МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 4 ШИФР ____________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases} y-6x=\sqrt{xy-6x-y+6}, \\ 9x^2+y^2-18x-12y=45. \end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$\left|x^2-26x\right|^{\log_5 12}+26x\geqslant x^2+13^{\log_5\left(26x-x^2\right)}.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=12$, $BD=13$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $4\leqslant x\leqslant 28$, $4\leqslant y\leqslant 28$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{8-6x}{3x-2}\geqslant ax+b\geqslant 18x^2-51x+28$$

выполнено для всех x на промежутке $\left(\frac{2}{3};2\right]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $TXYZ$, вершина Y которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра TY. Известно, что $XY=\sqrt{3}$, $TX=\sqrt{2}$, $TZ=2$. Найдите длину ребра XZ. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

© МФТИ, 2022

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№2.

$$\begin{cases} y - 6x = \sqrt{xy - 6x - y + 6} \\ 9x^2 + y^2 - 18x - 12y = 45 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y - 6x = \sqrt{(x-1)(y-6)} \\ 9(x-1)^2 + (y-6)^2 = 90 \end{cases}$$

$x - 1 = \alpha$, $y - 6 = \beta$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta + 6 - 6\alpha - 6 = \sqrt{\alpha\beta} \\ 9\alpha^2 + \beta^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \beta - 6\alpha = \sqrt{\alpha\beta} & (\mathrm{I}) \\ 9\alpha^2 + \beta^2 = 90 & (\mathrm{II}) \end{cases}$$

возведём уравнение I в квадрат.

$$\begin{cases} \beta - 6\alpha \geq 0 \\ \beta^2 - 12\alpha\beta + 36\alpha^2 = 0 \\ 9\alpha^2 + \beta^2 = 90 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \beta \geq 6\alpha \\ (\beta - 9\alpha)(\beta - 4\alpha) = 0 \\ 9\alpha^2 + \beta^2 = 90 \end{cases}$$

Рассмотрим 2 случая

$\beta = 9\alpha \Rightarrow 9\alpha^2 + 81\alpha^2 = 90 \Rightarrow \alpha = \pm 1$, учитывая $\beta \geq 6\alpha \Rightarrow$ имеем корд

$\alpha = 1$, $\beta = 9$ 1 случай

$\beta = 4\alpha \Rightarrow 9\alpha^2 + 16\alpha^2 = 90 \Rightarrow \alpha = \pm \cancel{\frac{3\sqrt{10}}{5}} \Rightarrow 3\frac{\sqrt{10}}{5}$, учитыв $\beta \geq 6\alpha \Rightarrow \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{5}$

$\beta = -\frac{12\sqrt{10}}{5}$ 2 случай.

Сделали обратную замену

1) $\begin{cases} x-1=1 \\ y-6=9 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=15 \end{cases}$ 1 случай

$\begin{cases} x-1=-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y-6=-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=1-\frac{3\sqrt{10}}{5} \\ y=6-\frac{12\sqrt{10}}{5} \end{cases}$ 2 случай

Ответ: $(x;y)=(2;15);\ \left(1-\frac{3\sqrt{10}}{5};\ 6-\frac{12\sqrt{10}}{5}\right)$

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

т.к. ОДЗ $\log_5(26x-x^2) \Rightarrow 26x-x^2>0 \Rightarrow x\in(0;26) \Rightarrow |x^2-26x|=26x-x^2$

по св. логарифма ~~...~~ $a^{\log_b c}=c^{\log_b a} \Rightarrow$

$\Rightarrow (26x-x^2)^{\log_5 12}+(26x-x^2) \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+(26x-x^2)^{\log_5 5} \geq$ ~~$13^{\log}$~~ ~~...~~ $13^{\log_5(26x-x^2)}$

$12^{\log_5(26x-x^2)}+5^{\log_5(26x-x^2)} \geq 13^{\log_5(26x-x^2)}$

Пусть $\log_5(26x-x^2)=n$ ~~...~~ вершина $26x-x^2$ при $x=13 \Rightarrow$
$\Rightarrow \max(26x-x^2)=169$

$\Rightarrow n \leq \log_5 169 = 2\log_5 13$

$12^n+5^n \geq 13^n \quad |:13^n,\ 13^n>0$

$\left(\frac{12}{13}\right)^n+\left(\frac{5}{13}\right)^n \geq 1$, рассмотрим функцию $f(n)=\left(\frac{12}{13}\right)^n+\left(\frac{5}{13}\right)^n$

$f'(n)<0 \Rightarrow f(n)$ – монотонно убывает, $f(2)=1 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ в силу монотонного убывания $f(n)\geq 1$ тогда, когда

~~...~~ $n \leq 2 < 2\log_5 13 \Rightarrow$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\Rightarrow \log_5(26x-x^2) \le 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow \begin{cases} 26x-x^2 \le 25 \\ 26x-x^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2-26x+25 \geq 0 \\ x \in (0;26) \end{cases}$

$x \in (0;1] \cup [25;26)$

Ответ: $x \in (0;1] \cup [25;26)$

№4.

$CD=12 \quad BD=13$

Пусть $\angle MED=\alpha$

~~Проведём DO_2HEF~~

~~$\Rightarrow EF$ ... $O_2 \perp BC$~~

1) Проведём радиус O_2D в ω (O_2 — центр ω)

Обозначим в равнобедренном $\triangle O_2AD$ $\angle ADO_2=\alpha \Rightarrow$ $\Rightarrow \angle O_2AD=\alpha \Rightarrow \angle DO_2A=180-2\alpha$

2) т.к. радиус O_2D в точке касания D $\Rightarrow O_2D \perp BC$, т.к. $EF \perp BC \Rightarrow EF \parallel DO_2$

$\Rightarrow \angle FEA=\alpha$, как соответственный углу $\angle O_2DA$

3) т.к. в точке A общая кас. $\Rightarrow$ между кас. и хордой AD угол такой же, как между кас. и хордой AC $\Rightarrow \cup AD$ в ω равна $\cup AE$ в Ω. Поэтому дуга AD равна $180-2\alpha$ в ω, дуга $AE=180-2\alpha$ в Ω.

4) угол $\angle \cancel{BOD}$ $\angle BO_2D$ внешний и равен 2α => $\triangle BDO_2$ — прямоугольный и угол $\angle \cancel{BOD}$ $\angle DBO_2 = 90-2\alpha$ => $\cup AC = 180-4\alpha$ в Ω => $\cup EC = 2\alpha$ = $=(180-2\alpha)-(180-4\alpha)$.

5) Заметим, что $\angle EFA$, вписанный в Ω равен $90-\alpha$, тогда получим угол в $\triangle EAF$ $\angle EAF = 90$ => EF — диаметр.

6) тогда диаметры AB и EF пересекаются в точке O_1 (O_1 — центр Ω). Обозначим пересечение BC и EF через M, заметим, что M — ~~c~~ середина BC, E равноудалена от B и C т.к хорда $BC \perp EF$ — диаметр.

7) Поэтому дуги BE и EC равны и AE — биссектриса угла в пр. $\triangle ABC$. По св. биссектрисы: $\frac{AC}{CD} = \frac{AB}{BD}$ => $=> AC = 12n$, $AB = 13n$ т.к $CD = 12$, $BD = 13$ => по т. Пифагора $BC = 5n$ => $5n = 25$ => $n = 5$, $AB = 13n = 65$, $AC = 12n = 60$.

Поэтому R (радиус Ω) $= 65/2$

8) Заметим, что $\angle CBA = \angle DBO_2 = 90-2\alpha$

$\sin(90-2\alpha) = \frac{12}{13}$ => $\cos(90-2\alpha) = \frac{5}{13}$ => Из пр. $\triangle O_2DB$ получаем $tg(90-2\alpha) = \frac{12}{5} = O_2D / BD$, т.к $O_2D = r$ (r — радиус ω) => $O_2D = \frac{12}{5} \cdot 13 = 31{,}2$

9) $\angle AFE = 90-\alpha$ => $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha$, $\sin(90-2\alpha) = \cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = \frac{12}{13}$ => $\sin^2\alpha = \frac{1}{26}$ => $\sin\alpha = \sqrt{\frac{1}{26}}$ => $\cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{26}}$ => $\angle AEF = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$

10) Заметим, что EF — диаметр Ω => из пр. $\triangle AEF$ $\cos(90-\alpha) = \sin\alpha = AF : EF = AF/65$ => $AF = \frac{65}{\sqrt{26}}$. $\sin(90-\alpha) = \cos\alpha = EA : EF$ => $EA = 65 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \cancel{\frac{325}{\sqrt{26}}}$

$S_{\triangle EAF} = \frac{1}{2} \cdot EA \cdot AF = \frac{1}{2} \cdot \frac{65}{\sqrt{26}} \cdot 65 \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{65^2 \cdot 5}{26 \cdot 2}$

Ответ. $R = \frac{65}{2}$ $r = \frac{12 \cdot 13}{5} = \frac{156}{5}$ $\angle AFE = \arcsin\frac{1}{\sqrt{26}}$ $S_{\triangle AEF} = \frac{65^2 \cdot 5}{52}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№1.

$\sin(2\alpha+2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha = -\frac{2}{17}$ $\quad tg\alpha - ?$

$2\sin\left(\frac{2\alpha+4\beta+2\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{2\alpha+4\beta-2\alpha}{2}\right) = -\frac{2}{17}$

$2\sin(2\alpha+2\beta)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$2\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)\cdot\cos 2\beta = -\frac{2}{17}$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}}$ => 1 и 4 четверти

$\Rightarrow 1+tg^2 2\beta = \frac{1}{\cos^2 2\beta} = 17 \Rightarrow tg\, 2\beta = \pm 4$

$\cos 2\beta = \frac{1}{\sqrt{17}} \Rightarrow \sin 2\beta = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha+2\beta) = \sin 2\alpha\cos 2\beta + \cos 2\alpha \sin 2\beta$

$\left[\begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha + \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \\ \frac{1}{\sqrt{17}}\sin 2\alpha - \frac{4}{\sqrt{17}}\cos 2\alpha = -\frac{1}{\sqrt{17}} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \sin 2\alpha + 4\cos 2\alpha = -1 \\ \sin 2\alpha - 4\cos 2\alpha = -1 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 2\sin\alpha\cos\alpha + 4\cos^2\alpha - 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \\ 2\sin\alpha\cos\alpha - 4\cos^2\alpha + 4\sin^2\alpha + \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 0 \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} 5\cos^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\sin^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \\ 5\sin^2\alpha + 2\sin\alpha\cos\alpha - 3\cos^2\alpha = 0 \quad |:\cos^2\alpha \end{array}\right. \Rightarrow$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} -3tg^2\alpha + 2tg\alpha + 5 = 0 \\ 5tg^2\alpha + 2tg\alpha - 3 = 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = 5/3 \\ tg\alpha = -1 \\ tg\alpha = -\frac{3}{5} \end{array}\right.$

Ответ: $tg\alpha = -1$; $\frac{5}{3}$; $-\frac{3}{5}$

☐ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

МФТИ

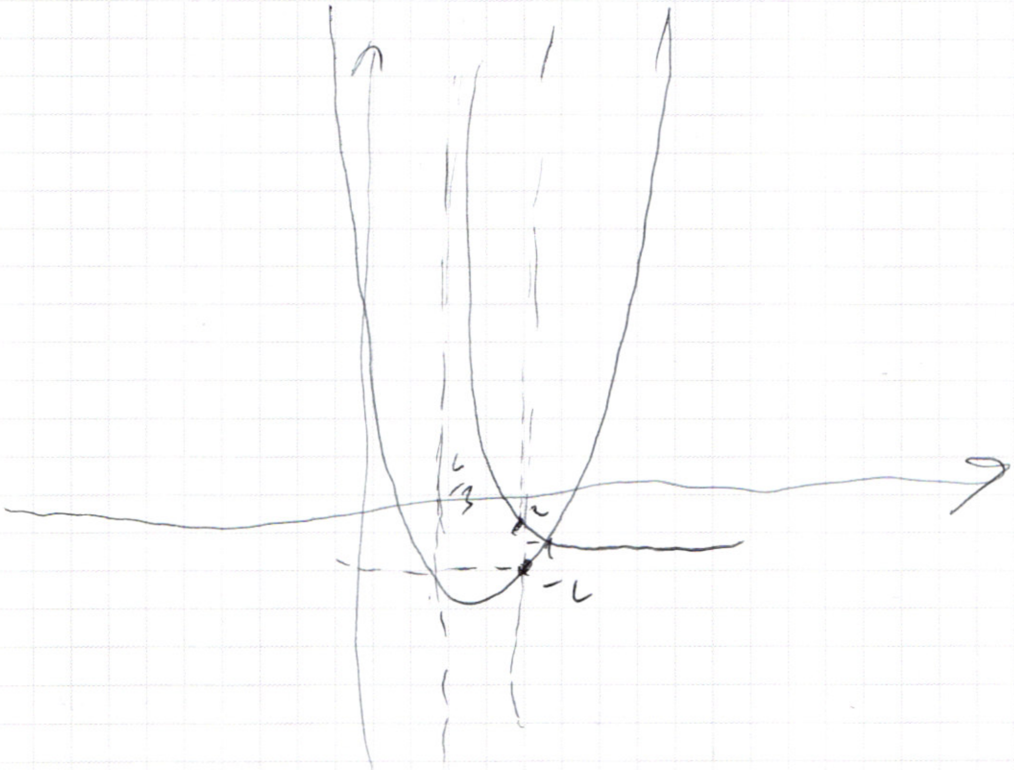
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

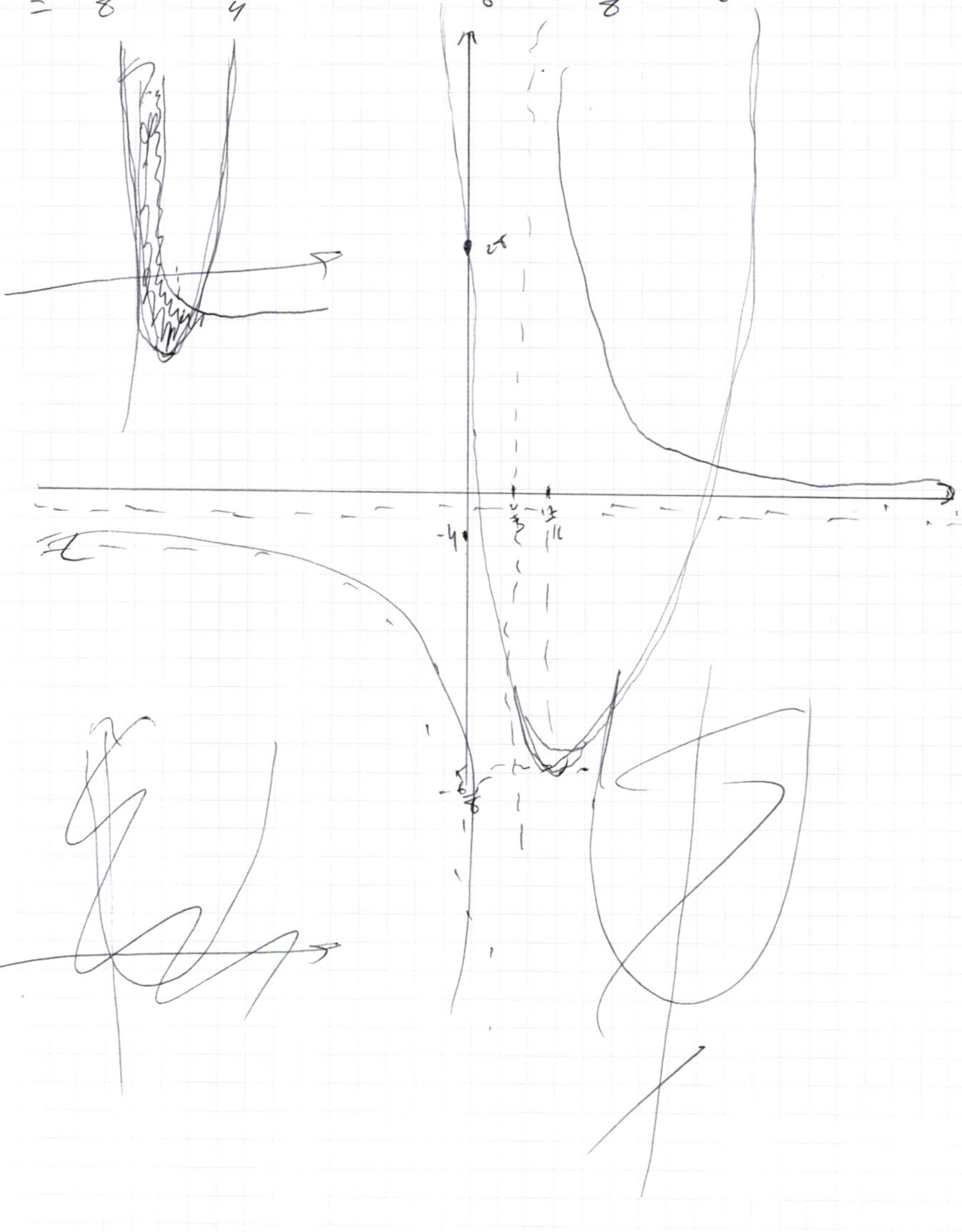
(Нумеровать только чистовики)

$28 \cdot 8 = 160 + 64 = 224$

№6. $f(x) = \frac{8-6x}{3x-2} = -2 + 4/(3x-2)$

$g(x) = 18x^2 - 51x + 28$ $\quad g\left(\frac{17}{12}\right) = \frac{18 \cdot 17^2}{2 \cdot 3^2 \cdot 4^2} - \frac{51 \cdot 17}{12} + 28 =$

$= \frac{289}{8} - \frac{289}{4} + 28 = 28 - \frac{289}{8} = \frac{224-289}{8} = -\frac{65}{8}$



№ 1.

~~$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$~~

~~$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$~~

~~$2\sin\alpha\cos\alpha(1-2\sin^2\alpha\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cos\beta(2\sin^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$~~

~~$4\cos^3\beta\sin\alpha\ 2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin^3\beta$~~

$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin 2\alpha\cos 2\beta+\sin 2\beta\cos 2\alpha=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(2\cos^2\beta-1)+2\sin\beta\cos\beta(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin\alpha\cos\alpha\cos^2\beta-2\sin\alpha\cos\alpha+4\sin\beta\cos\beta\cos^2\alpha-2\sin\beta\sin\beta=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

~~$4\cos\alpha\cos\beta(\sin\alpha\cos\beta+\sin\beta\cos\alpha)-2(\sin\alpha\cos\alpha+\sin\beta\cos\beta)$~~

$\sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$\sin 2\alpha\cos 4\beta+\sin 4\beta\cos 2\alpha+\sin 2\alpha=-\frac{2}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(\cancel{2\sin^2 2\beta}\ 2\cos^2 2\beta-1)+2\sin 2\beta\cos 2\beta(2\cos^2\alpha-1)=-\frac{2}{17}$

$2\sin\alpha\cos\alpha(2(2\cos^2\beta-1)^2-1)$

$y_1=\cancel{8-6x}=\frac{8-6x}{3x-2}=-\frac{6x-4-4}{3x-2}=-2+\frac{4}{3x-2}$

$y_2=18x^2-51x+28$ $\quad x_0=\frac{51}{36}=\frac{17}{12}$

$y_1(2)=-1$ $\quad y_2(2)=-2$ $\quad a=0\ \ b=-\frac{65}{8}$

$a=-3\ \ b=4$

$a=-3\ \ b=5$

$a=-3\ \ b>5$

$a=-3\ \ b\in$

$a=-3$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

№3.

$$|x^2-26x|^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

ОДЗ: $26x-x^2>0$

$x(26-x)>0$

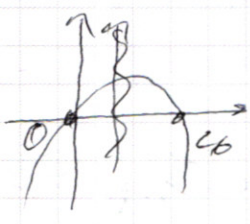
$$(26x-x^2)^{\log_5 12}+26x \geq x^2+13^{\log_5(26x-x^2)}$$

$max = 169 \log_5 169$

$26x-x^2=0$

$=x(26-x)$

$$t^{\log_5 12}+t \geq 13^{\log_5 t}=13^{\frac{\log_{13} t}{\log_{13} 5}}=t^{\log_5 13}$$



$26-2x=0$

$x=13$

$13^2\cdot 2-13^2=13^2=169$

~~$\log_5(t^{\log_5 12}+t) \geq \log_5 t\cdot\log_5 13$~~

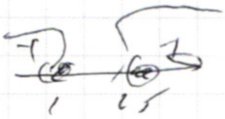
МФ: 0,5

БМ = 16,5

$$t^{\log_5 12}-t^{\log_5 13}+t \geq 0$$

~~$t^{\log_5 \frac{12}{5}}-t^{\log_5\frac{13}{5}}+1\geq 0$~~

$(x-1)(x-15) \geq 0$



$144+12=156+13$