МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ОЛИМПИАДА "ФИЗТЕХ" ПО МАТЕМАТИКЕ

11 класс

ВАРИАНТ 3

ШИФР ______________________

Заполняется ответственным секретарём

1. [3 балла] Углы α и β удовлетворяют равенствам

$$\sin(2\alpha+2\beta)=-\frac{1}{\sqrt{17}};\qquad \sin(2\alpha+4\beta)+\sin 2\alpha=-\frac{8}{17}.$$

Найдите все возможные значения $\operatorname{tg}\alpha$, если известно, что он определён и что этих значений не меньше трёх.

2. [4 балла] Решите систему уравнений

$$\begin{cases}3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2},\\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4.\end{cases}$$

3. [5 баллов] Решите неравенство

$$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geqslant |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2.$$

4. [5 баллов] Окружности Ω и ω касаются в точке A внутренним образом. Отрезок AB – диаметр большей окружности Ω, а хорда BC окружности Ω касается ω в точке D. Луч AD повторно пересекает Ω в точке E. Прямая, проходящая через точку E перпендикулярно BC, повторно пересекает Ω в точке F. Найдите радиусы окружностей, угол AFE и площадь треугольника AEF, если известно, что $CD=\frac{5}{2}$, $BD=\frac{13}{2}$.

5. [5 баллов] Функция f определена на множестве положительных рациональных чисел. Известно, что для любых чисел a и b из этого множества выполнено равенство $f(ab)=f(a)+f(b)$, и при этом $f(p)=[p/4]$ для любого простого числа p ($[x]$ обозначает наибольшее целое число, не превосходящее x). Найдите количество пар натуральных чисел $(x;y)$ таких, что $3\leqslant x\leqslant 27$, $3\leqslant y\leqslant 27$ и $f(x/y)<0$.

6. [5 баллов] Найдите все пары чисел $(a;b)$ такие, что неравенство

$$\frac{4x-3}{2x-2}\geqslant ax+b\geqslant 8x^2-34x+30$$

выполнено для всех x на промежутке $(1;3]$.

7. [6 баллов] Дана пирамида $PQRS$, вершина P которой лежит на одной сфере с серединами всех её рёбер, кроме ребра PQ. Известно, что $QR=2$, $QS=1$, $PS=\sqrt{2}$. Найдите длину ребра RS. Какой наименьший радиус может иметь сфера, описанная около данной пирамиды?

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 1

$0 \le \alpha, \beta \le \pi$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 2\beta) = \sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = -\frac{8}{17}$

$\sin(2\alpha + 4\beta) = \sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \cos(2\alpha)\sin(4\beta)$

$\sin(2\alpha)\cos(4\beta) + \sin(2\alpha) = \sin(2\alpha)\big(\cos^2(2\beta) - \sin^2(2\beta) + \cos^2(2\beta) +$

$+ \sin^2(2\beta)\big) = \sin(2\alpha) \cdot 2\cos^2(2\beta)$

$\cos(2\alpha)\sin(4\beta) = \cos(2\alpha) \cdot 2\sin(2\beta)\cos(2\beta)$

$\sin(2\alpha + 4\beta) + \sin(2\alpha) = 2\cos(2\beta)\big(\sin(2\alpha)\cos(2\beta) + \cos(2\alpha)\sin(2\beta)\big) =$

$= 2\cos(2\beta) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right) = -\frac{8}{17}$

$\cos(2\beta) = \frac{4}{\sqrt{17}} \qquad \sin(2\beta) = \pm\sqrt{1 - \left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2} = \pm\frac{1}{\sqrt{17}}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2\alpha) \pm \frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2\alpha) = -\frac{1}{\sqrt{17}}$

$4\sin(2\alpha) \pm \cos(2\alpha) = -1$

$t = \cos(2\alpha)$

$\pm 4\sqrt{1 - t^2} \pm t = -1$

I $\sin(2\beta) > 0, \ \sin(2\alpha) \ge 0 \ (2\alpha \in [0; \pi])$

$4\sqrt{1 - t^2} = -t - 1$

$\left.\begin{array}{l} -t - 1 \le 0 \\ 4\sqrt{1 - t^2} \ge 0 \end{array}\right| \Rightarrow t = -1 \quad \cos(2\alpha) = -1 \quad \alpha = \frac{\pi}{2}$

☐ черновик ☑ чистовик (Поставьте галочку в нужном поле)

$\underline{\text{II}}$ $\sin(2\beta)>0,\ \sin(2\alpha)\le 0\ \ (2\alpha\in[\pi;2\pi])$

$-4\sqrt{1-t^2}+t=-1$ $\qquad 17t^2+2t-15=0$

$-4\sqrt{1-t^2}=-t-1$ $\qquad t=\dfrac{-2\pm\sqrt{4+1020}}{34}=\dfrac{-2+32}{34}=\dfrac{15}{17};\ =\dfrac{-2-32}{34}=-1$

$4\sqrt{1-t^2}=t+1$

$16-16t^2=t^2+2t+1$ $\qquad \underline{\cos(2\alpha)=\frac{15}{17};\ -1}$ $\qquad \underline{\alpha=\frac{\pi}{2}}$

$\underline{\text{III}}$ $\sin(2\beta)<0,\ \sin(2\alpha)\ge 0\ \ (2\alpha\in[0;\pi])$

$4\sqrt{1-t^2}-t=-1$ $\qquad 4\sqrt{1-t^2}\ge 0$

$4\sqrt{1-t^2}=t-1$ $\qquad t-1\le 0$ $\Rightarrow t=1\quad \cos(2\alpha)=1\quad \underline{\alpha=0}$

$\underline{\text{IV}}$ $\sin(2\beta)<0,\ \sin(2\alpha)\le 0\ \ (2\alpha\in[\pi;2\pi])$

$-4\sqrt{1-t^2}-t=-1$ $\qquad 17t^2-2t-15=0$

$-4\sqrt{1-t^2}=t-1$ $\qquad t=\dfrac{2\pm\sqrt{4+1020}}{34}=\dfrac{2+32}{34}=1;\ =\dfrac{2-32}{34}=-\dfrac{15}{17}$

$4\sqrt{1-t^2}=1-t$

$16-16t^2=t^2-2t+1$ $\qquad \underline{\cos(2\alpha)=-\frac{15}{17};\ 1}$ $\qquad \underline{\alpha=\pi}$

$\alpha=\cancel{\frac{\pi}{2}};\ 0;\ \frac{\pi}{2};\ \pi$

$\cos(2\alpha)=\dfrac{15}{17}\left(\begin{matrix}\cancel{\sin(2\alpha)\ge 0}\\ \alpha\in[\frac{\pi}{2};\pi]\end{matrix}\right);\ -\dfrac{15}{17}\left(\begin{matrix}\cancel{\sin(2\alpha)\le 0}\\ \alpha\in[\frac{\pi}{2};\pi]\end{matrix}\right)$

$tg(0)=0$

$tg(\frac{\pi}{2})=0$

$tg(\pi)=0$

$tg(\alpha)=\dfrac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}=\dfrac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos(2\alpha)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(2\alpha)}{2}}}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos(2\alpha)}{1+\cos(2\alpha)}}$

$tg(\alpha)=-\sqrt{\dfrac{1-\frac{15}{17}}{1+\frac{15}{17}}}=-\sqrt{\dfrac{2}{32}}=-\dfrac{1}{4}\quad \left(\cos(2\alpha)=\dfrac{15}{17}\right)$

$tg(\alpha)=-\sqrt{\dfrac{1+\frac{15}{17}}{1-\frac{15}{17}}}=-\sqrt{\dfrac{32}{2}}=-4\quad \left(\cos(2\alpha)=-\dfrac{15}{17}\right)$

$\boxed{\text{Ответ: } 0;\ -\frac{1}{4};\ -4}$

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 3

$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x \geq |x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$x^2+6x>0 \Rightarrow |x^2+6x|=x^2+6x$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+(x^2+6x)\geq (x^2+6x)^{\log_4 5}$

$x^2+6x=t \quad t>0$

$3^{\log_4 t}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3}+t\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 3+\log_4 4}\geq t^{\log_4 5}$

$t^{\log_4 12}\geq t^{\log_4 5}$

$\log_4 12>\log_4 5$ $\Rightarrow t\geq 1 \quad x^2+6x\geq 1 \quad x^2+6x-1\geq 0$

$x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4}}{2}=-3\pm\sqrt{10}$

$\boxed{\text{Ответ: } x\in \left[-3-\sqrt{10};\ -3+\sqrt{10}\right]}$

Задача 5

$f(ab)=f(a)+f(b)$

$f(a\cdot 1)=f(a)+f(1)=f(a)\Rightarrow f(1)=0$

$f(a\cdot \frac{1}{a})=f(a)+f(\frac{1}{a})=f(1)=0\Rightarrow f(\frac{1}{a})=-f(a)$

$f(x/y)=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)<0\Rightarrow f(x)<f(y)$

$f(2)=0$ $f(3)=0$ $f(5)=1$ $f(7)=1$ $f(11)=2$ $f(13)=3$ $f(17)=4$
$f(19)=4$ $f(23)=5$

$f(4)=f(2\cdot 2)=0+0=0$
$f(6)=f(2\cdot 3)=0+0=0$
$f(8)=f(4\cdot 2)=0+0=0$
$f(9)=f(3\cdot 3)=0+0=0$
$f(10)=f(2\cdot 5)=0+1=1$
$f(12)=f(2\cdot 6)=0+0=0$
$f(14)=f(2\cdot 7)=0+1=1$
$f(16)=f(2\cdot 8)=0+0=0$
$f(18)=f(2\cdot 9)=0+0=0$

$f(20)=f(2\cdot 10)=0+1=1$
$f(21)=f(3\cdot 7)=0+1=1$
$f(22)=f(2\cdot 11)=0+2=2$
$f(24)=f(2\cdot 12)=0+0=0$
$f(25)=f(5\cdot 5)=1+1=2$
$f(26)=f(2\cdot 13)=0+3=3$
$f(27)=f(3\cdot 9)=0+0=0$

Количевство:
0: 12
1: 7
2: 3
3: 2
4: 2
5: 1

$f(x)=0$ $f(y)=1,2,3,4,5$ $12\cdot(7+3+2+2+1)$
$f(x)=1$ $f(y)=2,3,4,5$ $7\cdot(3+2+2+1)$
...
$f(x)=4$ $f(y)=5$ $2\cdot 1$

$12(7+3+2+2+1)+7(3+2+2+1)+$
$+3(2+2+1)+2(2+1)+2\cdot 1=$
$=12\cdot 15+7\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=$
$=180+56+15+6+2=259$

$\boxed{\text{Ответ: } 259}$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

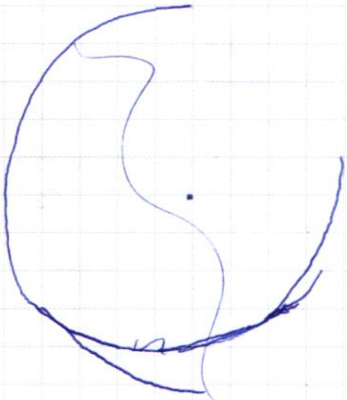
«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

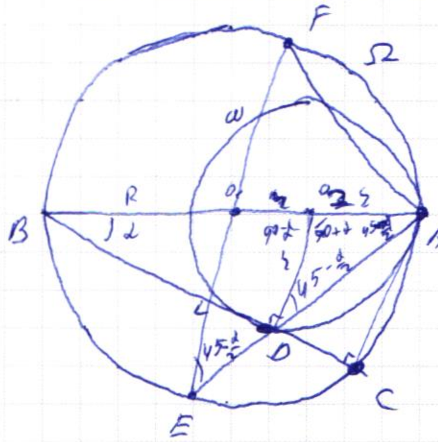
ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

Задача 4





$BD = \frac{13}{2}$

$CD = \frac{5}{2}$

$BO_2 = 2R - s$, $\angle BDO_2 = 90°$

$DO_2 = s = BO_2 \sin(\alpha)$

$BD = \frac{13}{2} = BO_2 \cos(\alpha)$

$\angle BCA = 90°$

$AB = 2R$

$BC = BD + CD = 9 = AB\cos(\alpha)$

$\cos(\alpha) = \frac{BC}{AB} = \frac{9}{2R}$

$\sin(\alpha) = \sqrt{1 - \left(\frac{9}{2R}\right)^2} = \frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}$

$2R - s = \frac{13}{9}R$

$\frac{13}{9}R \cdot \frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R} = \frac{5}{9}R$

$13\sqrt{4R^2-81} = 10R$

$676R^2 - (13\cdot 9)^2 = 100R^2$

$(24R)^2 = (13\cdot 9)^2$

$24R = 13 \cdot 9$

$BD = \frac{13}{2} = BO_2\cos(\alpha) = 2(R - s)\cdot\frac{9}{2R}$ $2R\cdot\frac{9}{2R} - s\cdot\frac{9}{2R}$

$R = \frac{39}{8}$

$13 = 18 - \frac{9s}{R}$

$s = \frac{195}{72}$

$\frac{9s}{R} = 5$

$s = \frac{5}{9}R$

$\left.\begin{matrix}\angle DBO_2 = \alpha \\ \angle BDO_2 = 90°\end{matrix}\right| \Rightarrow \angle BO_2D = 90 - \alpha \Rightarrow \angle AO_2D = 90 + \alpha \Rightarrow$

$O_2D = O_2A$

$\Rightarrow \angle O_2DA = \angle O_2AD = 45 - \frac{\alpha}{2}$ $\left.\begin{matrix}O_2D \perp BC \\ EF \perp BC\end{matrix}\right| \Rightarrow EF \parallel O_2D \Rightarrow$

☐ черновик ☑ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

$\Rightarrow \angle FEA = \angle O_2DA = 45 - \frac{\alpha}{2}$

$\angle BAE = \angle O_1AE \Rightarrow$

$A, E \in \Omega$ $\Rightarrow \angle O_1EA = \angle O_1AE = 45 - \frac{\alpha}{2}$

O_1 – центр Ω

$\angle FAE = 45 - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow O_1 \in EF$,

EF – диаметр $\Omega \Rightarrow$

$EF = 2R = \frac{39}{4}$

$\Rightarrow \angle EAF = 90^0$, $\angle FAE = 45 - \frac{\alpha}{2}$ $\Rightarrow \angle AFE = 45 + \frac{\alpha}{2}$

$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \frac{12}{13}}{2}} = \frac{1}{\sqrt{26}}$

$\cos(\alpha) = \frac{9}{2R} = \frac{9}{2} \cdot \frac{8}{39} = \frac{12}{13}$

$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \frac{12}{13}}{2}} = \frac{5}{\sqrt{26}}$

$\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{26}} + \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{5}{\sqrt{26}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$

$\cos\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) = \frac{2}{\sqrt{13}}$

$\angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$

$S_{AFE} = \frac{AE \cdot AF}{2} = \frac{EF\sin\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right) \cdot EF\cos\left(45 + \frac{\alpha}{2}\right)}{2} =$

$= \frac{\left(\frac{39}{4}\right)^2 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\cancel{2}}{\sqrt{13}}}{\cancel{2}} = \frac{39 \cdot \cancel{39}^{3} \cdot 3}{4 \cdot 4 \cdot \cancel{13}} = \frac{351}{16}$

$$\boxed{\text{Ответ: } R = \frac{39}{8};\ r = \frac{195}{72};\ \angle AFE = \arcsin\left(\frac{3}{\sqrt{13}}\right);\ S_{AEF} = \frac{351}{16}}$$

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$a<0$ $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} b=a+4 \\ \dfrac{2(a+2-b)-\sqrt{-11-}}{4a}=3 \end{cases} \\ \begin{cases} b=3a \\ \dfrac{2(a+2-b)-\sqrt{-11-}}{4a}=1 \end{cases} \end{array}\right.$

$a+2-a-4=-2$

$-4-\sqrt{-11-}=12a$

$a>0$

$a=0$ $\begin{cases} b=a+4 \\ 3=\dfrac{b-3}{2(b-a-2)} \end{cases}$

$\dfrac{a+1}{2\cdot 2}=3$

$a+1=12$

$\cancel{\boxed{\begin{matrix} a=11 \\ b=15 \end{matrix}}}$

$$\begin{cases} 8x^2-(34-a)x+(30-b)\le 0 \\ 2ax^2+2(b-a-2)x+(3-b)\le 0 \end{cases}$$

$$x=\frac{34-a\pm\sqrt{a^2-68a+32b+196}}{16}$$

$$\begin{cases} \frac{34-a-\sqrt{a^2-68a+32b+196}}{16}\le 1 \\ \frac{34-a+\sqrt{a^2-68a+32b+196}}{16}\ge 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 34-a-\sqrt{-//-}\le 16 \\ 34-a+\sqrt{-//-}\ge 48 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 18-a\le\sqrt{-//-} \\ \sqrt{-//-}\ge 14+a \end{cases}$$

$$\begin{cases} -//-\ge a^2-36a+324 \\ -//-\ge a^2+28a+196 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a^2-68a+32b+196\ge a^2-36a+324 \\ a^2-68a+32b+196\ge a^2+28a+196 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 32b\ge 32a+128 \\ 32b\ge 96a \end{cases}$$

$$\begin{cases} b\ge a+4 \\ b\ge 3a \end{cases}$$

$b=a+4$

$b=3a$

$b\ge a+4$ $\quad b=a+4$ $\quad b=3a$ $\quad b\ge 3a$

$1 \quad 3$

$2R-\frac{5}{9}R=\frac{13}{9}R \quad (2R-2)\cdot\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}=\frac{5}{9}R$

$\frac{18}{9}-\frac{5}{9}=\frac{13}{9}$

$$\sin(\alpha)=\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}=\frac{\sqrt{4R^2-81}}{2R}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{9}{2R}$$

$$\frac{2(a+2-b)\pm\sqrt{a^2+b^2+6ab-20a-4b+4}}{4a}$$

$$2(b-a-2)x+(3-b)\le 0$$

$$x\le\frac{b-3}{2(b-a-2)}$$

$$\sin\left(45+\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{5}{\sqrt{26}}+\frac{\sqrt2}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{26}}=$$

$$=\frac{1}{\sqrt2}\left(\frac{3}{\sqrt2\sqrt{13}}\right)=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$a^2-b^2=5$

$2ab=12$

$(3+2i)^2=(9-4)+2\cdot3\cdot2i=5+12i$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1-\frac{12}{13}}{2}}=\frac{1}{\sqrt{26}}$$

$$\cos(\alpha)=\frac{9}{2R}=\frac{9}{2}\cdot\frac{8}{39}=\frac{12}{13}$$

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\sqrt{\frac{1+\frac{12}{13}}{2}}=\sqrt{\frac{25}{26}}=\frac{5}{\sqrt{26}}$$

$24R=13\cdot 9$

$R=\frac{117}{24}$

$R=\frac{39}{8}$ $\quad \xi=\frac{195}{72}$ $\quad 169(4R^2-81)=100R^2$

$\frac{39}{8}$

$\frac{13}{18}\sqrt{4R^2-81}=\frac{5}{9}R$

$13\sqrt{4R^2-81}=10R$

$$2R\cdot\frac{9}{R}-\xi\cdot\frac{9}{R}=13$$

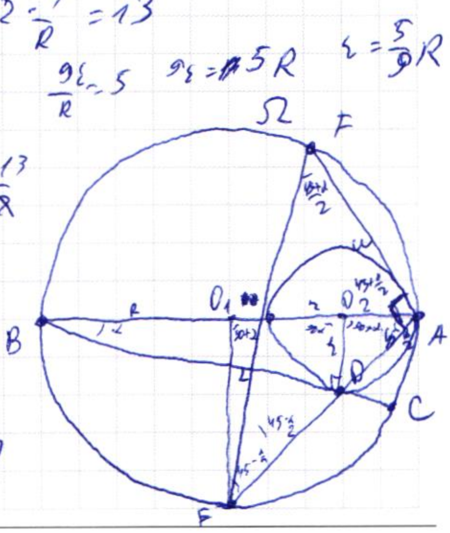
$$18-\frac{9\xi}{R}=13 \quad \frac{9\xi}{R}=5 \quad 9\xi=5R \quad \xi=\frac{5}{9}R$$

$$(2R-\xi)\cdot\frac{9}{2R}=\frac{13}{2}$$

$$(2R-2)\cos(\alpha)=\frac{13}{2}$$

$$(2R-2)^2=2^2+BD^2$$

$CD=\frac{5}{2},\ BD=\frac{13}{2}$ $\quad r,\ 2-?$ $\quad \angle AFE,\ S_{AEF}-?$



☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ

«МОСКОВСКИЙ ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ (НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ)»

ШИФР

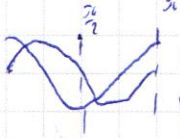
(заполняется секретарём)

ПИСЬМЕННАЯ РАБОТА

$\sin(2a)\cos(2b)+\cos(2a)\sin(2b)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$ $\quad 2\cos(2b)(\sin(2a)\cos(2b)+\cos(2a)\sin(2b))=-\frac{8}{17}$

$2\cos(2b)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{17}}\right)=-\frac{8}{\sqrt{17}}$ $\quad \cos(2b)=\frac{8}{17}\cdot\frac{\sqrt{17}}{2}=\frac{4}{\sqrt{17}}$

$\cos(2b)=\frac{4}{\sqrt{17}}$ $\quad \sin(2b)=\pm\frac{1}{\sqrt{17}}$



$\cos(2a)=t$

$\begin{cases} 4\sqrt{1-t^2}+t=-1 \\ -4\sqrt{1-t^2}+t=-1 \end{cases}$

$\frac{4}{\sqrt{17}}\sin(2a)+\frac{1}{\sqrt{17}}\cos(2a)=-\frac{1}{\sqrt{17}}$

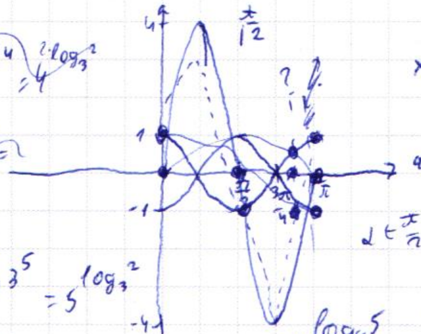
$4\sin(2a)\pm\cos(2a)=-1$ $\quad 2^{\log_3 4}=4^{\log_3 2}$

I $\quad a=\frac{\pi}{2}$ $\quad \frac{\sin(a)}{\cos(a)}=\frac{1}{0}$ $\quad 2^{\log_3 8}$

II $\quad \cos(2a)=\frac{15}{17}$ $\quad \left(a\in\left(\frac{3\pi}{4};\pi\right)\right)$ $\quad \sin(a)>0$, $\cos(a)<0$

III $\quad a=\pi$ $\quad \frac{\sin(a)}{\cos(a)}=0$ $\quad 2^{\log_3 5}=5^{\log_3 2}$

IV $\quad \cos(2a)=-\frac{15}{17}$ $\quad \left(a\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ $\quad \sin(a)>0$, $\cos(a)<0$



$a\in\left(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{4}\right)$ $\quad 2a\in\left(\pi;\frac{3\pi}{2}\right)$

$-12\sin(2a)\cos(2a)<0$

$3^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}$ $\quad t^{\log_4 3}+t^{\log_4 5}\geq|t|$ $\quad t^{\log_4 3+\log_4 4}=t$ $\quad t^{\log_4 12}=|t|$ $\quad 4\cdot 15=60$, 1020

$3^{\log_4 t}\geq t^{\log_4 5}$ $\quad -4\sqrt{1-t^2}+t=-1$

$tg\left(\frac{a}{2}\right)=\frac{\sin\left(\frac{a}{2}\right)}{\cos\left(\frac{a}{2}\right)}=\pm\frac{\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{2}}}{\sqrt{\frac{1+\cos(a)}{2}}}$ $\quad \sqrt{1024}=32$

$-4\sqrt{1-t^2}-t=-1$

$-4\sqrt{1-t^2}=-t-1$ $\quad \pm4\sqrt{1-t^2}\pm t=-1$ $\quad -4\sqrt{1-t^2}=t+1$

$4\sqrt{1-t^2}=t+1$ $\quad \pm4\sqrt{1-t^2}=\pm t-1$ $\quad =\pm\sqrt{\frac{1-\cos(a)}{1+\cos(a)}}$ $\quad 4\sqrt{1-t^2}=1-t$

$16(1-t^2)=t^2+2t+1$

$16-16t^2=t^2+2t+1$ $\quad tg(a)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos(2a)}{1+\cos(2a)}}$ $\quad 16-16t^2=t^2-2t+1$

$17t^2+2t-15=0$ $\quad 17t^2-2t-15=0$

$t=\frac{-2\pm\sqrt{4+1020}}{34}=\frac{-2\pm32}{34}$: $\frac{30}{34}=\frac{15}{17}$; $\frac{-34}{34}=-1$

$t=\frac{2\pm32}{34}$: $\frac{34}{34}=1$; $\frac{-30}{34}=-\frac{15}{17}$

$\log_a b=c$, $a=b^c$ $\quad c=b^d$, a^d $\quad t>0$ $\quad t^{\log_4 12}\geq 1^{\log_4 5}$ $\quad t\geq1$

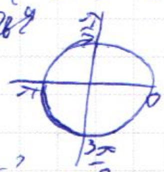
$x^2+6x\geq1$, $x^2+6x-1\geq0$, $x=\frac{-6\pm\sqrt{36+4}}{2}=-3\pm\sqrt{10}$

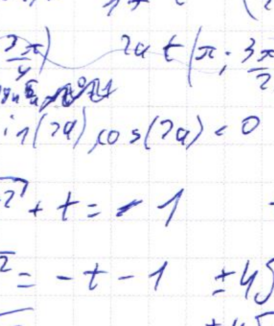
$3^{\log_4(x^2+6x)}+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}-x^2$

$3^{\log_4(x^2+6x)}+x^2+6x\geq|x^2+6x|^{\log_4 5}$

$x^2+6x=t$ $\quad a\in\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$

$3^{\log_4 t}+t\geq|t|^{\log_4 5}$





$\angle AFE$, $\angle AEF$ $\quad R_{1,2}-?$

I	0
II	$-\frac{1}{4}$
III	0
IV	-4

$\sqrt{\frac{1-\frac{15}{17}}{1+\frac{15}{17}}}=\sqrt{\frac{\frac{2}{17}}{\frac{32}{17}}}=\sqrt{\frac{2}{32}}=-\sqrt{\frac{1}{16}}=-\frac{1}{4}$

$-\sqrt{\frac{1+\frac{15}{17}}{1-\frac{15}{17}}}=-\sqrt{\frac{\frac{32}{17}}{\frac{2}{17}}}=-\sqrt{\frac{32}{2}}=-\sqrt{16}=-4$

$BC=9$ $\quad 4R^2=9+AC^2$

$x\in(-3-\sqrt{10};-3+\sqrt{10})$

$CD=\frac{5}{2}$ $\quad AD=\frac{13}{2}$ $\quad 16R(R-2)=169$

$(2R-2)^2=2^2+BD^2$ $\quad 4R^2-8R2+2^2=2^2+\frac{169}{4}$ $\quad 4R(R-2)=\frac{169}{4}$

☑ черновик ☐ чистовик

(Поставьте галочку в нужном поле)

Страница №__

(Нумеровать только чистовики)

$0-12$
$1-7$
$2-3$
$3-2$
$4-2$
$5-1$
10

$12+7+3+2+2+1=27$

$\cdot 1-0$, $\cdot 2-0$, $\cdot 3-0$, $\cdot 4-0$, $\cdot 5-1$, $\cdot 6-0$, $\cdot 7-1$, $\cdot 8-0$, $\cdot 9-0$, $\cdot 10-1$, $\cdot 11-2$, $\cdot 12-0$, $\cdot 13-3$, $\cdot 14-1$, $\cdot 15-1$, $\cdot 16-0$, $\cdot 17-4$, $\cdot 18-0$, $\cdot 19-4$, $\cdot 20-1$, $\cdot 21-1$, $\cdot 22-2$, $\cdot 23-5$, $\cdot 24-0$, $\cdot 25-2$, $\cdot 26-3$, $\cdot 27-0$

$$\begin{cases} 3y-2x=\sqrt{3xy-2x-3y+2} \\ 3x^2+3y^2-6x-4y=4 \end{cases}$$

$\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{17}}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{16}{17}}=\frac{1}{\sqrt{17}}$

$9y^2-12xy+4x^2=3xy-2x-3y+2$

$9y^2-15xy+4x^2+2x+3y-2=0$

$\sin(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y)$

$3y-2x\geq 0$ $\quad 3y\geq 2x$ $\quad y\geq\frac{2}{3}x$ $\quad x+y=\frac{\pi}{4}$ $\quad 1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$

$3xy-2x-3y+2\geq 0$ $\quad x\leq\frac{3}{2}y$

$3y(x-1)-2(x-1)\geq 0$

$(3y-2)(x-1)\geq 0$

$\sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y)=$

$x=0,\ y=\frac{\pi}{2}$

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3y-2>0 \\ x-1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 3y-2<0 \\ x-1<0 \end{cases} \\ 3y-2=0 \\ x-1=0 \end{array}\right. \qquad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y>\frac{2}{3} \\ x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} y<\frac{2}{3} \\ x<1 \end{cases} \\ y=\frac{2}{3} \\ x=1 \end{array}\right.$$

$f(x)-f(y)<0$

$f(x)<f(y)$

$f(x)=0$
$f(y)=1;2;3;4;5$

$-8a(3-b)=$

$8a(b-3)=8ab-24a$

$180+56+15+6+2=259$

$1=0\cdot 0+1\cdot 1=1$

$~~3y-2x~~$ $\quad 12\cdot(7+3+2+2+1)+7\cdot(3+2+2+1)+3\cdot(2+2+1)+2\cdot(2+1)+2\cdot 1=12\cdot 15+7\cdot 8+3\cdot 5+2\cdot 3+2\cdot 1=180+56+15+6+2=$

$(b-a-2)^2=b^2+a^2+4-2ab-4b+4a$

$3x^2+3y^2-6x-4y=4$

$1=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=1$

$D=4(b-a-2)^2-4\cdot 2a\cdot(3-b)=$ $\underline{254}$

$3x^2-6x+3+3y^2-4y+1-4=4$

$3(x-1)^2+(3y-1)(y-1)=8$

$34\cdot 34=136+102=1156$

$=b^2+a^2-2ab-4b+4a+4+8ab-24a=$

$=a^2+b^2+6ab-20a-4b+4$

$\sin(2a+2b)=\sin(2a)\cos(2b)+\cos(2a)\sin(2b)$

$\sin(2a+4b)=\sin(2a)\cos(4b)+\cos(2a)\sin(4b)$ $\quad 32\cdot 30=960$

$x+1$

$2(ax+b)(x-1)=2ax^2+bx-ax-b=$

$\cos(2a)\sin(4b)=2\cos(2a)\sin(2b)\cos(2b)$

$2\cos(2b)\cos(2a)\sin(2b)$
$2\cos(2b)\sin(2a)\cos(2b)$

$=2ax^2+2(b-a)x-b\leq 4x-3$

$(a;b)-?$ $\quad \sin(2a)(1+\cos(4b))=\ldots(1+\cos^2(2b)-\sin^2(2b))=\ldots(\cos^2(2b)+\sin^2(2b)+\cos^2(2b)-\sin^2(2b))=2\sin(2a)\cos^2(2b)$

$2ax^2+2(b-a-2)x+(3-b)\leq 0$

$\frac{4x-3}{2x-2}\geq ax+b\geq 8x^2-34x+30$

$1156-960=196$

$~~x=\frac{-2(b-a-2)\pm\sqrt{}}{}~~$

$x=\frac{2(a+2-b)\pm\sqrt{a^2+b^2+6ab-20a-4b+4}}{4a}$

$0\leq a,b\leq\pi$

$x\in(1;3]$

$$\begin{cases} \frac{4x-3}{2(x-1)}\geq ax+b \\ ax+b\geq 8x^2-34x+30 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x-3\geq 2(ax+b)(x-1) \\ 8x^2-(34-a)x+(30-b)\leq 0 \end{cases}$$

$12\cdot 12=144$, $\quad 12\cdot 32=384$

$f(4)=f(2\cdot 2)=0+0=0$
$f(6)=f(2\cdot 3)=0+0=0$
$f(8)=f(2\cdot 2\cdot 2)=f(4\cdot 2)=0+0=0$
$f(9)=f(3\cdot 3)=0+0=0$
$f(10)=f(2\cdot 5)=0+1=1$
$f(12)=f(2\cdot 6)=0+0=0$
$f(14)=f(2\cdot 7)=1$
$f(15)=1$
$f(16)=0$
$f(18)=0$
$f(20)=1$
$f(21)=1$

$D=(34-a)^2-32(30-b)=a^2-68a+1156+32b-960=a^2-68a+32b+196$

$x=\frac{34-a\pm\sqrt{a^2-68a+32b+196}}{16}$

$68-36=32$

$f(8)=f(1\cdot 8)=f(1)+f(8)$ $\quad f(1)=0$

$D(f)=(0;+\infty)$

$f(ab)=f(a)+f(b)$ $\quad 32b\geq 32a+128$ $\quad 78-68=96$?

$f(1)=f(8\cdot\frac{1}{8})=f(8)+f(\frac{1}{8})$ $\quad f(\frac{1}{8})=-f(8)$

$f(x/y)=f(x\cdot\frac{1}{y})=f(x)+f(\frac{1}{y})=f(x)-f(y)$

$f(p)=[p/4]$ $\quad$ (p – простое)

$324-196=128$

$f(\frac{1}{2})=0$ $\quad f(2)=[2/4]=[0,5]=0$ $\quad f(11)=2$ $\quad f(29)=7$

$(x;y)$ – колич.

$f(\frac{1}{3})=0$ $\quad f(3)=0$ $\quad f(\frac{1}{11})=-2$ $\quad f(13)=3$ $\quad f(\frac{1}{23})=-5$

$3\leq x,y\leq 27$

$196+128=324$

$f(\frac{1}{5})=-1$ $\quad f(5)=1$ $\quad f(\frac{1}{13})=-3$ $\quad f(17)=4$ $\quad f(\frac{1}{29})=-7$

$f(\frac{1}{7})=-1$ $\quad f(7)=1$ $\quad f(\frac{1}{17})=-4$ $\quad f(19)=4$

$f(x/y)<0$ $\quad f(\frac{1}{19})=-4$ $\quad f(23)=5$

$f(22)=2$
$f(24)=0$
$f(25)=2$
$f(26)=3$
$f(27)=0$

☑ черновик ☐ чистовик Страница №__

(Поставьте галочку в нужном поле) (Нумеровать только чистовики)