alpha\cdot\sin 2\beta) + \sin\alpha\cdot\cos\alpha\right) = -\frac{8}{17}}$$

$$\cancel{2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos^2\alpha - \sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\sin^2\alpha - \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\sin^2 2\beta + \sin\alpha\cdot\cos\alpha) = -\frac{8}{17}}$$

Распишем второе ур-ие:

$$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta + \sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$1 = \cos^2 2\beta + \sin^2 2\beta$

$$\sin 2\alpha(1 + \cos^2 2\beta - \sin^2 2\beta) + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos^2 2\beta + 2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha = -\frac{8}{17}$$

$$2\cos 2\beta(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha) = -\frac{8}{17}$$

$$2\cos 2\beta\cdot\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{8}{17} \quad (3)$$

$(1)\to(3)$:

$$2\cos 2\beta\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$$

$$\cos 2\beta = \frac{4}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\sqrt{1-\frac{16}{17}} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$$

1) $\sin 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2}\sin 2\alpha \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} + \frac{1}{\sqrt{17}}(2\cos^2\alpha - 1) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha \cdot \cos\alpha + 2\cos^2\alpha - 1 = -1 \quad \Big| \times \frac{1}{\cos^2\alpha}$ $\qquad tg^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$8 tg\alpha + 2 \cancel{- tg^2\alpha - 1} = \cancel{-tg^2\alpha - 1}$

$4 tg\alpha = -1$

$tg\alpha = -\frac{1}{4}$

2) $\sin 2\beta = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha \cdot \cos\alpha \cdot \frac{4}{\sqrt{17}} - \frac{1}{\sqrt{17}}(2\cos^2\alpha - 1) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$8\sin\alpha \cdot \cos\alpha - 2\cos^2\alpha + 1 = -1 \quad \Big| \times \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$8 tg\alpha - 2 + 2tg^2\alpha + 2 = 0$

$2tg^2\alpha + \overset{4}{8} tg\alpha = 0$

$tg\alpha(tg\alpha + 4) = 0$

$tg\alpha = 0 \qquad tg\alpha = -4$

Ответ: $tg\alpha = -\frac{1}{4}$; $tg\alpha = -4$; $tg\alpha = 0$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№6}$

$$\frac{4x-3}{2x-2} \ge ax+b \ge 8x^2-34x+30$$

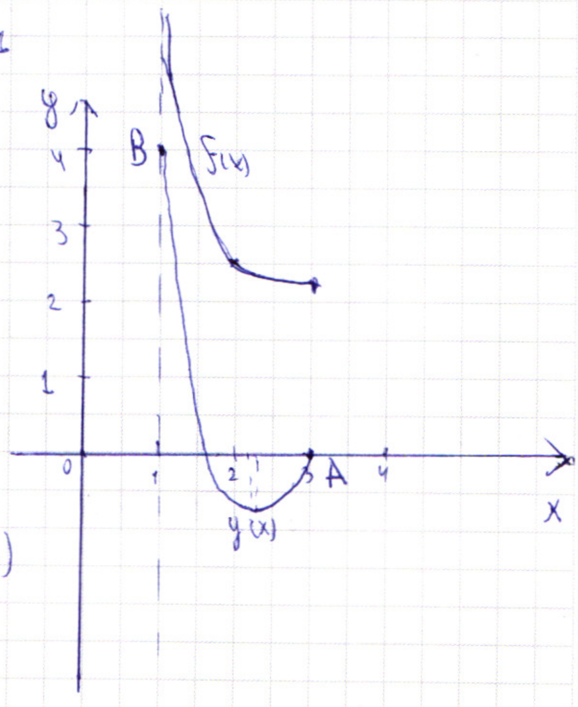
$$x\in(1;3]$$

Исследуем ограничивающие ф-ии:

$g(x)=8x^2-34x+30$ - парабола ветвями вверх

$x_0=\frac{34}{16}=2\frac{1}{8}$ - вершина

$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}$ - гипербола, асимптота $x=1$



Изобразим графики

Наша ф-ия $\varphi(x)=ax+b$ не должна пересекать ни одну другую; должна находиться между ними $\Rightarrow$ найдём касательную из (·) $A(3;0)$ и из (·) $B(1;4)$ к графику ф-ии $f(x)$.

1) из (·) A:

$$\begin{cases} \varphi'(x)\big|_{x=x_0}=f'(x)\big|_{x=x_0} \Leftrightarrow a=\frac{-2}{(2x_0-2)^2} \\ ax_0+b=\frac{4x_0-3}{2x_0-2} \\ 3a+b=0 \end{cases} \Rightarrow;$$

$$\Rightarrow \frac{4x_0^2+4-8x_0}{2x_0^2-8x_0+6} = \frac{-2}{4x_0-3}$$

$$(2x_0^2+2-4x_0)(4x_0-3) = -2x_0^2+8x_0-6$$

$$x_0(8x_0^2-20x_0+12)=0$$

$x_0=0$ - не подх.

$$(8x_0-12)(x_0-1)=0 \Rightarrow \boxed{x_0=\frac{3}{2}} \Rightarrow a=-2$$
$$b=6$$

2) Из (·) B:

$$\begin{cases} a=\frac{-2}{(2x_0-2)^2} \\ ax_0+b=\frac{4x_0-3}{2x_0-2} \\ a+b=4 \end{cases}$$

~~$x_0=\frac{3}{2}$ - подходит сюда~~

$$\frac{-2x_0}{(2x_0-2)^2}+4+\frac{2}{(2x_0-2)^2} = \frac{4x_0-3}{2x_0-2}$$

$$-2x_0+16x_0^2+16-32x_0+2=(4x_0-3)(2x_0-2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 8x_0^2-20x_0+12=0$$

$$(8x_0-12)(x_0-1) \Rightarrow x_0=\frac{3}{2} \Rightarrow \boxed{\begin{matrix}a=-2\\ b=6\end{matrix}}$$

Получили 2 касательные, которые совпадают.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

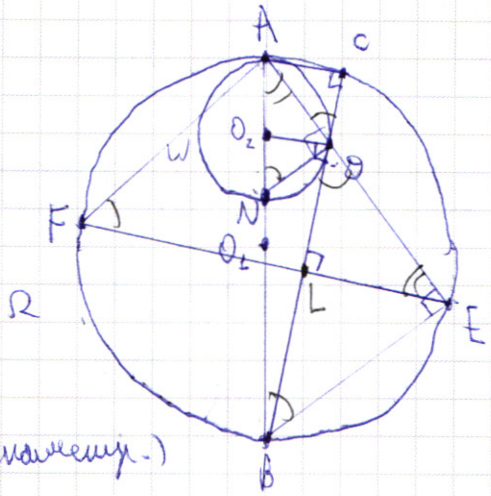
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$



1) $\angle O_2DB = 90^\circ$ (радиус к кас.)

$\angle ACB = 90^\circ$ (опирается на диаметр.)

$\triangle BO_2D \sim \triangle BAC$!

$\frac{BO_2}{BA} = \frac{BD}{BC} \Leftrightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{18}{2}} = \frac{13}{18}$; $O_1B = O_1A = R$, $O_2A = r$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{18} \Rightarrow \frac{r}{2R} = \frac{5}{18} \Rightarrow \frac{r}{R} = \frac{10}{18} = \frac{5}{9}$

$\boxed{R = \frac{9}{5} r}$

2. Т-ма Пиф. для $\triangle BO_2D$:

$BO_2^2 = BD^2 + O_2D^2$

$(2R-r)^2 = \frac{169}{4} + r^2$

$\left(\frac{18}{5} r - r\right)^2 = \frac{169}{25} r^2 = \frac{169}{4} + r^2$

$r^2\left(\frac{169}{25} - 1\right) = r^2 \cdot \frac{144}{25} = \frac{169}{4}$

$r = \frac{5 \cdot 13}{2 \cdot 12} = \boxed{\frac{65}{24}}$

$R = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{24}_{8}} = \boxed{\frac{39}{8}}$

☐ черновик ☒ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

2) $\angle AFE$ – ?

$\angle AFE = \angle ABE$ (опираются на одну дугу.)

$\sin(\angle ABE) = \frac{AE}{AB} = \frac{AE}{2R}$

$\angle ADN = 90^\circ$ – опирается на диаметр

$\triangle ABE \sim \triangle AND$ ($ND \parallel BE$ и друг. ст-дока).

$\angle AND = \angle ABE = \angle AFE$

$\sin(\angle AND) = \frac{AD}{AN} = \frac{AD}{2r}$; $AD = \sqrt{AC^2 + CD^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + (2R)^2 - BC^2} =$

$= \sqrt{\frac{25}{4} + \frac{4 \cdot 39^2}{64} - \frac{18^2}{4}} = \sqrt{\cancel{\frac{100 + 1521 - 324}{16}}} =$

$\cancel{= \sqrt{\frac{1297}{16}} = \frac{\sqrt{1297}}{4}}$

$\cancel{\sin(\angle AND) = \sin(\angle AFE) = \frac{\sqrt{1297}}{4 \cdot \frac{65}{24}} = \frac{6\sqrt{1297}}{65}}$

$= \sqrt{\frac{100 + 1521 - 1296}{16}} = \sqrt{\frac{325}{16}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 15}{16}} = \frac{5}{4}\sqrt{15}$

$\sin(\angle AND) = \frac{\frac{5}{4}\sqrt{15}}{\frac{x \cdot 65}{24}} = \frac{5\sqrt{15}}{4 \cdot 65} \cdot 12 = \frac{\cancel{13}}{\cancel{13}} \boxed{\frac{3}{13}\sqrt{15}}$

$\sin(\angle AFE) = \frac{3}{13}\sqrt{15}$

3) $\angle ADC = \angle AND$ (угол между кас. и хордой)

$\angle ADC = \angle LDE$ (соотв. углы)

$\angle DLE = 90^\circ - \angle LDE = 90^\circ - \angle ADC = 90^\circ - \angle AND = 90^\circ - \angle AFE \Rightarrow$

$\Rightarrow \angle FAE = 90^\circ$ и FE – диаметр.

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№5}$

$f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(p) = [p/4]$

$(x; y) - ?$

$3 \le x \le 24$

$3 \le y \le 24$

$f(x/y) < 0$

$\boxed{№4}$ (продолж.) Значит $\triangle ABE = \triangle AFE$ (по стор. и двум прилежащ. углам)

$S(AFE) = S(ABE)$

$\triangle AND$: $AN = 2r$; $AD = \frac{5\sqrt{15}}{4} \Rightarrow ND = \sqrt{4 \cdot \frac{65^2}{24^2} - \frac{25 \cdot 15}{16}} =$

$= \sqrt{\frac{65 \cdot 65}{24 \cdot 24} - \frac{25 \cdot 15}{16}} = \sqrt{\frac{65 \cdot 65 - 25 \cdot 15 \cdot 8}{128}} =$

$= \sqrt{\frac{25(13 \cdot 13 - 15 \cdot 8)}{128}} = \sqrt{\frac{25 \cdot 49}{64 \cdot 2}} = \frac{5 \cdot 7}{8\sqrt{2}} = \frac{35}{8\sqrt{2}}$

$\triangle AND \overset{k}{\sim} \triangle ABE$

$k = \frac{AB}{AN} = \frac{r}{R} \Rightarrow \frac{S(ABE)}{S(AND)} = k^2 = \frac{r^2}{R^2}$

$$S(AND) = \frac{ND \cdot AD}{2} = \frac{\frac{3}{13}\sqrt{15} \cdot \frac{35}{8\sqrt{2}}}{2} = \frac{3 \cdot 35 \cdot \sqrt{15}}{13 \cdot 8 \cdot 2\sqrt{2}} = \frac{105\sqrt{7,5}}{208}$$

$$S(ABC) = S(AFE) = \frac{65^2 \cdot 8^2}{24^2 \cdot 39^2} \cdot \frac{105}{208}\sqrt{7,5} =$$

$$= \frac{65 \cdot 65 \cdot \cancel{8} \cdot \cancel{8} \cdot 105}{\underset{3}{\cancel{24}} \cdot \underset{3}{\cancel{24}} \cdot 208}\sqrt{7,5} = \boxed{\frac{65^2 \cdot 105}{9 \cdot 208}\sqrt{\frac{15}{2}}}$$

$\boxed{№3}$ $3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5} - x^2$

$t = x^2+6x > 0$ по О.Д.З.

$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$

$\boxed{№2}$ $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2$

$\begin{cases} 9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2 & (1) \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 & (2) \end{cases}$

(2): $3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{4} = 9-3(3y^2-4y-4) = 9-9y^2+12+12 =$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$= (-3y-3)(3y-7) = -3(y+1)(3y-7) \geq 0$$

$$x = \frac{3 \pm \sqrt{-3(y+1)(3y-7)}}{3}$$

1) $4x^2 - \cancel{10}\, x(15y-2) + 9y^2 + 3y - 2 = 0$

$\cancel{3y-2y = \sqrt{3-2}-3+2}$

$$D = (15y-2)^2 - 4\cdot 4(9y^2+3y-2) =$$

$$= 225y^2 - 60y + 4 - 16\cdot 9y^2 + 16\cdot 3y + 16\cdot 2$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\boxed{№2}$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$ — окр-ть

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=R^2$

$3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$(\sqrt{3}x-x_0)^2$

$+2\sqrt{3}x_0x=+6x$

$3=\sqrt{3}x_0$

$+2\cdot\sqrt{3}y_0\cdot y=+4y$

$y_0=\frac{2}{\sqrt{3}}$

$3x^2$ $(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=$

$=3x^2-6x+3+3y^2-\frac{4}{\cancel{\sqrt{3}}}\cancel{\sqrt{3}}y+\frac{4}{3}=4+3+\frac{4}{3}$

$7+\frac{4}{3}=8\frac{1}{3}$

$(\sqrt{3}x-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}y-\frac{2}{\sqrt{3}})^2=8\frac{1}{3}$

$\cos 2\beta\cdot(\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cdot\cos 2\alpha)=$

$\sin 2\alpha\cdot\cos 4\beta+\sin 4\beta\cdot\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{8}{14}$

$\cancel{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta-\sin 2\beta}$

$\sin 2\alpha(1+\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+2\sin 2\beta\cdot\cos 2\beta\cdot\cos 2\alpha=-\frac{8}{14}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

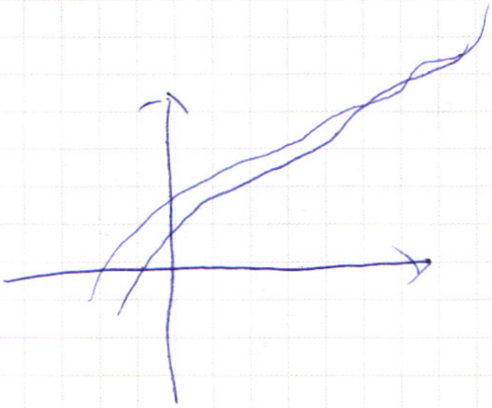
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

№3 $t=x^2+6x$ Из. О.О.У $t>0$

$$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$$

$$\cancel{3^{\log_4 t}\geq t(t^{(\log_4 5-1)}-1)}$$

$$3^{\log_4 t}+t\geq t^{(\log_4 5)>1}$$



$$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$$

$$\cancel{3^{\log_4 t}+t}\ 3^{\log_4 t}+t=t^{\log_4 5}$$

$\cancel{2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta}$

$$2\sin 2\alpha\cdot\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$f(2)=\frac{8-3}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5$$

$$\sin 2\alpha\cdot\frac{4}{\sqrt{17}}+\frac{1}{\sqrt{17}}\cdot\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$$

$$\frac{8-3}{2}=\frac{5}{2}$$

$$4\sin 2\alpha\pm\cos 2\alpha=-1$$

$x=\frac{3}{4}$ $\frac{12-3}{6-2}=\frac{9}{4}$

$f(3)=$

$$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\pm(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)=-1$$

$$\cancel{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}\pm(1-2\sin^2\alpha)=-1$$

№6

$$f(x)=\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 3x^2-34x+30$$

$g(x)$

$ax+b$ на $x\in(1;3]$

$$\frac{12-3}{6-2}=\frac{9}{4}$$

$$\boxed{a+b<ax+b\leq 3a+b}$$

$g(x)$ $8x^2-34x+30=0$

$$x_0=\frac{34\ 17}{16\ 8}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$$

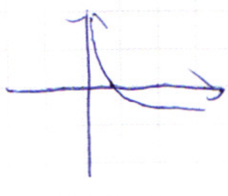
$$f'(x)=\frac{4(2x-2)-2\cdot(4x-3)}{(2x-2)^2}=$$

$$\frac{17^2}{8}-34\cdot\frac{17}{8}+30=-\frac{17^2}{8}+30$$

$$=\frac{8x-8-8x+6}{(2x-2)^2}=\frac{-2}{(2x-2)^2}<0$$

$$\max g(x)=g(1)=8-34+30==4$$

Убывает.



$g(x)<4$

на $x\in(1;3]$

$\max f(x)<f(1)=\infty$

$f(x)\geq f(3)=\frac{9}{4}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6 (прод.)

$-\frac{1}{2}\cdot 2+\frac{9}{2}=-1+\frac{9}{2}=\frac{7}{2}=3,5<\frac{8-3}{2}=$

$\frac{-2}{2^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}$

$\cancel{-1+4,5=3,5}$

$b=4-a=4+\frac{1}{2}=4,5$

$(2x_0-12)(x_0-1)=0$

$3y-$

$9y^2+4x^2-15xy$

$x_0=\frac{3}{2}$

$\frac{-4}{4}+4+\frac{2}{4}=\frac{5}{2}$

$-1+4+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$

$3+\frac{1}{2}$

$a=\frac{-2}{(3-2)^2}=-2$

$b=4+a=6$

$y=2x+6$

$\frac{-2\cdot\frac{3}{2}}{(3-2)^2}+4+\frac{2}{(3-2)^2}=\frac{6-3}{3-2}$

$\cancel{-3+4+2=3}$

У меня вышло что $f(x)$ проходит через A, B и касается $\varphi(x)$

$a=-2$

$b=6$

единств.

$\sin 2\alpha\cdot\frac{1}{\sqrt{14}}+\frac{4}{\sqrt{14}}\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{14}}$

$2\sin\alpha\cdot\cos\alpha \qquad 2\cos^2-1$

$tg^2\alpha+1=\frac{1}{\cos^2\alpha}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

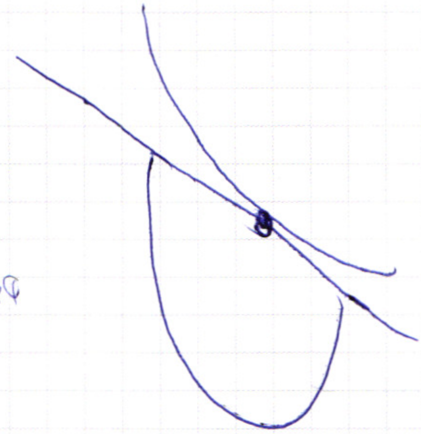
(Нумеровать только чистовики)

№92

$$\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=3 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=3 \end{cases}$$

$\to 2;\ 6$



$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$

$t>1$

$$3^{\log_4 t} + t \geq t^{\log_4 5}$$

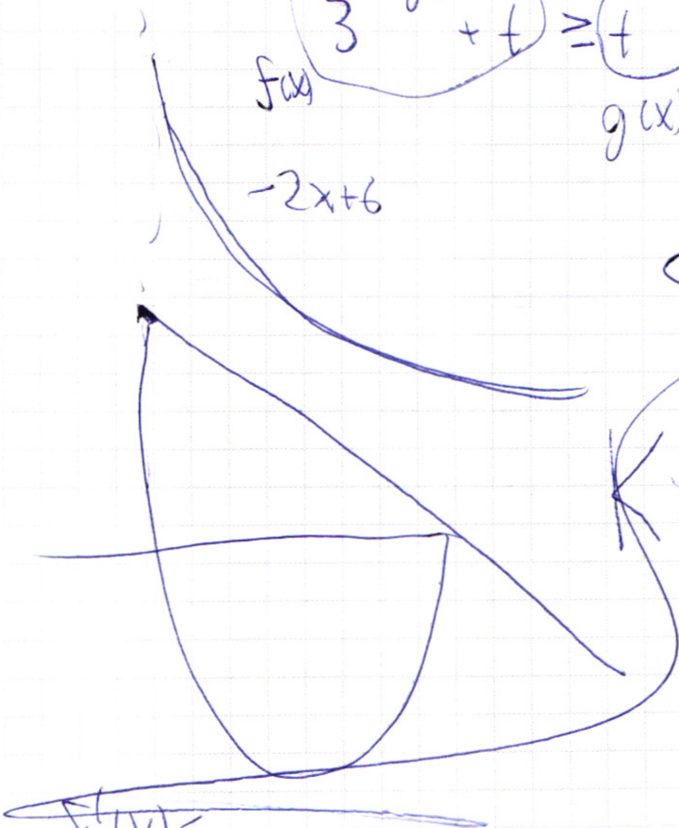
$f(x)$ $g(x)$

~~правее не больше~~

~~левее не больше одной точки пересеч.~~

$-2x+6$

$\log_5 t = 2$



КАСАТЕЛЬНЫЕ

СОВПАДАЮТ

$\cancel{f'(x)=}$

$9y^2+4x^2-15xy+2x+3y=2$

$$\begin{cases} 9y^2+4x^2-12xy = 3xy-2x-3y+2 \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

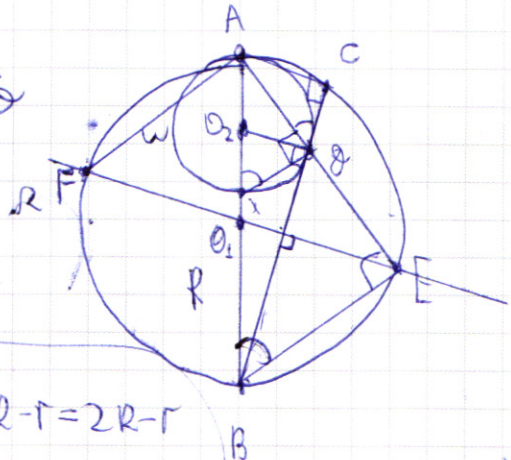
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№4

$tg\,\alpha = \frac{AC}{CD}$



R - ?

AC =

$CD = \frac{5}{2}$

$BD = \frac{13}{2}$

$BO_2 = R + R - r = 2R - r$

$O_2D = r$

$BD = \frac{13}{2}$

$AB = 2R$

$AC = \sqrt{\frac{13^2}{4} + 4R^2} =$

$= \sqrt{\frac{324}{4} + \frac{4\cdot 39^2}{64}}$ 1 ур-ие.

$\angle AFE = \angle ABE$

$AO = R = 2r + x$

$r + x = R - r$

324

$FE \parallel O_2D$

$AC \parallel O_2D$

1) Т. Пиф-ра для $\triangle BO_2D$:

$(2R - r)^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

Подобие $\triangle BO_2D$ и $\triangle BAC$

② $\frac{BO_2}{O_2AB} = \frac{BD}{BC}$

$18 \cdot 18 = 324$

$3 \cdot 39 \cdot 39 = 1521$

2) $\frac{2R - r}{2R} = \frac{\frac{13}{2}}{\frac{5}{2} + \frac{13}{2}} = \frac{13}{18}$

$R = \frac{\cancel{9}^{3}}{\cancel{5}} \cdot \frac{\cancel{65}^{13}}{\cancel{24}_{8}} = \frac{39}{8}$

$1 - \frac{r}{2R} = \frac{13}{18}$

$\frac{r}{2R} = \frac{5}{18}$

$\frac{r}{R} = \frac{5}{9}$

$R = \frac{9}{5} r = 1{,}8r$

$\left(\frac{18}{5} r - r\right)^2 = \left(\frac{13}{5} r\right)^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

$\frac{169}{25} r^2 = r^2 + \frac{169}{4}$

$r^2\left(\frac{169}{25} - \frac{25}{25}\right) = r^2 \cdot \frac{144}{25} = \frac{169}{4}$

144

$r^2 = \frac{13^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 12^2}$

$r = \frac{13 \cdot 5}{2 \cdot 12} = \frac{65}{24}$

65

$\frac{13}{18} = \frac{2R - r}{2R}$

$\sin(\angle ANB) = \frac{AB}{AN} = \frac{AB}{2r} =$

$= \frac{AB}{2\cdot}$

$1421 - 324$

$1421 - 324 =$
$= 1421 - 24 =$
$= 1400 - 3 = 1397$

1 2 3 4 5 6 7 8 9

$AB^2 = \frac{25}{4} + AC^2 =$

$= \frac{25}{4} + 4R^2 + \frac{18^2}{4} =$

$= \frac{25}{4} + \frac{39^2}{16}$

$5 \cdot 65$

$25 \cdot 10 + 25 \cdot 5$

$324 \times 4 =$
$= 1200 + 80 + 16 =$
$= 1296$

$1621 - 1296 =$
$= 325$

$1296 + 325 = 1621$

$1421 - 324$
$1421 - 324 = 1094$

39×39: 351, 117, 1521

$80 + 40$

$169 - 120$

$1621 - 324 =$
$= 1321 - 24 =$
$= 1300 - 3 = 1297$

$30 \cdot 30 =$
$= 900$

$13 \cdot 8 =$
$= 80 + 24$

$AC^2 = \frac{4 \cdot 39 \cdot 39}{64} - \frac{18 \cdot 18}{4}$

64

$\frac{35}{4} = 9$

$40 \cdot 40 = 1600$

39×39: 351, 117, 1521

$\frac{130}{24}$ 9

35×35: 175, 105, 1225

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№6

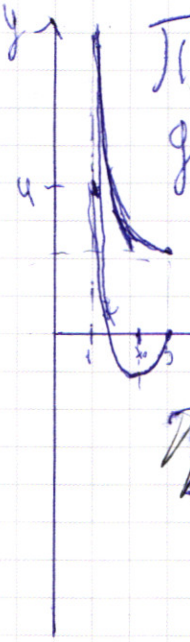
$8x^2-34x+30=g(x)$

$x_0=\frac{34}{16}=\frac{17}{8}=2\frac{1}{8}$

$g(3)=8\cdot 8-34\cdot 3+30=$

$=72-102+30=0$

$8-34+30$



~~Тебе нужно найти две касательные из (.) A к гипер. и из (.) B к гипер.б. Выйдет, что они совпадают.~~

~~ДАНАТЕ~~ ЕЛЬ НБНЕ

1) $f_н'(x)=a$

$f'(x)=\frac{-2}{(2x-2)^2}$

$ax+b=f_н(x)$

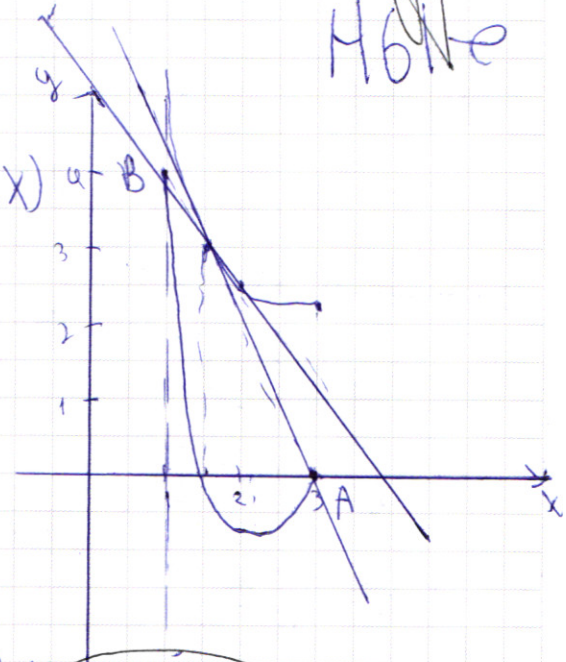
$\frac{9}{4}\geq f_н(3)\geq 0$

$\begin{cases}a=\frac{-2}{(2x_0-2)^2}\\ ax_0+b=\frac{4x_0-3}{2x_0-2}\\ 3a+b=0\Rightarrow b=-3a\end{cases}$

$\begin{cases}3a+b\geq 0\\ 3a+b\leq\frac{9}{4}\end{cases}$

$a+b\geq 4$

$\frac{9}{4}=2\frac{1}{4}$



(1; 4)

Нужно найти кас. проходящую через (.) A (1) к $\frac{4x-3}{2x-2}$

Затем из (.) B. (2)

$\begin{cases}a\cdot(4x_0^2+4-8x_0)=-2\\ a(x_0-3)(2x_0-2)=4x_0-3\\ (ax_0-3a)(2x_0-2)=4x_0-3\end{cases}$

$\begin{cases}4ax_0^2+4a-8ax_0=-2\\ 2ax_0^2-6ax_0+6a-2ax_0=4x_0-3\end{cases}$

$\begin{cases}a(2x_0^2-6x_0+6-2x_0)=4x_0-3\\ a(4x_0^2+4-8x_0)=-2\end{cases}$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{4x_0^2+4-8x_0}{2x_0^2-8x_0+6}=-\frac{2}{4x_0-3}$$

$3x^2-6x+3y^2-4y-4=0$

$\frac{D}{4}=9-3(3y^2-4y-4)=$

$=9-9y^2+12y+12=$

$=-9y^2+12y+21=$

$(2x_0^2+2-4x_0)(4x_0-3)=-2x_0^2+8x_0-6$

$8x_0^3+8x_0-16x_0^2-6x_0^2-6+12x_0=-2x_0^2+8x_0-6$

$=(-3y-3)(3y-7)$

$8x_0^3-20x_0^2+12x_0=0$

$-21+9$ $=(-3y-3)(3y-7)$

$x_0(8x_0^2-20x_0+12)=0$

$x_0=0$ – не подх мам.

$-9y^2-9y+21y$

$(8x_0-12)(x_0-1)=0$

$x_0=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$

$(ax_0-3a)(2x_0-2)=4x_0-3$

24-16

$a\left(\frac{12}{8}-3\right)\cdot\left(\frac{24}{8}-2\right)=3$

$a\cdot\left(-\frac{12}{8}\right)\cdot\ =3$

I кас: $y=-2x+6$

$a=-\frac{24}{12}=-2$

$b=-3a=6$

$a=\frac{-2}{(4-2)^2}=-\frac{2}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow b=4-a=4\frac{1}{2}=\frac{9}{2}$

2) $\begin{cases} a=-\frac{2}{(2x_0-2)^2} \\ ax_0+b=\frac{4x_0-3}{2x_0-2}\Rightarrow -2x_0 \\ a+b=4\Rightarrow \end{cases}$

$\Rightarrow b=4-a$

ax_0+4-a

$\frac{-2x_0}{(2x_0-2)^2}+4+\frac{2}{(2x_0-2)^2}=\frac{4x_0-3}{2x_0-2}\quad\Big|\times(2x_0-2)^2$

$-2x_0+4(2x_0-2)^2+2=(4x_0-3)(2x_0-2)$

$-2x_0+4(4x_0^2+4-8x_0)+2=(8x_0^2-6x_0-8x_0+6)$

$-34x_0+14x_0$

$-2x_0+16x_0^2+16-32x_0+2=8x_0^2-6x_0-8x_0+6$ $\quad x_0=2$

$8x_0^2-20x_0+12=0$ $\quad 2x_0^2-5x_0+2=0$ $\quad (2x_0-1)(x_0-2)=0$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

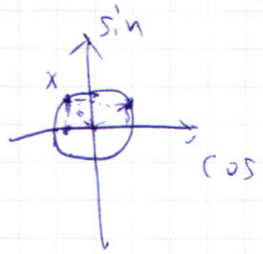
$2\sin(\alpha+2\beta) + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\cdot(\sin\alpha\cdot\cos2\beta + \sin2\beta\cdot\cos\alpha) + 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$\cos(x+\frac{\pi}{2}) = \cos x \cdot \overset{-1}{\cos\frac{\pi}{2}} - \sin x\cdot\overset{0}{\sin\frac{\pi}{2}}$

$2(\sin\alpha\cdot(2\cos^2\beta - 1)$



$2(\sin\alpha\cdot\cos\beta + \sin\beta\cdot\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta - \sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(\sin\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + 2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha) + 2\sin\alpha\cos\alpha = -\frac{8}{17}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta + \cos^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta - \sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cos\beta - \sin^2\beta\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\cancel{2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha + \sin\beta\cdot\cos\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2\beta - \sin^2\beta) + \sin\beta\cdot\cos\beta(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(\sin\alpha\cos\alpha\cdot\cos2\beta + \sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos2\beta + \cos\alpha\cdot\sin2\beta + \sin\alpha\cdot\cos\alpha) = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases} \sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos2\beta + \sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{2\sqrt{17}} \\ \sin\alpha\cdot\cos2\beta + 2\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos\alpha + \sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{8}{34} \end{cases}$$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta + \cos2\alpha\cdot\sin2\beta =$

$2\sin$

☒ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №

(Нумеровать только чистовики)

$2\sin(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha+\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~2l~~ ~~2 sinα·cosβ~~ $2(\sin\alpha\cdot\cos\beta+\sin\beta\cdot\cos\alpha)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2\beta+\sin\beta\cdot\cos\beta\cdot\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cdot\sin\beta\cdot\cos\beta-\sin^2\beta\cdot\sin\alpha\cdot\cos\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin2\alpha\cdot\cos2\beta+\sin2\beta\cdot\cos2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~sin 2α~~

$2\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta)+\sin2\alpha = -\frac{8}{17}$

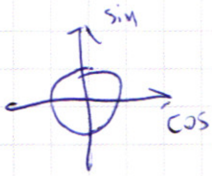
$2(\sin(\alpha+2\beta)\cdot\cos(\alpha+2\beta))+\sin2\alpha = -\frac{8}{17}$

$$\begin{cases}\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}\\ \sin(2\alpha+4\beta)+\sin2\alpha = -\frac{8}{17}\end{cases}$$

~~2(sin2α·sin2β~~

$2((\sin\alpha\cdot\cos2\beta+\cos\alpha\cdot\sin2\beta)\cdot(\cos\alpha\cdot\cos2\beta - \sin\alpha\cdot\sin2\beta))+\sin2\alpha$

$tg\,\alpha = ?$



$2\cdot(\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\cos^2\alpha\cdot\sin2\beta\cos2\beta+\cancel{\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta}$
$-\sin^2\alpha\cdot\sin2\beta\cdot\cos2\beta-\sin\alpha\cos\alpha\cdot\sin^2 2\beta)+\sin2\alpha=$
$\alpha+2\beta$

$\cos2\beta(\sin(2\alpha+2\beta)) = 0$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha(\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+\sin2\beta\cdot\cos2\beta(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+\sin\alpha\cdot\cos\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2(\sin\alpha\cdot\cos\alpha(1+\cos^2 2\beta-\sin^2 2\beta)+\sin2\beta\cdot\cos2\beta\cdot\cos2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$2(\cancel{Si}\ 2\sin\alpha\cdot\cos\alpha\cdot\cos^2 2\beta+\sin2\beta\cdot co$