МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ____________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}; \qquad \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3y - 2x = \sqrt{3xy - 2x - 3y + 2}, \\ 3x^2 + 3y^2 - 6x - 4y = 4. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)} + 6x \geqslant |x^2 + 6x|^{\log_4 5} - x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD = \frac{5}{2}$, $BD = \frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab) = f(a) + f(b)$, и при этом $f(p) = [p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x; y)$ таких, что $3 \leqslant x \leqslant 27$, $3 \leqslant y \leqslant 27$ и $f(x/y) < 0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a; b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2} \geqslant ax + b \geqslant 8x^2 - 34x + 30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1; 3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR = 2$, $QS = 1$, $PS = \sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

Заметим, что $x^2+6x>0$ из ОДЗ логарифма,

$-6 \quad 0$

Тогда:

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x+x^2 \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}$

Пусть $\log_4(x^2+6x)=t$

$3^t+4^t \geq 5^t \quad |:5^t>0$

$\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t \geq 1.$

Рассмотрим $f(t)=\left(\frac{3}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t$

Заметим, что $f(t)$ $f'(t)<0 \Rightarrow$ монотонна убывающ ф-ция, тогда

$f(2)=1.$

$f(t)\geq 1 \Leftrightarrow t\leq 2 < 2\log_4 5$

$\log_4(x^2+6x)\leq 2$

$\log_4(x^2+6x)\leq \log_4 16$

$x^2+6x-16\leq 0$

$x_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{36+64}}{2}=\left[\begin{array}{l}2\\-8\end{array}\right.$

$-8 \quad 2$

~~Учитывая ОДЗ~~

Учитывая ОДЗ

$x\in[-8;-6)\cup(0;2]$.

~~Ответ: [0;4]~~ | Ответ: $[-8;-6)\cup(0;2]$ | ~~$x\in(0;4]$~~.

№2 $\begin{cases} 3y-2x = \sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4. \end{cases}$

$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{x(3y-2)-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)} \\ 3(x-1)^2-3+\frac{(3y-2)^2}{3}-\frac{4}{3}=4 \end{cases}$

Пусть $(x-1)=a$

$(3y-2)=b$ Тогда:

~~$3y-2+2-2x=$~~ $\begin{cases} b-2a=\sqrt{ab}. \ (1) \\ 3a^2+\frac{b^2}{3}=\frac{25}{3}. \end{cases}$

Возведем ур-е (1) в квадрат:

$\left[\begin{cases} b \geq 2a \\ (b-2a)^2=ab \end{cases} \\ 9a^2+b^2=25. \right] \quad \begin{cases} b \geq 2a \\ b^2-4ab+4a^2=ab \\ 9a^2+b^2=25. \end{cases} \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} b \geq 2a \\ b^2-5ab+4a^2=0 \ (2) \\ 9a^2+b^2=25. \end{cases}$

Найдем корни ур-е (2): $b_{1,2}=\frac{5a \pm \sqrt{9a^2}}{2}=\left[\begin{array}{l} 4a \\ a. \end{array}\right.$

$\begin{cases} b \geq 2a \\ (b-4a)(b-a)=0 \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$ Рассмотрим два случая: пусть $b=4a$.

Тогда $\begin{cases} 4a \geq 2a \\ 9a^2+16a^2=25 \end{cases}$

☐ черновик ☑ чистовик
(Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\begin{cases} a \geq 0 \\ a^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow a = 1. \Rightarrow b = 4.$

пусть $b = a$, тогда

$\begin{cases} a \geq 2a \\ 9a^2 + a^2 = 25 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \leq 0 \\ a^2 = \frac{25}{10}. \end{cases} \Rightarrow a = -\frac{5}{\sqrt{10}}. \Rightarrow$

$\Rightarrow b = -\frac{5}{\sqrt{10}}.$ Получим решения $(a; b) = (1; 4)$ (*)

~~Возвращ~~ (1*) $(a; b) = \left(-\frac{5}{\sqrt{10}}; -\frac{5}{\sqrt{10}}\right).$

Возвращаясь к замене (*):

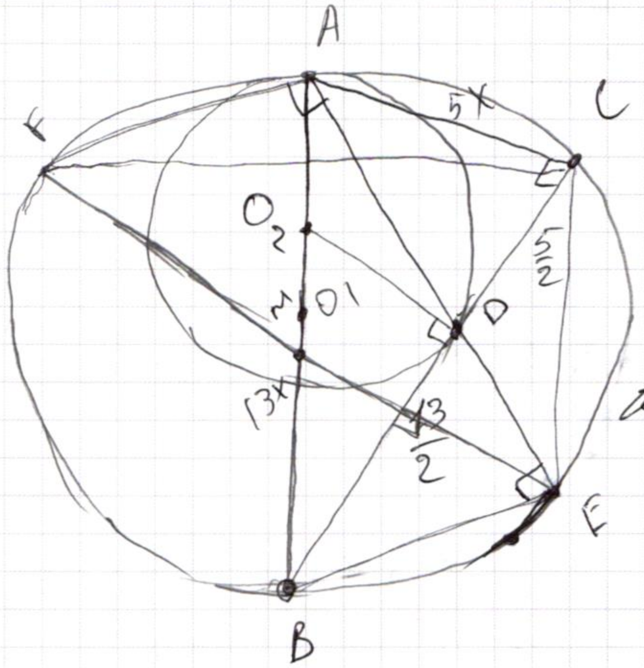
$\begin{cases} x - 1 = 1 \\ 3y - 2 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2. \end{cases}$

Возвращаясь к замене (1*):

$\begin{cases} (x-1) = -\frac{5}{\sqrt{10}} \\ 3y - 2 = -\frac{5}{\sqrt{10}}. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3\sqrt{10}}. \end{cases}$

Ответ: $\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 1 - \frac{5}{\sqrt{10}} \\ y = \frac{2}{3} - \frac{5}{3\sqrt{10}}. \end{cases}$

№4.



Найти: R, r; $\angle AFE$; S_{AEF}

$CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$.

1) Проведем радиус O_2D, где O_2 – центр окр ω.

~~Обозначим в р/б ΔO_2AD угло~~

2) ΔAO_2D – р/б. пусть $\angle ADO_2 = \alpha \Rightarrow \angle DAO_2 = \alpha \Rightarrow$
$\Rightarrow \angle AO_2D = 180 - 2\alpha$.

3) ~~т.к радиус O_2D~~ $O_2D \perp BC$ (по св-ву кас кас)

т.к $EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel DO_2 \Rightarrow \angle FEA = \alpha$ (как соотв)

4) т.к в т. A общая касаб. $\Rightarrow$ между кас. и хордой AD угол такой же как между кас и хордой AC. $\Rightarrow$ дуга AD в окр ω равна дуге AE в окр Ω. Поэтому дуга $AD = 180 - 2\alpha$ в окр ω, и дуга $AE = 180 - 2\alpha$ в окр Ω.

5) $\angle BO_2D$ – внешний и равен 2α. $\Rightarrow$
$\Rightarrow \Delta BDO_2$ – прям. и $\angle DBO_2 = \alpha = \overset{\frown}{AC}$
$= 90 - 2\alpha$. $\Rightarrow \overset{\frown}{AC} = 180 - 4\alpha$. в $\Omega \Rightarrow \overset{\frown}{EC}$ в окр Ω равна $2\alpha = 180 - 2\alpha - 180 + 4\alpha$.

6) т.к $\angle EFA$ – впис и $\angle EFA = 90 - \alpha$. Тогда, в ΔEAF, $\angle EAF$ – прямой $\Rightarrow EF$ – диаметр.

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

7) ~~Заметим, что диаметр~~

Пусть диаметры AB и EF пересек. в т. O_1 – центр окр Ω. Обозначим пересеч. BC и EF т. M, заметим, что M – середина BC и т. E равноудалена от B и C (т.к. $BC \perp EF$)

8) Поэтому, дуги $\breve{BC}$ и $\breve{EC}$ равны и AE – бисс. $\angle BAC$, в $\triangle ABC$ – прям. По св-ву бисс

$$\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD} \Rightarrow \frac{2AC}{5} = \frac{2AB}{13} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{5}{13} \Rightarrow AC = 5x$$

$$AB = 13x.$$

т.к. $CD = \frac{5}{2}$; $BD = \frac{13}{2}$. $\Rightarrow$ по т. Пифр.

из $\triangle ABC$: $169x^2 = 25x^2 + 81$

$$x^2 = \frac{81}{144}.$$

$x = \frac{9}{12}$, отсюда

$AC = \frac{5 \cdot 9}{12}$; $AB = \frac{13 \cdot 9}{12} = 2R$ окр Ω. $\Rightarrow$

$$\Rightarrow R = \frac{13 \cdot 9}{24} = \frac{13 \cdot 3}{8}.$$

9) Заметим, что $\angle CBA = \angle DBO_2 = 90 - 2\alpha$

$\sin 90 - 2\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow \cos 2\alpha = \frac{12}{13}$. из $\triangle O_2DB$:

$tg(90 - 2\alpha) = \frac{O_2D}{BD} = \frac{5}{12} \Rightarrow O_2D = \frac{5}{12} \cdot \frac{13}{2} = \frac{5 \cdot 13}{24}$.

$O_2D = r$ окр ω

10) $\angle AFE = 90 - \alpha \Rightarrow \cos(90-\alpha) = \sin\alpha$.

$\sin(90 - 2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{5}{13} \Rightarrow$

~~$\Rightarrow \sin^2\alpha = \dots \Rightarrow \sin\alpha = \dots$~~

$\Rightarrow \sin^2\alpha = \frac{4}{13} \Rightarrow \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}}$.

$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}}$.

Тогда $\angle AEF = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$.

11) Заметим, что EF - диаметр окр $\Omega \Rightarrow$

$\Rightarrow$ из $\triangle AEF$: $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha = \frac{AF}{EF} = \frac{AF \cdot 24}{13 \cdot 9} \Rightarrow$

$\Rightarrow \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{AF \cdot 24}{13 \cdot 9} \Rightarrow AF = \frac{13 \cdot 9 \cdot 2}{24\sqrt{13}} = \frac{39}{4\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{4}$.

~~$AE = \sqrt{\frac{9 \cdot 13}{16}}$~~ $AE = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9}{64} - \frac{9 \cdot 13}{16}} = \sqrt{\frac{13^2 \cdot 9}{64} - \frac{9 \cdot 13 \cdot 4}{64}} =$

$= \sqrt{\frac{13 \cdot 9 (13-4)}{64}} = \frac{9\sqrt{13}}{8}$.

$S_{AEF} = \frac{9\sqrt{13}}{8} \cdot \frac{3\sqrt{13}}{4} \cdot \frac{1}{2} = \frac{13 \cdot 27}{16}$.

Ответ: $R = \frac{13 \cdot 3}{8}$

$r = \frac{5 \cdot 13}{24}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{13}}\right)$

$S_{AEF} = \frac{13 \cdot 27}{16}$.

№1.
$$\begin{cases} \sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \sin(2\alpha + 4\beta) + \sin 2\alpha = -\frac{8}{17}. \quad (2) \end{cases}$$

$\downarrow$

по сумме синусов из ур-я (2):

$2\sin\left(\frac{2\alpha + 4\beta + 2\alpha}{2}\right) \cdot \cos\left(\frac{2\alpha + 4\beta - 2\alpha}{2}\right) = -\frac{8}{17}$.

$2\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{8}{17}$.

$\sin(2\alpha + 2\beta) \cdot \cos(2\beta) = -\frac{4}{17}$.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$-\frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos(2\beta) = -\frac{4}{17}$.

$\cos 2\beta = \frac{4\sqrt{17}}{17} = \frac{4}{\sqrt{17}}$.

т.к $\cos 2\beta$ лежит в первой и четвертой четверти $\Rightarrow 1 + tg^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta}$

$tg^2 2\beta = \frac{17}{16} - 1 = \frac{1}{16}$.

$tg\, 2\beta = \pm\frac{1}{4}$.

$\sin^2 2\beta = 1 - \cos^2 2\beta = 1 - \frac{16}{17} = \frac{1}{17}$.

~~$\sin 2\beta = \pm\frac{1}{4}$~~ $\sin 2\beta = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin 2\alpha \cdot \cos 2\beta + \sin 2\beta \cdot \cos 2\alpha$.

$$\left[\begin{array}{l} \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\alpha + \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \\ \frac{4}{\sqrt{17}} \cdot \sin 2\alpha - \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \cos 2\alpha = -\frac{4}{\sqrt{17}} \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 4\sin 2\alpha + \cos 2\alpha = -4 \\ 4\sin 2\alpha - \cos 2\alpha = -4 \end{array}\right.$$

~~$4\sin^2\alpha - 4\cos^2\alpha +$~~ ~~$8\sin\alpha\cos\alpha + \cos^2\alpha - \sin^2\alpha + 4\cos^2\alpha$~~

$\downarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$$\left[\begin{array}{l} 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\cos^2\alpha-\sin^2\alpha+4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=0 \\ 8\sin\alpha\cdot\cos\alpha+\sin^2\alpha-\cos^2\alpha+4\cos^2\alpha+4\sin^2\alpha=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5\cos^2\alpha+3\sin^2\alpha+8\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0 \quad \Big| : \cos^2\alpha\neq 0. \\ 5\sin^2\alpha-3\cos^2\alpha+8\sin\alpha\cdot\cos\alpha=0 \end{array}\right.$$

$$\left[\begin{array}{l} 5+3\,tg^2\alpha+8\,tg\,\alpha=0 \quad (1) \\ 5\,tg^2\alpha-3+8\,tg\,\alpha=0 \end{array}\right.$$

Решим ур-е (1).

$3\,tg^2\alpha+8\,tg\,\alpha+5=0$

$tg_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64-12\cdot 5}}{6}=\dfrac{-8\pm 2}{6}=\left[\begin{array}{l}-\frac{5}{3}\\ -1\end{array}\right.$

Решим ур-е (2):

$5\,tg^2\alpha+8\,tg-3=0$

$tg_{1,2}=\dfrac{-8\pm\sqrt{64+12\cdot 5}}{10}=-\dfrac{4}{5}\pm\dfrac{\sqrt{124}}{10}.$

Ответ: $tg\,\alpha=-\frac{5}{3}$

$tg\,\alpha=-1$

$tg\,\alpha=-\frac{4}{5}\pm\frac{\sqrt{124}}{10}.$

N5 $f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(p)=[p/4]$ для $\forall$ p-простого

$3\le x\le 27$

$3\le y\le 27$

$f\left(\frac{x}{y}\right)<0.$

☐ черновик ☑ чистовик Страница №8

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

т.к. $y, x \in [3; 27] \Rightarrow f(3) = \left[\frac{3}{4}\right] = 0$

$f(2) = \left[\frac{2}{4}\right] = 0.$

$f(4) = f(2) + f(2) = 0$

$f(5) = \left[\frac{5}{4}\right] = 1.$

$f(6) = f(2) + f(3) = 0$

$f(7) = 1.$

$f(8) = f(2) + f(2) + f(2) = 0$

$f(9) = f(3) + f(3) = 0.$

$f(10) = f(2) + f(5) = 1.$

$f(11) = \left[\frac{11}{4}\right] = 2.$

$f(12) = f(4) + f(3) = 0.$

$f(13) = \left[\frac{13}{4}\right] = 3.$

$f(14) = f(2) + f(7) = 1$

$f(15) = f(3) + f(5) = 1$

$f(16) = 0$

$f(17) = 4$

$f(18) = 0$

$f(19) = 4.$

$f(20) = 1.$

$f(21) = 1$

$f(22) = 2$

$f(23) = 5$

$f(24) = 0$

$f(25) = 2$

$f(26) = 3$

$f(27) = 0$

$\Rightarrow$

Тогда, заметим, что $f\left(\frac{x}{y}\right) = f(x) + f(y^{-1}) =$
$= f(x) - f(y) < 0$

1) Пусть $f(x) = 0$, тогда 9 комбинаций $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) > 0$ – 16 комб

2) Пусть $f(x) = 1$, тогда 8 комбинаций $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) > 1$ (8 комб).

3) Пусть $f(x) = 2$, тогда 3 комбинации $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) > 2$ – 5 комбинаций

4) Пусть $f(x) = 3$, тогда 2 комбинации $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) > 3$ – 3 комб.

5) Пусть $f(x) = 4$, тогда 2 комбинации $\Rightarrow$
$\Rightarrow f(y) = 5$ – 1 комб.

Теперь посчитаем все комбинации:
$9 \cdot 16 + 8 \cdot 8 + 3 \cdot 5 + 2 \cdot 3 + 2 = 231.$
Ответ: 231.

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3. $3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+3^{\log_4(x^2+6x)} \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-6x.$

т.к под модулем x^2+6x, а $x^2+6x>0$

$x \in (\;\; -6 \;\;\; 0 \;\;)$

то x^2+6x всегда >0.

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-x^2.$

$x^2+6x \geq (x^2+6x)^{\log_4 5}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

~~$x^2+6x=t$~~

~~$t \geq t^{\log_4 5}-3^{\log_4 t}.$~~

$\left(\frac{4}{5}\right)^{\log_4}$

$4^{\log_4(x^2+6x)} \geq 5^{\log_4(x^2+6x)}-3^{\log_4(x^2+6x)}$

$\log_4(x^2+6x)=t.$

$\log_4(x^2+6x)$

$x^2+6x>0$

$4^t \geq 5^t-3^t$

$4^t+3^t \geq 5^t \quad |:5^t>0$

$\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t \geq 1.$

649

Рассмотрим ф-цию $f(t)=\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t.$

Заметим, что $f(t)$ убывает.

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N $\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$

$3x^2-6x+3y^2-4y=4$

$x(3x-6)+y(3y-4y)$

$b-6a=\sqrt{ab}$

$9a^2+b^2=90$

$9a^2+b^2=90.$

$3y-2x=\sqrt{3xy}$

$(x-1)^2=x^2-2x+1$

$\begin{cases} (3y-2x)^2=ab \\ 3y\geq 2x \\ b^2-13ab+36a^2=0 \\ 9a^2+b^2=90. \end{cases}$

$3y-2x=\sqrt{x(3y-2x)}$

$x(3y-2)-3y+2$

$(x-1)(3y-2)$

$\begin{cases} x^2-2x+1=a^2 \\ y^2-12y+36=b^2 \end{cases}$

$3y-2x=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$3y-2-2x+2=\sqrt{(x-1)(3y-2)}$

$9a^2+6b^2=90$

$\begin{cases} 3y-2=a \\ x-1=b \end{cases}$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{b^2}{3}=3+4+\frac{4}{3} \end{cases}$

$9y^2-12y+4=a^2$

$3y^2-4y+\frac{4}{3}=\frac{a^2}{3}.$

$\begin{cases} a-2b=\sqrt{ab} \\ 3a^2+\frac{b^2}{3}=\frac{25}{3}. \end{cases}$

$\begin{cases} (a-2b)^2=ab \\ a\geq 2b \\ 9a^2+b^2=25. \end{cases}$

☑ черновик ☐ чистовик

Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$\begin{cases} a^2-4b+4b^2=ab \\ a\geq 2b \\ 9a^2+b^2=25 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3y-2=a \\ x-1=b \end{cases}$$

$$a\geq 2b$$

$$\Rightarrow 9a^2+6ab+b^2=25-6ab$$

$$\cancel{9a^2+6a^2-24b+24b^2+b^2=25}$$

$$15a^2-24b+25b^2=25.$$

$$(3a+b)^2=25-6ab \quad \begin{cases} b-6a\geq 0 \\ b^2-13ab+=9a^2-b^2=90 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a\geq 2b \\ a^2-4b+4b^2=ab. \end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

$$\left[\begin{array}{l} b=9a \longrightarrow 9a^2+81a^2=90 \\ b=4a \end{array}\right.$$

$b=$

$a=1$

$b=9.$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

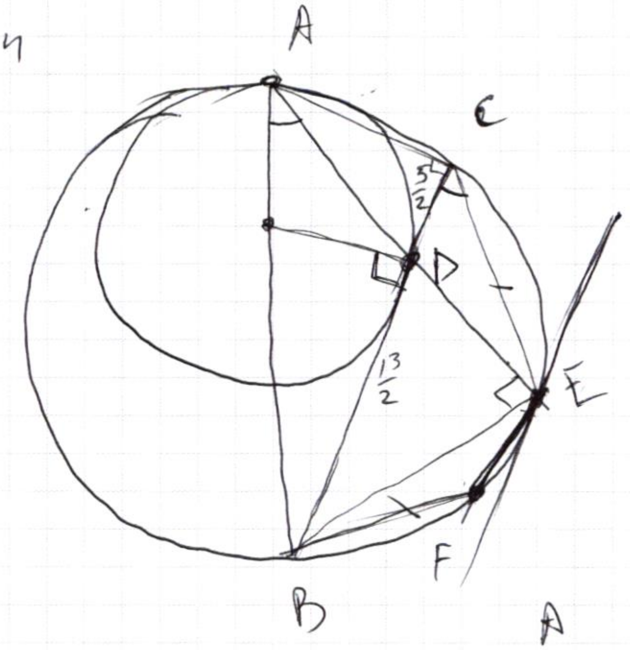
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

N4



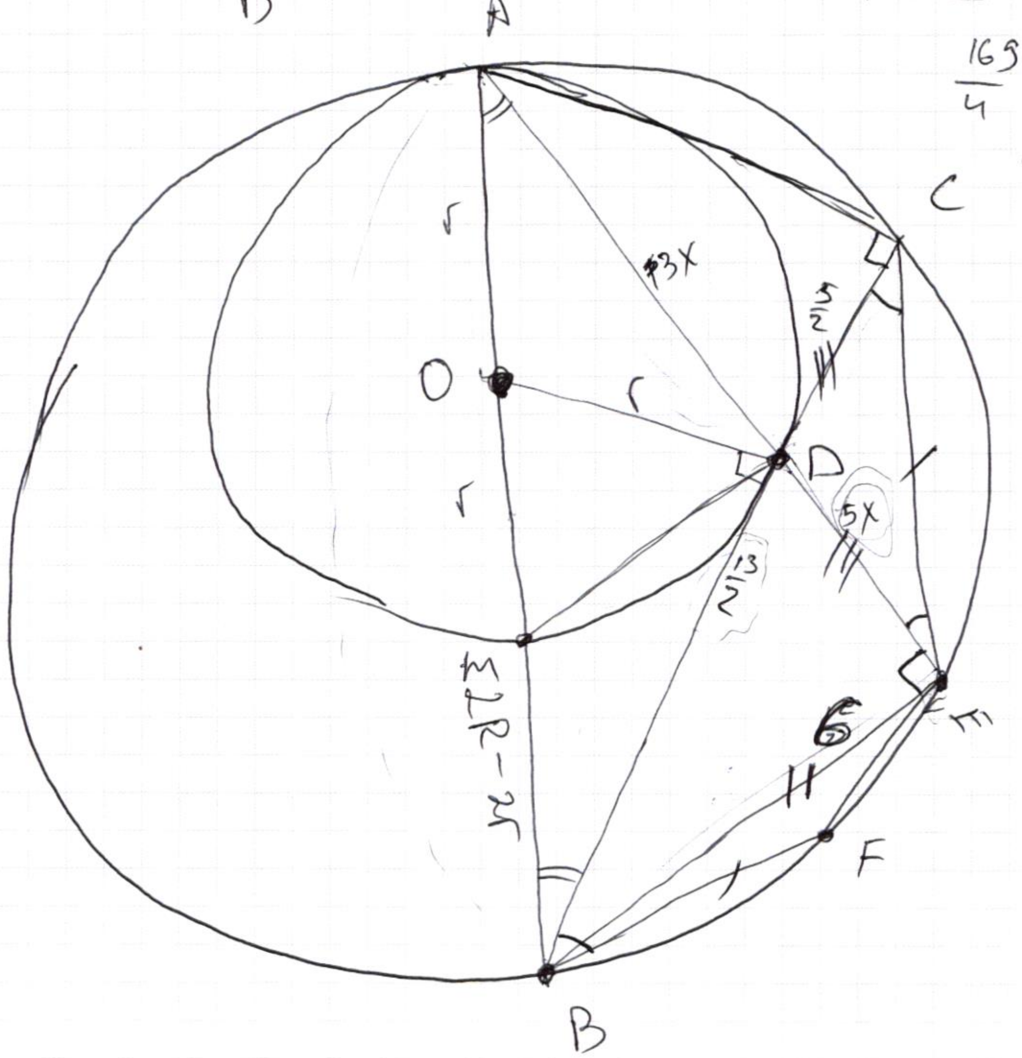
$$\frac{13}{2AD} = \frac{5}{2DE}$$

$$\frac{AD}{DE} = \frac{13}{5}.$$

$$13\cdot 5x^2 = \frac{5\cdot 13}{4}$$

$$x^2 = \frac{1}{4}$$

$$\boxed{x = \frac{1}{2}}$$



$$\frac{169}{4} = \frac{25}{4} + y^2$$

$$y^2 = \frac{144}{4}$$

$$y = \frac{12}{2}.$$

$$\frac{13}{2} + \frac{5}{2} = 9$$

$$AB = \sqrt{81+36} = \sqrt{107}$$

$$R = \frac{\sqrt{107}}{2}.$$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$$(2R-r)^2 = r^2 + \frac{169}{4}.$$

$$107 - \sqrt{107}\cdot r + \cancel{r^2} = \cancel{r^2} + \frac{169}{4}$$

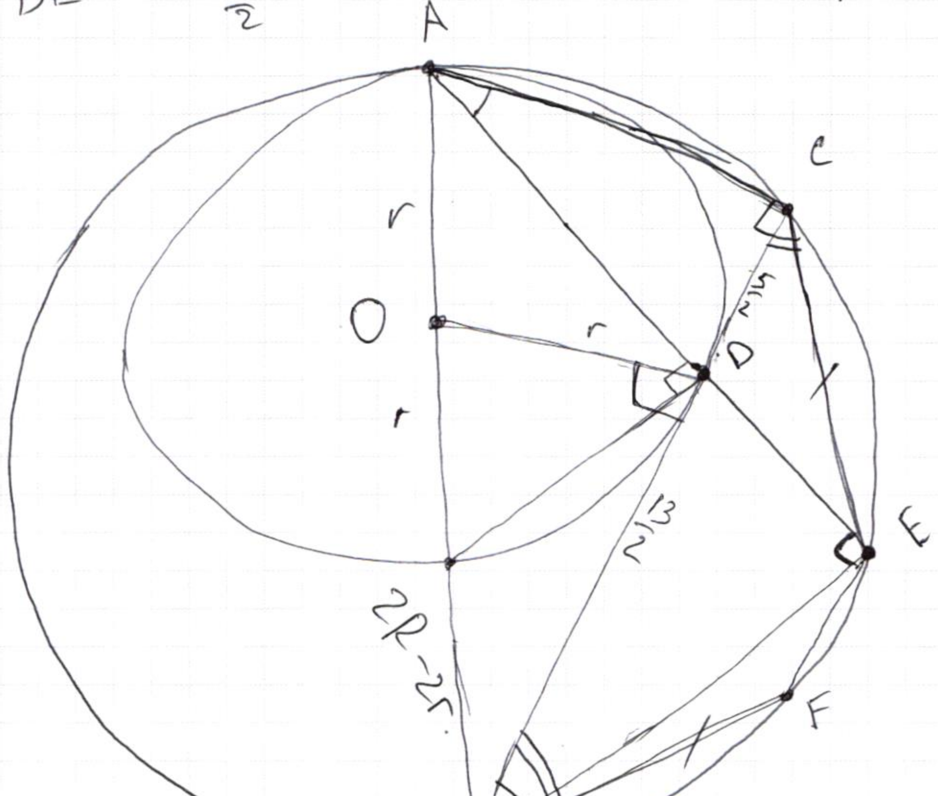
$$r = \frac{169}{4} - 107 + \sqrt{107}\,r.$$

$$r(\sqrt{107}-1) = 107 - \frac{169}{4}$$

$$r = \frac{107 - \frac{169}{4}}{\sqrt{107}-1}$$

1) $\triangle ADC \sim \triangle BDE$ (по 3-м сторонам.)

$$\frac{\frac{5}{2}}{DE} = \frac{AD}{\frac{13}{2}} \Rightarrow DE \cdot AD = \frac{5\cdot 13}{4}.$$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

и $f(t)=1$.

$$b_{1,2}=\frac{5a\pm\sqrt{25a^2-16a^2}}{2}=\frac{5a\pm 3a}{2}=\left[\begin{array}{l}4a\\ a\end{array}\right.$$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)