МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 2

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{5}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{5}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

+

$$\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6},\\ x^2+36y^2-12x-36y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

+

$$10x+\left|x^2-10x\right|^{\log_3 4}\geqslant x^2+5^{\log_3\left(10x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{15}{2}$, $BD=\frac{17}{2}$.

+ +

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $2\leqslant x\leqslant 25$, $2\leqslant y\leqslant 25$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{16x-16}{4x-5}\leqslant ax+b\leqslant -32x^2+36x-3$$

выполнено для всех x на промежутке $\left[\frac{1}{4};1\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $KLMN$, вершина N которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра KN. Известно, что $KL=3$, $KM=1$, $MN=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра LM. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№ 1

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{2}{5}$

$\sin 2\alpha \cdot \cos 4\beta + \sin(4\beta) \cdot \cos 2\alpha + \sin(2\alpha) = -\frac{2}{5}$

$x - 12y = \sqrt{2xy - 12y - x + 6}$

$2y(x-6) - (x-6) = (2y-1)\cdot(x-6)$

$x > 12y$

$x = \frac{17}{2\sqrt{514}}$

$x^2 + 144y^2 - 2\cdot 12yx = 2xy - 12y - x + 6$

$x^2 + 144y^2 - 26xy = -12y - x + 6$

$x^2 + 36y^2$

$36y^2 - 36y + x^2 - 12x - 45 = 0$

$D = 36^2 - 4(x^2 - 12x - 45) = 36\cdot 4(9 - x^2 + 12x + 45$

$x^2 - 12x + 36y^2 - 36y - 45 = 0$

$D = 12\cdot 12 - 4\cdot \cancel{36y^2} = 4(36 - 36y^2 + 36y + 45)$

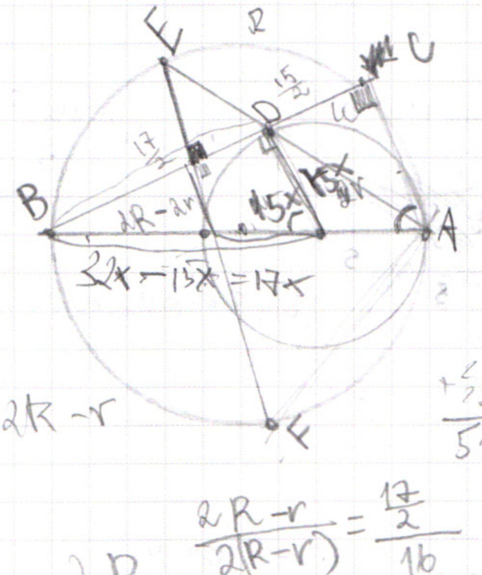
$81 - 36y^2 + 36y)$

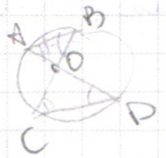
$4\cdot 9(9 - 4y^2 + 4y)$

514 | 14

514 | 2

257





$\frac{AO}{CO} = \frac{BO}{OD}$

$AO \cdot OD = BO \cdot OC$

$\frac{15+17}{2} = 16$

$ED \cdot DA = \frac{15}{2} \cdot \frac{17}{2}$ $ED \cdot DA$

$x = \frac{17}{2}$

$225 + 289 = 514$

$\left(\frac{17}{2}\right)^2 = (15x)^2 + (17x)^2$

$289 = 900x^2 + 1156x^2$

$\frac{289}{4} = 225x^2 + 289x^2$

2R - r

$\frac{2R-r}{2(R-r)} = \frac{\frac{17}{2}}{16}$

$\frac{2R-r}{R-r} = \frac{17}{16}$

2R

$\frac{2R-2r+r}{2R} = \frac{17}{16}$

$\frac{2R-r}{R} = \frac{17}{16}$

$32R - 16r = 17R$

$15R = 16r$

$\frac{R}{r} = \frac{16}{15}$

☒ черновик ☐ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

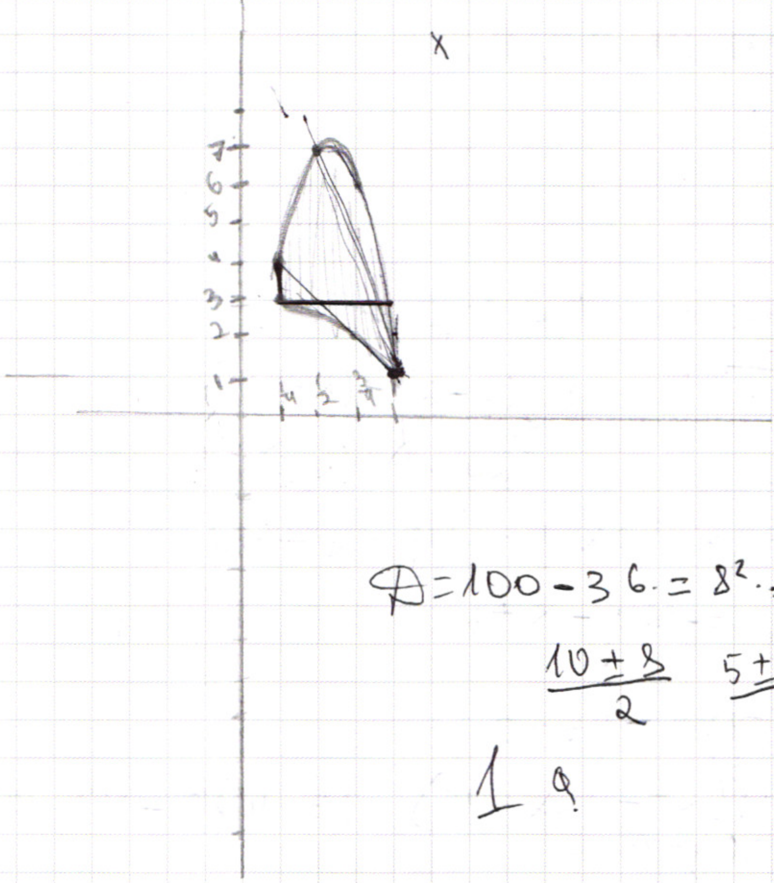
Страница №__
(Нумеровать только чистовики)

$$\frac{16x-16}{4x-5} = \frac{16x-20+4}{4x-5} = \frac{4(4x-5)+4}{4x-5} = 4+\frac{4}{4x-5}.$$

$$1-5=-4 \quad \frac{4}{-4}=-1$$

$ax+b \le -32x^2+36x-3$

$4+\frac{4}{4x-5}$ $\quad 1+\frac{4}{1-5}$



$\frac{1}{4}: 9.3$

$\frac{1}{2}: 4+\frac{4}{-3} = 3-\frac{1}{3}=\frac{8}{3}$

$\frac{5}{4}: 4+\frac{4}{2}=2.$

$1: 4+\frac{4}{-1}=0.$

$D=100-36=8^2=64$

$\frac{10\pm 8}{2} \quad 5\pm 4$

1 9

$\frac{1}{4}: -32\cdot\frac{1}{16}+6=4$

$\frac{1}{2}: -8+15=7.$

$\frac{3}{4}: -18+24=6.$

$1: 1$

$\frac{9\cdot 4}{4\cdot 16}=\frac{9}{16}$

$x\in(0;10)$

$$10x+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq x^2+5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq$$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

$(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$(10x-x^2)^{\log_3 5}$

$3^{\log_3 5^{\log_3(10x-x^2)}}$

$$(10x-x^2)+(10x-x^2)^{\log_3 4} \geq (10x-x^2)^{\log_3 5}$$

$3^{\log_3 5 \cdot \log_3(10x-x^2)}$

$10x$

$$t+t^{\log_3 4} \geq t^{\log_3 5}$$

$t=1$

$$t^{\log_3 4}-t^{\log_3 5}+t \geq 0.$$

$89-25=64.$

$3^{\log_3(10x-x^2)^{\log_3 4}}$

$3^{\log_3(10x-x^2)\cdot \log_3 4}$

17×15: 85, 17, 255

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$(x-12y)^2 = 2x-12y-x+6 \quad x^2-24yx+\overset{144}{y^2} = 2x-12y-x+6$

$x^2+36y^2-12x-36y=45 \quad x^2+36y^2-12x-36y=45$

$(144-36)y^2$

$-\frac{\sqrt{5}}{5} \quad 2\sqrt{5}$

$\sin(2a+2\beta)\cdot\cos 2\beta + \sin 2\beta\cdot\cos(2a+2\beta)+\sin 2a = -\frac{2}{5}$

$x-6=a \quad 2y-$ $\quad f(x;y) = f(x)+f(y) = \left[\frac{xy}{4}\right]$

$(x-12y)^2 = \quad \left[\frac{x}{4}\right]+\left[\frac{y}{4}\right] = \left[\frac{xy}{4}\right]$

$x^2-12x+36 \quad +36y^2-36y \quad +1 = 45+36+1$

$(x-6)^2 \quad + (6y-1)^2 \quad = 82$

$x-12y = \sqrt{2y(x-6)-(x-6)} \quad \sqrt{(2y-1)\cdot(x-6)}$ $\quad x-6=a$

$x=a+6$

$\begin{cases} a^2-12ab+36b^2=ab \\ \end{cases}$ $\quad 2y-1=b$

$y=\frac{b+1}{2}$

$2y=b+1$

$36 \quad 9(4y^2-4y^2+1)-9$ $\quad 12y=6b+6$

$a+6=x \quad 6y=3b+3-1$

$45+36=81+4 \quad a=x-6$ $\quad a+6-6b-6 \quad 6y=3b+2$

$x-12y=\sqrt{ab} \quad x-12y=$ $\quad \begin{cases} a-6b=\sqrt{ab} \\ a^2+(3b+2)^2=82 \end{cases}$

$a^2+9b^2=90$

☒ черновик ☐ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__ (Нумеровать только чистовики)

$a-6b=\sqrt{ab}$ $a^2-12ba+36b^2=ab$

$a^2+9b^2=90$ $a^2+9b^2=90$ $a^2+9b^2+27b^2=90$

$+27b^2$

$36b^2$

$a^2-13ab+36b^2=0$ $36 \cdot 4 = 144$

$a_1=\frac{18b}{2}=9b$ $D=169b^2-144b^2=25b$

$a_2=\frac{8b}{2}=4b$

1 $\begin{cases} \cancel{a-6b=\sqrt{ab}} \\ a\geq 6b \\ a=9b \end{cases}$ $b\geq 0$ $\cancel{3b=\sqrt{3b}}^2$

$\cancel{3b}$ $81b^2+$

$2y-1=1$

$y=1$

$2y$

$x+6=9\cdot(2y-1)$

$x+6$

$25b^2$

$25b^2=90$

$b=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$2y-1=\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$y=\frac{3\sqrt{10}-5}{10}$

☒ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N2. $\begin{cases} x-12y=\sqrt{2xy-12y-x+6} \\ x^2-12x+36y^2-36y=45 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)\cdot(x-6)} \\ x^2-12x+36-36+36y^2-36y+9-9=45 \end{cases}$

$\begin{cases} x-12y=\sqrt{(2y-1)\cdot(x-6)} \\ (x-6)^2+9(2y-1)^2=90. \end{cases}$ Пусть $x-6=a \Rightarrow x=a+6$

$2y-1=b. \Rightarrow 2y=b+1$

$12y=6b+6.$

$\begin{cases} a-6b=\sqrt{ab.} \\ a^2+9b^2=90. \end{cases}$ $\underline{a\geq 6b}$ Возведем в квадрат

$a^2-12ab+36b^2=ab.$

$a^2-13ab+36b^2=0.$ Зешим квадратное уравнение по a.

$D=169b^2-144b^2=25b^2.$

I $a_1=\frac{13b+5b}{2}=9b$

II

$a_2=\frac{13b-5b}{2}=4b.$

I $\begin{cases} a\geq 6b \Rightarrow 3b\geq 0 \quad \underline{b\geq 0} \\ a=9b \\ 81b^2+9b^2=90 \quad b^2=1 \quad b=\pm 1, \text{ а т.к. } b\geq 0 \Rightarrow b=1. \Rightarrow y=1 \Rightarrow \end{cases}$

$x-6=9 \quad x=15$

II $\begin{cases} a=4b. \\ a\geq 6b. \quad \underline{b\leq 0} \\ 16b^2+9b^2=90 \quad 25b^2=90. \quad b=\pm\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad b\leq 0 \Rightarrow b=-\frac{3\sqrt{10}}{5}. \end{cases}$

$2y-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \quad 2y=\frac{5-3\sqrt{10}}{5} \quad y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}.$

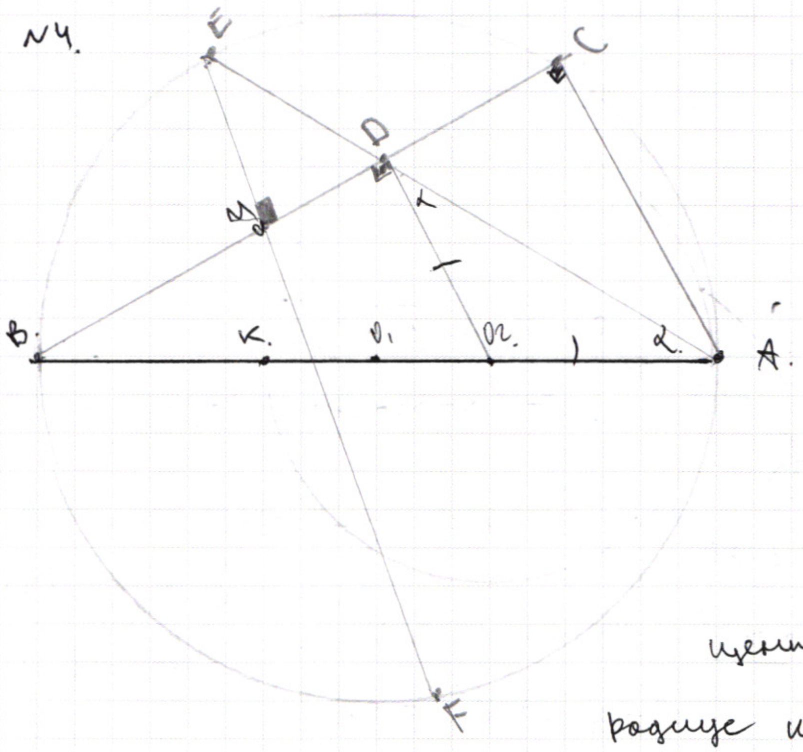
$x-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \quad x=6-\frac{12\sqrt{10}}{5}.=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}$

Ответ: $x=15 \quad y=1.$

$x=\frac{30-12\sqrt{10}}{5}; \ y=\frac{5-3\sqrt{10}}{10}.$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

№4.



Дано: $BD = \frac{17}{2}$ $CD = \frac{15}{2}$

R, r − ? $\angle AFE$ − ?

$S_{\triangle AFE}$ − ?

R − радиус $\omega(O_1)$

r − радиус $w(O_2)$

Решение: 1) Рас-им окружности w и ω. На отрезке AB лежит центр O_1 и центр O_2. 2) Проведем радиус к точке D. Соединим точ A и C. $\angle BDO_2 = \angle BCA = 90^\circ$; $DO_2 \perp BC \Rightarrow EF \parallel DO_2 \Rightarrow \angle BDO_2$ − рад ⇒ 2) Пусть $O_2D = r$; $AB \cap \omega_2 - K$.

AK − диаметр $w \Rightarrow AK = 2r$; AB − диаметр $\omega \Rightarrow = 2R$.

$BK = AB - AK = 2R - 2r$; KO_2 − радиус $= r \Rightarrow BO_2 = 2R - r$.

$DO_2 = r$; $AB = 2R$. Составим подобие $\triangle BDO_2$ и BCA. с общим $\angle DBO_2$. $\frac{BO_2}{AB} = \frac{BD}{BC} \Rightarrow \frac{2R-r}{2R} = \frac{17}{2 \cdot 16}$

$32R - 16r = 17R$. $15R = 16r \Rightarrow \frac{R}{r} = \frac{16}{15} = \begin{matrix} R = 16x \\ r = 15x \end{matrix}$

$\Rightarrow DO_2 = 15x$; $BO_2 = 17x$. По теореме Пифагора в △ BDC: $\left(\frac{17}{2}\right)^2 = \cancel{289x}$ $289x^2 - 225x^2$. $\left(\frac{17}{2}\right)^2 = 64x^2$ $x^2 = \frac{17^2}{2^2 \cdot 8^2}$.

$x = \frac{17}{16} \Rightarrow R = 17$. $r = \frac{255}{16}$.

2) Пусть $\angle O_2AD = \alpha$; т.к. $DO_2 = O_2A \Rightarrow \triangle$ р/б $\Rightarrow \angle O_2DA = \alpha$ т.к. O_2D − радиус, при $DO_2 \parallel EF$; $\angle ADO_2 = \alpha$, как соответственные

3) Т.к. через т. A проходит касательная для 2 окружностей, то по теореме об угле между хордой и касательной $AC \Rightarrow$ дуга AD в ω − дуге AE в $\omega \Rightarrow \cup AD = 180 - 2\alpha$ в w, $\cup AE = 180 - 2\alpha$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$10x - x^2 + |x^2-10x|^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

т.к. $10x-x^2>0$ $x(x-10)<0$ $\Rightarrow x\in(0;10)$.

$\Rightarrow$ модуль $|x^2-10x|$ можем раскрывать как $10x-x^2$.

~~Учитывая~~ Преобразуем данное неравенство

$$3^{\log_3(10x-x^2)} + (10x-x^2)^{\log_3 4} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

• $(10x-x^2)^{\log_3 4} = 3^{\log_3(10x-x^2)^{\log_3 4}} = 3^{\log_3(10x-x^2)\cdot\log_3 4} = 4^{\log_3(10x-x^2)}$

$$3^{\log_3(10x-x^2)} + 4^{\log_3(10x-x^2)} \geq 5^{\log_3(10x-x^2)}$$

Пусть $\log_3(10x-x^2)=t$.

$3^t+4^t\geq 5^t$.

$10x-x^2$ – парабола с ветвями вниз её максимальное значение достигается в точке $x_0=5$.

$\Rightarrow$ при $x=5$ $50-25=25$.

$\Rightarrow$ максимальное значение $\log_3(10x-x^2 = 2\log_3 5$.

Разделим нер-во на 5^t и получим

$\left(\frac{3}{5}\right)^t + \left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1$ Рас-им функцию $f(t)=\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t$

~~т~~ $f'(t)<0 \Rightarrow f(t)$ монотонно убывает.

Заметим, что при $t=2$. $f(2)=1$

Из-за монотонного убывания функции

$f(t)\geq 1 \Rightarrow t\leq 2 < 2\log_3 5 \Rightarrow \log_3(10x-x^2)\leq 2$.

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

4) $\angle BO_2D$ = внешний и равен $= 2\alpha \Rightarrow \Delta BDO_2$ – прямоуг.

$\angle DBO_2 = 90 - 2\alpha \Rightarrow \cup AC = 180 - 4\alpha$ в ω $\Rightarrow \cup EC$ в Ω $= 2\alpha = (180-2\alpha) - (180-4\alpha)$ Заметим, что $\angle EFA$ – вписанный в Ω $= 90 - \alpha$ тогда в ΔEAF по сумме $\angle$ $\angle EAF\ 90^\circ \Rightarrow EF$ – диаметр.

5) тогда $AB \cap EF$ – т. O_1 Пусть $BC \cap EF = M$. Заметим что M – середина BC, E – равноудален от B и C. $\Rightarrow$ ~~BD~~ $\cup BE = \cup EC$. , AE – биссектр $\angle BAC$ в Δ ABC. ~~[illegible]~~

6) Заметим, что $\angle CBA = \angle DBO2 = 90 - 2\alpha$.

$\sin(90-2\alpha) = \frac{15}{17}$. $\cos(90-2\alpha) = \frac{8}{17}$; $tg(90-2\alpha) = \frac{15}{8} = \frac{O_2D}{BD}$, т.к. $O_2D = r \Rightarrow O_2D = \frac{15}{8} \cdot \frac{17}{2} = \frac{255}{16}$.

$\angle AFE = 90 - \alpha \Rightarrow \cos(90-\alpha) = \sin\alpha)$; $\sin(90-2\alpha) = \cos(2\alpha)$

$\cos 2\alpha = 2 \cdot (\cos^2\alpha) - 1 = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{15}{17}$.

$\sin^2\alpha = \frac{1}{17}$ $\sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{17}}$. $\Rightarrow \angle AEF = \arcsin\frac{1}{\sqrt{17}}$

Заметим, что EF – диаметр $\Rightarrow \cos(90-\alpha = \sin\alpha =$

$\frac{AF}{EF} = \frac{AF}{34}$ $AF = 34 \cdot \frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = \frac{EA}{EF} \Rightarrow EA = \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot 34$.

$S_{\Delta EF} = \frac{1}{2} \cdot \frac{34}{\sqrt{17}} \cdot \frac{34 \cdot \sqrt{16}}{\sqrt{17}} = \frac{34 \cdot 34 \cdot 4}{2 \cdot 17 \cdot 1} = 34 \cdot 4 = 156$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} 10x - x^2 > 0 \\ \log_3(10x - x^2) \le \log_3 9 \end{cases} \Rightarrow (3-1)\cdot(10x - x^2 - 9) \le 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} x \in (0;10) \\ 10x - x^2 - 9 \le 0 \end{cases} \Rightarrow x^2 - 10x + 9 \geqslant 0 \quad (x-9)\cdot(x-1) \geqslant 0.$$

$x \in (0;1] \cup [9;10)$

N5 $f(ab) = f(a) + f(b)$

$f(2) = 0$; $f(3) = 0$.

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$ $f(5) = 1$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$.

$f(7) = 1$ $f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$

$f(9) = 0$; $f(10) = f(2) + f(5) = 1$; $f(11) = 2$; $f(12) = 0$

$f(13) = 2$ $f(14) = f(2) + f(7) = 1$; $f(15) = f(5) = 1$

$f(16) = 0$ $f(17) = 4$ $f(18) = 0$ $f(19) = 4$

$f(20) = f(2) + f(2) + f(5) = 1$; $f(21) = 3$; $f(22) = 2$

$f(23) = 5$ $f(24) = 0$; $f(25) = f(5) + f(5) = 2$.

Заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y) = f(x) - f(y) < 0$

Тогда Если $f(x) = 0$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)